

Л. А. БЕССОНОВ



Л. А. БЕССОНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

(в трех частях)

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов энергетических
и электротехнических вузов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1973

6П2.1
Б53
УДК 621.3

Бессонов Л. А.

Б 53 Теоретические основы электротехники. Изд. 6-е, перераб. и доп. Учебник для студентов энергетических и электротехнических вузов. М., «Вышш. школа», 1973.
752 с. с илл.

Книга состоит из трех частей: теория линейных и нелинейных электрических цепей и теория электромагнитного поля. Материал по сравнению с предыдущим изданием в значительной степени переработан. Добавлены новые разделы, например: основы матричной теории графов, метод малого параметра, основы магнитной гидродинамики, метод интегральных уравнений и др.

6П2.1

Рецензент — Кафедра линейных электрических цепей
Всесоюзного заочного
электротехнического
института связи

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретические основы электротехники (ТОЭ) являются одной из основных дисциплин многих высших технических учебных заведений. На курсе ТОЭ базируются профилирующие дисциплины этих вузов.

Курс ТОЭ студенты изучают в течение трех семестров. В соответствии с этим материал учебника разделен на три части: первая и вторая части посвящены теории электрических цепей, третья часть — теории электромагнитного поля.

Содержание учебника соответствует программе по ТОЭ, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

По сравнению с предыдущим изданием в учебник включены следующие новые разделы: метод малого параметра, основы матричной теории графов, параметрические генераторы и усилители, переходные процессы в несовершенных диэлектриках, фильтры типа m и RC , основы релятивистской электродинамики, основы магнитной гидродинамики, процессы в полупроводящих средах, движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях, метод функции Грина, метод интегральных уравнений и ряд других. Существенно переработаны или дополнены разделы: операторный метод, теория графов, интеграл Дюамеля, резонансные явления, теория четырехполосников и т. д. В книге имеется более 220 числовых примеров с решениями по всем трем частям курса. Ряд числовых примеров заменен новыми.

Материал курса ТОЭ, как и в предыдущем издании, разделен на *общий, обязательный для студентов всех специальностей*, в учебных планах которых имеется этот курс, и *специальный, в неодинаковой степени обязательный для студентов различных специальностей*. Общий материал набран нормальным шрифтом (корпусом), специальный — петитом.

В зависимости от специфики института, факультета и специальности кафедра ТОЭ рекомендует студенту соответствующие разделы специального материала.

Свойства линейных цепей и методы их расчета изложены отдельно от символического метода и цепей синусоидального тока, т. е. в разделе постоянного тока. Опыт показывает, что это способствует лучшему усвоению материала.

Учебник написан так, что допускает некоторую перестановку его глав, если в вузе исторически сложилась несколько иная последовательность изложения отдельных разделов курса.

Физические пояснения к операциям векторного анализа даются в книге перед тем, как та или иная операция по ходу изложения впервые используется.

В связи с тем что объем учебника весьма ограничен, в него не удалось включить некоторые вопросы, выходящие за пределы программы курса ТОЭ. Для изучения их рекомендуются учебные пособия [14], [34], [53], [56].

Выражаю благодарность сотрудникам кафедры ЛЭЦ ВЗЭИС во главе с зав. кафедрой проф. М. Р. Шебесом, а также зав. кафедрой ТОЭ НПИ проф. Э. В. Колесникову за ценные замечания и пожелания по рукописи. При чтении корректур книги большую помощь оказали старшие преподаватели кафедры ТОЭ МИРЭА В. П. Каменская, С. Э. Расовская.

Автор

ЧАСТЬ I

Глава первая

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Электромагнитное устройство с происходящими в нем и в окружающем его пространстве физическими процессами в теории электрических цепей заменяют некоторым расчетным эквивалентом — электрической цепью.

Электрической цепью называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий ток, напряжение, э. д. с., сопротивление (проводимость), индуктивность, емкость.

Постоянным током называют ток, неизменный во времени. Постоянный ток представляет собой направленное упорядоченное движение частиц, несущих электрические заряды.

Как известно из курса физики, носителями зарядов в металлах являются свободные электроны, а в жидкостях — ионы. Упорядоченное движение носителей зарядов в проводниках вызывается электрическим полем, созданным в них источниками электрической энергии. Источники электрической энергии преобразуют химическую, механическую и другие виды энергии в электрическую. Источник электрической энергии характеризуется величиной и направлением э. д. с. и величиной внутреннего сопротивления.

Постоянный ток принято обозначать буквой I , э. д. с. источника — E , сопротивление — R и проводимость — g . В Международной системе единиц (СИ) ток измеряют в амперах (a), э. д. с. — в вольтах (v), сопротивление — в омах (om) и проводимость — в сименсах ($сим$).

Изображение электрической цепи с помощью условных знаков называют *электрической схемой* (рис. 1.1, a).

Зависимость тока, протекающего по сопротивлению, от напряжения на этом сопротивлении принято называть *вольтамперной характеристикой* (по оси абсцисс на графике обычно откладывают напряжение, а по оси ординат — ток).

Сопротивления, вольтамперные характеристики которых являются прямыми линиями (рис. 1.1, б), называют *линейными сопротивлениями*, а электрические цепи только с линейными сопротивлениями — *линейными электрическими цепями*.

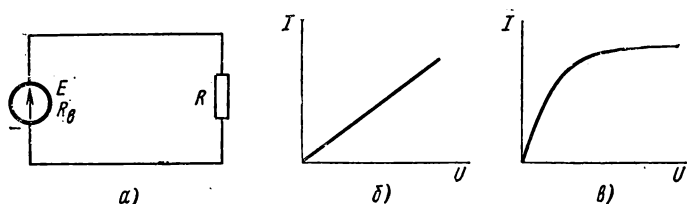


Рис. 1.1

Сопротивления, вольтамперные характеристики которых не являются прямыми линиями (рис. 1.1, в) (т. е. они нелинейны), называют *нелинейными сопротивлениями*, а электрические цепи с нелинейными сопротивлениями — *нелинейными электрическими цепями*.

§ 1.2. ИСТОЧНИК Э.Д.С. И ИСТОЧНИК ТОКА

Источник электрической энергии имеет э. д. с. E и внутреннее сопротивление $R_{\text{в}}$. Если через него под действием э. д. с. E протекает ток I , то напряжение на его зажимах $U = E - IR_{\text{в}}$ при увеличении I уменьшается. Зависимость напряжения U на зажимах реального источника от тока I изображена на рис. 1.2, а.

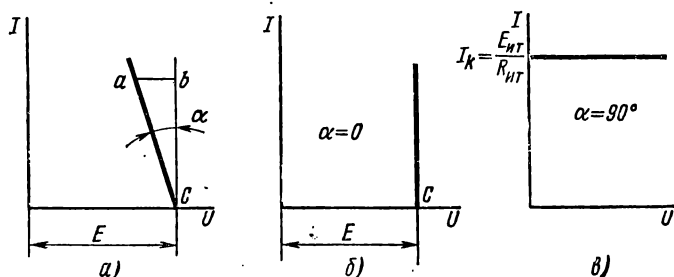


Рис. 1.2

Обозначим m_U — масштаб по оси U , m_I — масштаб по оси I . Тогда для произвольной точки на характеристике рис. 1.2, а:

$$abm_U = IR_{\text{в}}; \quad bcm_I = I; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{ab}{bc} = R_{\text{в}} \frac{m_I}{m_U}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha$ пропорционален $R_{\text{в}}$. Рассмотрим два крайних случая:

1. Если у некоторого источника внутреннее сопротивление $R_{\text{в}} = 0$, то вольтамперная характеристика его будет в виде прямой (рис. 1.2, б).

Такой характеристикой обладает идеализированный источник питания, называемый *источником э. д. с.*

Следовательно, источник э. д. с. представляет собой такой идеализированный источник питания, напряжение на зажимах которого постоянно (не зависит от величины тока I) и равно э. д. с. E , а внутреннее сопротивление равно нулю.

2. Если у некоторого источника беспрестанно увеличивать э. д. с. E и внутреннее сопротивление $R_{в}$, то точка c (см. рис. 1.2, a) будет отодвигаться по оси абсцисс в бесконечность, а угол α будет стремиться к 90° (рис. 1.2, b). Такой источник питания называют *источником тока*.

Следовательно, источник тока представляет собой идеализированный источник питания, который дает ток $I = I_k$, не зависящий от сопротивления нагрузки, к которой он присоединен, а э. д. с. его $E_{ит}$ и внутреннее сопротивление $R_{ит}$ равны бесконечности. Отношение двух бесконечно больших величин $\frac{E_{ит}}{R_{ит}}$ равно конечной величине — току I_k источника тока.

При расчете и анализе электрических цепей *реальный источник* электрической энергии с конечным значением $R_{в}$ *заменяют расчетным эквивалентом*. В качестве эквивалента может быть взят:

1) либо источник э. д. с. E с последовательно с ним включенным сопротивлением $R_{в}$, равным внутреннему сопротивлению реального источника (рис. 1.3, a ; стрелка в кружке указывает направление возрастания потенциала внутри источника э. д. с.);

2) либо источник тока с током $I_k = \frac{E}{R_{в}}$ и параллельно с ним включенным сопротивлением $R_{в}$ (рис. 1.3, b ; стрелка в кружке указывает положительное направление тока источника тока).

Ток в нагрузке (в сопротивлении R) для схем рис. 1.3, a и b одинаков и равен $I = \frac{E}{R + R_{в}}$ для схемы рис. 1.1, a . Для схемы рис. 1.3, a это следует из того, что при последовательном соединении сопротивления R и $R_{в}$ складываются. В схеме рис. 1.3, b ток $I_k = \frac{E}{R_{в}}$ распределяется обратно пропорционально сопротивлениям R и $R_{в}$ двух параллельных ветвей. Ток в нагрузке R

$$I = I_k \frac{R_{в}}{R + R_{в}} = \frac{E}{R_{в}} \cdot \frac{R_{в}}{R + R_{в}} = \frac{E}{R + R_{в}}.$$

Каким из двух расчетных эквивалентов пользоваться, совершенно безразлично. В дальнейшем используется в основном первый эквивалент.

Обратим внимание на следующее:

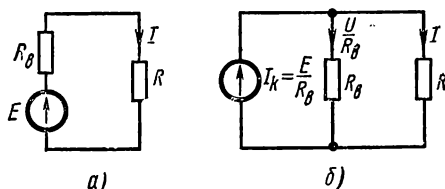


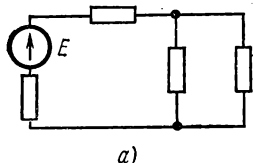
Рис. 1.3

1) источник э. д. с. и источник тока — это идеализированные источники, физически осуществить которые, строго говоря, невозможно;

2) схема рис. 1.3, б эквивалентна схеме рис. 1.3, а только в отношении энергии, выделяющейся в сопротивлении нагрузки R , и не эквивалентна ей в отношении энергии, выделяющейся во внутреннем сопротивлении источника питания;

3) идеальный источник э. д. с. нельзя заменить идеальным источником тока.

Пример 1а. В схеме рис. 1.3, б источник тока дает ток $I_k = 50$ а. Шунтирующее его сопротивление $R_n = 2$ ом. Найти величину э. д. с. эквивалентного источника э. д. с. в схеме рис. 1.3, а.



Решение. Э. д. с. $E = I_k R_n = 100$ в.

Следовательно, параметры эквивалентной схемы рис. 1.3, а таковы: $E = 100$ в и $R_n = 2$ ом.

§ 1.3. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ И РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

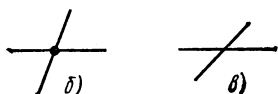


Рис. 1.4

Электрические цепи подразделяют на неразветвленные и разветвленные. На рис. 1.1, а представлена схема простейшей неразветвленной цепи. Во всех элементах ее течет один

и тот же ток. Простейшая разветвленная цепь изображена на рис. 1.4, а; в ней имеются три ветви и два узла. В каждой ветви течет свой ток. *Ветвь* можно определить как участок цепи, образованный последовательно соединенными элементами и заключенный между двумя узлами. В свою очередь *узел* есть точка цепи, в которой сходится не менее трех ветвей. Если в месте пересечения двух линий на электрической схеме поставлена точка (рис. 1.4, б), то в этом месте есть электрическое соединение двух линий, в противном случае (рис. 1.4, в) в месте пересечения линий нет электрического соединения.

§ 1.4. НАПРЯЖЕНИЕ НА УЧАСТКЕ ЦЕПИ

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка.

На рис. 1.5 изображен участок цепи, крайние точки которого обозначены буквами a и b . Пусть ток I течет от точки a к точке b (от более высокого потенциала к более низкому). Следовательно, потенциал точки a (φ_a) выше потенциала точки b (φ_b) на величину, равную произведению тока I на сопротивление R :

$$\varphi_a = \varphi_b + IR.$$

В соответствии с определением напряжение между точками a и b

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Следовательно, $U_{ab} = IR$, т. е. напряжение на сопротивлении равно произведению тока, протекающего по сопротивлению, на величину этого сопротивления.

В электротехнике разность потенциалов на концах сопротивления принято называть либо *напряжением на сопротивлении*, либо *падением напряжения*. В дальнейшем разность потенциалов на концах сопротивления, т. е. произведение IR , будем именовать падением напряжения.

Положительное направление падения напряжения на каком-либо участке цепи (направление отсчета этого напряжения), указываемое на рисунках стрелкой, совпадает с положительным направлением отсчета тока, протекающего по данному сопротивлению.

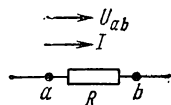


Рис. 1.5

В свою очередь положительное направление отсчета тока I (ток — это скаляр алгебраического характера) совпадает с положительным направлением нормали к поперечному сечению проводника при вычислении тока по формуле $I = \int_S \vec{\delta} d\vec{s}$, где $\vec{\delta}$ — плотность тока и $d\vec{s}$ — элемент площади поперечного сечения (подробнее см. § 16.1).

Рассмотрим вопрос о напряжении на участке цепи, содержащем не только сопротивление, но и э. д. с.

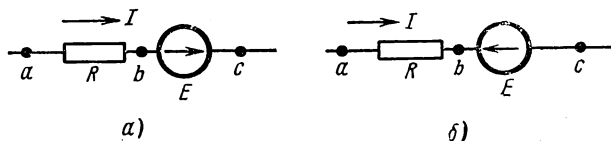


Рис. 1.6

На рис. 1.6, а и б показаны участки некоторых цепей, по которым протекает ток I . Найдём разность потенциалов (напряжение) между точками a и c для этих участков. По определению,

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c. \quad (1.1)$$

Выразим потенциал точки a через потенциал точки c . При перемещении от точки c к точке b встречно направлению э. д. с. E (рис. 1.6, а) потенциал точки b оказывается ниже (меньше), чем потенциал точки c , на величину э. д. с. E :

$$\varphi_b = \varphi_c - E.$$

При перемещении от точки c к точке b согласно направлению э. д. с. E (см. рис. 1.6, б) потенциал точки b оказывается выше (больше), чем потенциал точки c , на величину э. д. с. E :

$$\varphi_b = \varphi_c + E.$$

Так как ток течёт от более высокого потенциала к более низкому, в обеих схемах рис. 1.6 потенциал точки a выше потенциала точки b на величину падения напряжения на сопротивлении R :

$$\varphi_a = \varphi_b + IR.$$

Таким образом, для рис. 1.6, а

$$\varphi_a = \varphi_c - E + IR,$$

или

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR - E \quad (1.2a)$$

и для рис. 1.6, б

$$\varphi_a = \varphi_c + E + IR,$$

или

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR + E. \quad (1.2б)$$

Положительное направление напряжения U_{ac} показывают стрелкой от а к с. Согласно определению напряжения, $U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$. Поэтому $U_{ca} = -U_{ac}$, т. е. изменение чередования (последовательности) индексов равносильно изменению знака этого напряжения. Следовательно, напряжение может быть и положительной, и отрицательной величиной.

§ 1.5. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ, НЕ СОДЕРЖАЩЕГО Э.Д.С.

Закон Ома для участка цепи, не содержащего э. д. с., устанавливает связь между током и напряжением на этом участке. Применительно к рис. 1.5

$$U_{ab} = IR$$

или

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R}. \quad (1.3)$$

§ 1.6. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕГО Э.Д.С.

Закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с., позволяет найти ток этого участка по известной разности потенциалов ($\varphi_a - \varphi_c$) на концах участка цепи и имеющейся на этом участке э. д. с. E . Так, из уравнения (1.2a) для схемы рис. 1.6, а

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c + E}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R};$$

из уравнения (1.2б) для схемы рис. 1.6, б

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c - E}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R}.$$

В общем случае

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R} = \frac{U_{ac} \pm E}{R}. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) математически выражает закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.; знак плюс перед E соответствует рис. 1.6, а, знак минус — рис. 1.6, б.

В частном случае при $E = 0$ уравнение (1.4) переходит в уравнение (1.3).

Пример 16. К зажимам a и c схемы рис. 1.7 подключен вольтметр, имеющий очень большое, теоретически бесконечно большое сопротивление (следовательно, его подключение или отключение не влияет на режим работы цепи).

Если ток $I = 10$ а течет от a к c , то показание вольтметра $U_{ac} = -18$ в; если ток $I = 10$ а течет от c к a , то $U_{ac} = -20$ в. Определить величину сопротивления R и э. д. с. E .

Решение.

В первом режиме $U'_{ac} = -18 = -E + IR = -E + 10R$.

Во втором режиме $U''_{ac} = -20 = -E - IR = -E - 10R$.

Совместное решение дает $E = 19$ в и $R = 0,1$ ом.

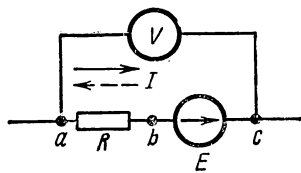


Рис. 1.7

§ 1.7. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Все электрические цепи подчиняются первому и второму законам Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа можно сформулировать двояко:

- 1) *алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю;*
- 2) *сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов.*

Так, применительно к рис. 1.8, если подтекающие к узлу токи считать положительными, а утекающие — отрицательными, то согласно первой формулировке

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0;$$

согласно второй —

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Физически первый закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Если мысленно расщечь любую схему произвольной плоскостью и все находящееся по одну сторону от нее рассматривать как некоторый большой «узел», то алгебраическая сумма токов, входящих в этот «узел», будет равна нулю.

Второй закон Кирхгофа также можно сформулировать двояко:

- 1) *алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равняется алгебраической сумме э. д. с. вдоль того же контура;*

$$\sum IR = \sum E.$$

В каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком «плюс», если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком «минус», если они не совпадают с ним;

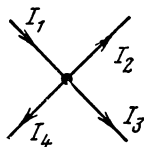


Рис. 1.8

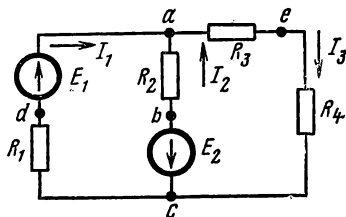


Рис. 1.9

2) алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжения!) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\sum U_k = 0.$$

Так, для периферийного контура схемы рис. 1.9

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения во времени токов и напряжений.

§ 1.8. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ТОКОВ В СХЕМАХ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

Законы Кирхгофа используют для нахождения токов в ветвях схемы. Обозначим число всех ветвей схемы через b , число ветвей, содержащих источники тока, — через $b_{\text{ит}}$ и число узлов — через y . В каждой ветви схемы течет свой ток. Так как токи в ветвях с источниками тока известны, то число неизвестных токов равняется $b - b_{\text{ит}}$. Перед тем как составлять уравнения, необходимо:

а) произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме;

б) выбрать положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа.

С целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления их обхода выбирать одинаковыми, например все по часовой стрелке.

Чтобы получить линейно независимые уравнения, по первому закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу узлов без единицы, т. е. $y - 1$. По второму закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу ветвей без источников тока ($b - b_{\text{ит}}$), за вычетом числа уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, т. е.

$$(b - b_{\text{ит}}) - (y - 1) = b - b_{\text{ит}} - y + 1.$$

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа надо охватить все ветви схемы, исключая ветви с источниками тока. При записи

линейно независимых уравнений по второму закону Кирхгофа строятся, чтобы в каждый новый контур, для которого составляют уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения по второму закону Кирхгофа. Такие контуры условимся называть *независимыми*.

Требование, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна новая ветвь, является достаточным, но не необходимым условием, и потому его не всегда выполняют. В таких случаях часть уравнений по второму закону Кирхгофа составляют для контуров, все ветви которых уже вошли в предыдущие контуры *.

Пример 2. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.9, в которой $E_1 = 80$ в, $E_2 = 64$ в, $R_1 = 6$ ом, $R_2 = 4$ ом, $R_3 = 3$ ом, $R_4 = 1$ ом.

Решение. Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях (см. рис. 1.9). В схеме $b = 3$; $b_{\text{ит}} = 0$; $y = 2$. Следовательно, по первому закону Кирхгофа можно составить только одно уравнение:

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (a)$$

Нетрудно убедиться, что для второго узла уравнение будет аналогичное. По второму закону Кирхгофа надо составить $b - b_{\text{ит}} = (y - 1) = 3 - 0 = (2 - 1) = 2$ уравнения. Положительные направления обхода контуров выбираем по часовой стрелке.

Для контура $R_1 E_1 R_2 E_2$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2. \quad (б)$$

Знак плюс перед $I_1 R_1$ взят потому, что направление тока I_1 совпадает с направлением обхода контура; знак минус перед $I_2 R_2$ — потому, что направление I_2 встречно обходу контура.

Для контура $E_2 R_2 R_3 R_4$

$$I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = -E_2. \quad (в)$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в) дает: $I_1 = 14$ а, $I_2 = -15$ а, $I_3 = -1$ а.

Поскольку положительные направления токов выбирают произвольно, в результате расчета какой-либо один или несколько токов могут оказаться отрицательными. В рассмотренном примере отрицательными оказались токи I_2 и I_3 , что следует понимать так: направления токов I_2 и I_3 не совпадают с направлениями, принятыми для них на рис. 1.9 за положительные, т. е. в действительности токи I_2 и I_3 текут в обратном направлении.

§ 1.9. ЗАЗЕМЛЕНИЕ ОДНОЙ ТОЧКИ СХЕМЫ

При заземлении одной любой точки схемы токораспределение в схеме не меняется, так как никаких новых ветвей, по которым могли бы протекать токи, при этом не образуется. Иначе будет, если зазем-

* Уравнения по законам Кирхгофа иногда составляют с помощью матрицы фундаментальных контуров и матрицы отсечений (об этом см. § В.3).

лить две или большее число точек схемы, имеющих различные потенциалы. В этом случае через землю (любую проводящую среду) образуются дополнительные ветви, сама схема становится отличной от исходной, и токораспределение в ней меняется.

§ 1.10. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА

Под потенциальной диаграммой понимают график распределения потенциала вдоль какого-либо участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс на нем откладывают сопротивления вдоль контура,

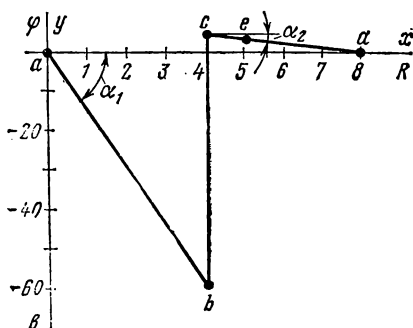


Рис. 1.10

начиная с какой-либо произвольной точки, по оси ординат — потенциалы. Каждой точке участка цепи или замкнутого контура соответствует своя точка на потенциальной диаграмме.

Рассмотрим последовательность построения потенциальной диаграммы по данным примера 2.

Пример 3. Построить потенциальную диаграмму для контура $abcea$ (см. рис. 1.9).

Решение. Подсчитываем суммарное сопротивление контура:

$4 + 3 + 1 = 8 \text{ ом}$. Выбираем масштабы по оси абсцисс (ось x) и по оси ординат (ось y).

Произвольно примем потенциал одной из точек, например точки a , равным нулю. Эту точку на диаграмме рис. 1.10 поместим в начало координат.

Потенциал точки b : $\varphi_b = \varphi_a + I_2 \cdot 4 = \varphi_a - 60 = -60 \text{ в}$; ее координаты: $x = 4$, $y = -60$.

Потенциал точки c : $\varphi_c = \varphi_b + E_2 = 4 \text{ в}$; ее координаты: $x = 4$, $y = 4$.

Потенциал точки e : $\varphi_e = \varphi_c + I_3 R_4 = 4 - 1 \cdot 1 = 3 \text{ в}$; ее координаты: $x = 5$, $y = 3$.

Тангенс угла α_1 наклона прямой ab к оси абсцисс пропорционален току I_2 , а тангенс угла α_2 наклона прямой ce — току I_3 ; $\text{tg } \alpha = I \frac{m_R}{m_\varphi}$, где m_R и m_φ — масштабы по осям x и y .

§ 1.11. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

При протекании токов по сопротивлениям в последних выделяется тепло. На основании закона сохранения энергии количество тепла, выделяющееся в единицу времени в сопротивлениях схемы, должно равняться энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

Если направление тока I , протекающего через источник э. д. с. E , совпадает с направлением э. д. с., то источник э. д. с. доставляет

в цепь в единицу времени энергию (или мощность *), равную EI , и произведение EI входит с положительным знаком в уравнение энергетического баланса.

Если же направление тока I встречно направлению э. д. с. E , то источник э. д. с. не поставляет энергию, а потребляет ее (например, заряжается аккумулятор), и произведение EI входит в уравнение энергетического баланса с отрицательным знаком.

Уравнение энергетического баланса при питании только от источника э. д. с. имеет вид

$$\sum I^2 R = \sum EI.$$

Когда схема питается не только от источников э. д. с., но и от источников тока, т. е. к отдельным узлам схемы подтекают и от них утекают токи источников тока, при составлении уравнения энергетического баланса необходимо учесть и энергию, доставляемую источниками тока. Допустим, что к узлу a схемы подтекает ток I_k от источника тока, а от узла b этот ток утекает. Доставляемая источником тока мощность равна $U_{ab}I_k$. Напряжение U_{ab} и токи в ветвях схемы должны быть подсчитаны с учетом тока, подтекающего от источника тока. Последнее проще всего сделать по методу узловых потенциалов (см. § 1.21). Общий вид уравнения энергетического баланса

$$\sum I^2 R = \sum EI + \sum U_{ab}I_k.$$

Для практических расчетов электрических цепей разработаны методы, более экономичные в смысле затраты времени и труда, чем метод расчета цепей по законам Кирхгофа. Рассмотрим эти методы.

§ 1.12. МЕТОД ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Согласно методу пропорциональных величин, в самой удаленной от источника э. д. с. ветви схемы (исходной ветви) произвольно задаемся некоторым током, например током в 1 а. Далее, продвигаясь от конца схемы к началу, находим токи в ветвях и напряжения на различных участках схемы. В результате расчета получаем значение напряжения в начале схемы и токов в ветвях, если бы в исходной ветви протекал ток в 1 а.

Так как найденное значение напряжения в начале схемы в общем случае не будет равно э. д. с. источника, то следует во всех ветвях изменить токи, умножив их на коэффициент, равный отношению э. д. с. источника к найденному значению напряжения в начале схемы.

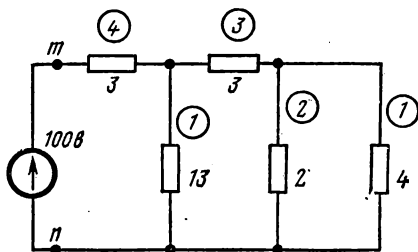


Рис. 1.11

* Мощность равна энергии, расходуемой в единицу времени.

Метод пропорциональных величин, если рассматривать его обособленно от других методов, применим для расчета цепей, состоящих только из последовательно и параллельно соединенных сопротивлений и при наличии в схеме одного источника.

Однако этот метод можно использовать и совместно с другими методами (преобразование треугольника в звезду, метод наложения и т. п.), которые рассмотрены далее.

Пример 4. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.11 методом пропорциональных величин. Сопротивления схемы даны в омах.

Решение. Задаемся током в ветви с сопротивлением 4 ом, равным 1 а, и подсчитываем токи в остальных ветвях (токи обведены на рисунке кружками). Напряжение между точками m и n при этом равно $1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 25$ в. Так как э. д. с. равна 100 в, то все токи надо умножить на коэффициент $k = \frac{100}{25} = 4$.

§ 1.13. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

При расчете методом контурных токов полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего определяют токи ветвей через контурные токи.

Таким образом, *метод контурных токов* можно определить как метод расчета, в котором за искомые принимают контурные токи.

Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа.

Следовательно, метод контурных токов более экономичен при вычислительной работе, чем метод на основе законов Кирхгофа (в нем меньшее число уравнений).

Вывод основных расчетных уравнений проведем применительно к схеме рис. 1.12, в которой два независимых контура. Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток I_{11} и в правом (также по часовой стрелке) — контурный ток I_{22} . Для каждого из контуров составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением R_5) течет сверху вниз ток $I_{11} - I_{22}$. Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.

Для первого контура

$$(R_1 + R_2) I_{11} + R_5 (I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5 \quad (г)$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5) I_{11} + (-R_5) I_{22} = E_1 + E_5. \quad (д)$$

Для второго контура

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_4 - E_5.$$

В уравнении (д) множитель при токе I_{11} , являющийся суммой сопротивлений первого контура, обозначим через R_{11} , множитель при токе I_{22} — сопротивление смежной ветви, взятое со знаком минус, обозначим его через R_{12} .

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} &= E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} &= E_{22} \end{aligned} \right\}. \quad (1.4')$$

Здесь

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5, \quad E_{11} = E_1 + E_5;$$

$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5, \quad E_{22} = -E_4 - E_5;$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_5,$$

где R_{11} — полное или собственное сопротивление первого контура;
 R_{12} — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус;

E_{11} — контурная э. д. с. первого контура; она равна алгебраической сумме э. д. с. этого контура. В нее со знаком плюс входят те э. д. с., направления которых совпадают с направлением обхода контура;

R_{22} — полное или собственное сопротивление второго контура;

R_{21} — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус;

E_{22} — контурная э. д. с. второго контура.

В общем случае можно сказать, что сопротивление смежной ветви между k и m контурами (R_{km}) входит в уравнение со знаком минус, если направления контурных токов I_{kk} и I_{mm} вдоль этой ветви встречны, и со знаком плюс, если направления токов согласны.

Если бы в схеме было больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядела бы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} &= E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} &= E_{22}; \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} &= E_{33} \end{aligned} \right\} \quad (1.4'')$$

или в матричной форме (см. § В.3):

$$[R][I] = [E],$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}.$$

Рекомендуется для единообразия в знаках сопротивлений с разными индексами все контурные токи направлять в одну и ту же сторону, например все по часовой стрелке.

Если в результате решения системы уравнений какой-либо контурный ток окажется отрицательным, то это будет означать, что в действительности направление контурного тока обратно принятому за положительное.

В ветвях, не являющихся смежными между соседними контурами (например, в ветви с сопротивлениями R_1, R_2 схемы рис. 1.12), найденный контурный ток будет являться истинным током. В смежных ветвях через контурные токи находят истинные. Например, в ветви с сопротивлением R_5 протекающий сверху вниз ток равен разности $I_{11} - I_{22}$.

Если в электрической цепи имеется n независимых контуров, то количество уравнений тоже будет равно n .

Общее решение системы n уравнений относительно тока I_{kk}

$$I_{kk} = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{km}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}. \quad (1.5)$$

Здесь Δ — определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Δ_{km} есть алгебраическое дополнение, полученное из определителя Δ путем вычеркивания k -го столбца и m -й строки и умножения полученного определителя на $(-1)^{k+m}$.

Если из левого верхнего угла определителя провести диагональ в его правый нижний угол (она называется главной диагональю) и учесть, что $R_{km} = R_{mk}$, то можно убедиться в том, что определитель делится на две части, являющиеся зеркальным отображением одна другой. Это свойство определителя называют симметрией относительно главной диагонали. В силу симметрии определителя относительно главной диагонали

$$\Delta_{km} = \Delta_{mk}.$$

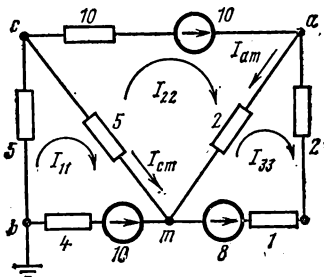


Рис. 1.13

Пример 5. Найти токи в схеме рис. 1.13 с помощью метода контурных токов. Числовые значения сопротивлений и э. д. с. указаны на рисунке.

Решение. Выбираем направления всех контурных токов I_{11} , I_{22} и I_{33} по часовой стрелке.

Определяем:

$$R_{11} = 5 + 5 + 4 = 14 \text{ ом};$$

$$R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17 \text{ ом};$$

$$R_{33} = 2 + 2 + 1 = 5 \text{ ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = -5 \text{ ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = 0; \quad R_{23} = R_{32} = -2 \text{ ом}; \quad E_{11} = -10 \text{ в};$$

$$E_{22} = 10 \text{ в}; \quad E_{33} = -8 \text{ в}.$$

Записываем систему уравнений:

$$14I_{11} - 5I_{22} = -10;$$

$$-5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} = 10;$$

$$-2I_{22} + 5I_{33} = -8.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0,635 \text{ а}.$$

$$I_{22} = 0,225 \text{ а}. \quad I_{33} = -1,52 \text{ а}.$$

Ток в ветви *cm*

$$I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0,635 - 0,225 = -0,86 \text{ а}.$$

Ток в ветви *am*

$$I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0,225 + 1,52 = 1,745 \text{ а}.$$

Формула (1.5) метода контурных токов в ряде параграфов используется в качестве исходной формулы при рассмотрении таких важных

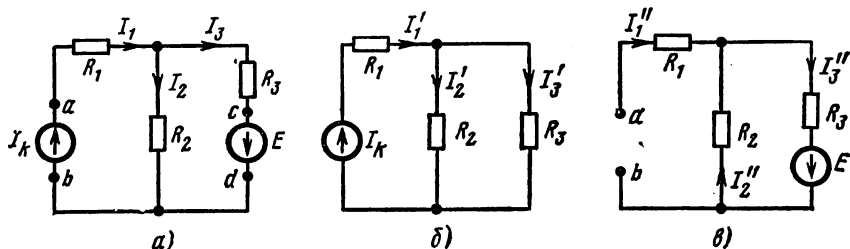


Рис. 1.14

вопросов теории линейных электрических цепей, как определение входных и взаимных проводимостей ветвей, принцип взаимности, метод наложения и линейные соотношения в электрических цепях.

Составлению уравнений по методу контурных токов для схем с источниками тока присущи некоторые особенности. В этом случае полагаем, что каждая ветвь с источником тока входит в контур, замы-

кающийся через ветви с источниками э. д. с. и сопротивлениями, и что эти токи известны и равны токам соответствующих источников тока. Уравнения составляют лишь для контуров с неизвестными контурными токами. Если для схемы рис. 1.14, а принять, что контурный ток $I_{11} = I_k$ течет согласно направлению часовой стрелки по ветвям 1 и 2, а контурный ток $I_{22} = I_3$ замыкается также по часовой стрелке по ветвям 2 и 3, то согласно методу контурных токов будет только одно уравнение с неизвестным током I_{22}

$$(R_2 + R_3) I_{22} - R_2 I_k = E.$$

Отсюда $I_{22} = \frac{E + I_k R_2}{R_2 + R_3}$ и ток второй ветви $I_2 = I_{11} - I_{22}$.

§ 1.14. ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ И МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

Чтобы составить общее выражение для тока в k -ветви сложной схемы, составим уравнения по методу контурных токов, выбрав контуры так, чтобы k -ветвь входила *только* в один k -контур (это всегда возможно).

Тогда ток в k -ветви будет равен контурному току I_{kk} по уравнению (1.5). Каждое слагаемое правой части (1.5) представляет собой ток, вызванный в k -ветви соответствующей контурной э. д. с. Например, $E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta}$ есть составляющая тока k -ветви, вызванная контурной э. д. с. E_{11} . Каждую из контурных э. д. с. можно выразить через э. д. с. ветвей $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k, \dots, E_n$, сгруппировать коэффициенты при этих э. д. с. и получить выражение следующего вида:

$$I_k = E_1 g_{k1} + E_2 g_{k2} + E_3 g_{k3} + \dots + E_k g_{kk} + \dots + E_n g_{kn}. \quad (1.7)$$

Если контуры выбраны таким образом, что какая-либо из э. д. с., например E_m , входит только в один m -контур и в другие контуры не входит, то $g_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$.

Уравнение (1.7) выражает собой принцип наложения.

Принцип наложения формулируется следующим образом: *ток в k -ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из э. д. с. схемы в отдельности. Этот принцип справедлив для всех линейных электрических цепей.*

Принцип наложения используется в методе расчета, получившем название *метода наложения*.

При расчете цепей по методу наложения поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из э. д. с., мысленно удаляя остальные из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников, и затем находят токи в ветвях путем алгебраического сложения частичных токов. Заметим, что методом наложения нельзя пользоваться для подсчета выделяемых в сопротивлениях мощностей как суммы мощностей от частичных токов, поскольку мощность является квадратичной функцией тока ($P = RI^2$).

Так, если через некоторое сопротивление R будут протекать согласно направленные частичные токи I_1 и I_2 , то выделяемая в нем мощность $P = R(I_1 + I_2)^2$, и она не равна сумме мощностей от частичных токов:

$$P \neq RI_1^2 + RI_2^2.$$

Пример 6. Для схемы рис. 1.14, *а* с помощью метода наложения найти токи в ветвях, определить мощности, доставляемые в схему источником тока и источником э. д. с., полагая $R_1 = 2$ ом; $R_2 = 4$ ом, $R_3 = 6$ ом, $I_k = 5$ а, $E = 20$ в.

Решение. Положительные направления токов в ветвях принимаем в соответствии с рис. 1.14, *а*. С помощью схемы рис. 1.14, *б* (в ней источник э. д. с. удален и зажимы *cd* закорочены) находим токи в ветвях от действия источника тока:

$$I'_1 = I_k = 5 \text{ а}; \quad I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 5 \cdot \frac{6}{4 + 6} = 3 \text{ а}; \quad I'_3 = 2 \text{ а}.$$

Используя схему рис. 1.14, *в*, подсчитываем токи в ветвях от действия источника э. д. с. (зажимы *ab* разомкнуты, так как внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности):

$$I''_1 = 0; \quad I''_2 = I''_3 = \frac{E}{R_2 + R_3} = 2 \text{ а}.$$

Результирующие токи в ветвях найдем, алгебраически суммируя соответствующие частичные токи этих двух режимов:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 5 + 0 = 5 \text{ а}; \quad I_2 = I'_2 - I''_2 = 3 - 2 = 1 \text{ а};$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 2 = 4 \text{ а}; \quad \varphi_a = \varphi_b + I_2 R_2 + I_1 R_1;$$

$$U_{ab} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 14 \text{ в}.$$

Мощность, доставляемая в схему источником тока, $U_{ab} I_k = 14 \cdot 5 = 70$ вт.

Мощность, доставляемая в схему источником э. д. с., $E I_3 = 20 \cdot 4 = 80$ вт.

Уравнение баланса мощности $I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = U_{ab} I_k + E I_3$.

§ 1.15. ВХОДНЫЕ И ВЗАИМНЫЕ ПРОВОДИМОСТИ ВЕТВЕЙ. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

На рис. 1.15, *а* изображена так называемая *скелетная схема* пассивной цепи. На ней показаны только ветви и узлы. В каждой ветви имеется сопротивление. Выделим в схеме две ветви; одну из них назовем ветвью *m*, другую — ветвью *k*. Поместим в ветвь *m* э. д. с. E_m (других э. д. с. в схеме нет). Выберем контуры в схеме так, чтобы *k*-ветвь входила только в *k*-контур, а *m*-ветвь — только в *m*-контур. Тогда э. д. с. E_m вызовет токи в ветвях *k* и *m*:

$$\left. \begin{aligned} I_k &= E_m g_{km}; \\ I_m &= E_m g_{mm}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Коэффициенты g имеют размерность проводимостей.

Коэффициент g с одинаковыми индексами (g_{mm}) называют *входной проводимостью* ветви (ветви m). Он численно равен току в ветви m , возникающему от действия э. д. с. E_m , равной 1 в (единичной э. д. с.): $I_m = 1 \cdot g_{mm}$.

Коэффициенты g с разными индексами называют *взаимными проводимостями*. Так, g_{km} есть взаимная проводимость k - и m -ветвей. Величина g_{km} численно равна току в k -ветви, возникающему от действия единичной э. д. с. в m -ветви *.

Входные и взаимные проводимости ветвей используются при выводе общих свойств линейных электрических цепей (см. § 1.16 и 1.18) и при расчете цепей по методу наложения — формула (1.7).

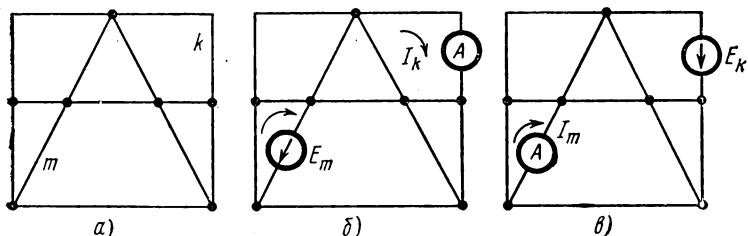


Рис. 1.15

Входные и взаимные проводимости могут быть определены расчетным и опытным путями.

При их расчетном определении составляют для схемы уравнения по методу контурных токов, следя за тем, чтобы ветви, взаимные и входные проводимости которых представляют интерес, входили бы каждая только в свой контур, а в другие контуры не входили. Далее находят определитель системы Δ и по нему необходимые алгебраические дополнения:

$$g_{mm} = \frac{\Delta_{mm}}{\Delta}; \quad (1.9)$$

$$g_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta}. \quad (1.10)$$

По формуле (1.10) g_{km} может получиться либо положительной, либо отрицательной величиной. Отрицательный знак будет означать, что э. д. с. E_m вызывает ток в k -ветви, не совпадающий по направлению с произвольно выбранным направлением контурного тока I_k по k -ветви.

* Входные и взаимные проводимости ветвей можно определить и несколько иначе:

входная проводимость какой-то m -ветви — это коэффициент пропорциональности между током этой ветви и э. д. с. той же ветви (при отсутствии э. д. с. в других ветвях схемы);

взаимная проводимость ветвей k и m есть коэффициент пропорциональности между током k -ветви и э. д. с. m -ветви при отсутствии э. д. с. в других ветвях схемы.

При опытном определении g_{mm} и g_{km} в m -ветвь схемы (рис. 1.15, б) включают э. д. с. E_m и в k -ветвь — амперметр (или миллиамперметр). Деление тока k -ветви на э. д. с. E_m и дает g_{km} . Для нахождения входной проводимости ветви m (g_{mm}) необходимо измерить ток в m -ветви, вызванный э. д. с., включенной в m -ветвь. Частное от деления тока m -ветви на э. д. с. m -ветви и дает g_{mm} .

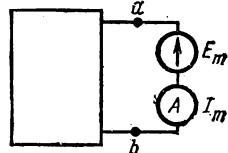


Рис. 1.16

Выделим m -ветвь, обозначив всю остальную часть схемы (не содержащую э. д. с.) некоторым прямоугольником (рис. 1.16). Вся схема, обозначенная прямоугольником, по отношению к зажимам ab обладает некоторым сопротивлением. Его называют *входным сопротивлением*. Так как в рассматриваемом примере речь идет о входном сопротивлении для m -ветви, то обозначим его $R_{вх\ m}$:

$$R_{вх\ m} = \frac{E_m}{I_m} = \frac{1}{g_{mm}}. \quad (1.11)$$

Таким образом, входное сопротивление m -ветви есть величина, обратная входной проводимости m -ветви. Его не следует смешивать с полным сопротивлением m -контура в методе контурных токов, которое не имеет с ним ничего общего.

Пример 7. Определить входную проводимость g_{11} и взаимную проводимость g_{12} в схеме рис. 1.13.

Решение. Контурные на схеме рис. 1.13 выбраны так, что ветвь 1 (ветвь cbm) с э. д. с. E_1 входит только в первый контур, а ветвь 2 (ветвь ca) с э. д. с. E_2 — во второй. Поэтому можно воспользоваться определителем системы Δ и алгебраическими дополнениями Δ_{11} и Δ_{12} , составленными по данным примера 5 к схеме рис. 1.13:

$$g_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{1+2}}{1009} = \frac{25}{1009} = 0,025 \text{ ом}^{-1} *;$$

$$g_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 17 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{1+1}}{1009} = \frac{81}{1009} = 0,081 \text{ ом}^{-1}.$$

§ 1.16. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

Теорема взаимности формулируется следующим образом: для любой линейной цепи ток в k -ветви, вызванный э. д. с. E_m , находящейся в m -ветви,

$$I_k = E_m g_{km}$$

будет равен току I_m в m -ветви, вызванному э. д. с. E_k (численно равной э. д. с. E_m), находящейся в k -ветви,

$$I_m = E_k g_{mk}.$$

* Единица проводимости ом^{-1} в СИ называется сименс (сим).

Для доказательства теоремы взаимности обратимся к рис. 1.15, а. Как и при выводах в § 1.15 выделим две ветви схемы: ветвь k и ветвь m . Включим в ветвь m э. д. с. E_m , в ветвь k — амперметр A^* для измерения тока I_k . Пусть каждая из ветвей k и m входит соответственно только в k - и m -контур. Тогда по методу контурных токов $I_k = E_m \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$. Затем поменяем местами э. д. с. и амперметр, т. е. э. д. с. переместим из ветви m в ветвь k и назовем ее теперь E_k , а амперметр — из ветви k в ветвь m . В этом случае ток $I_m = E_k \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$.

Так как $E_k = E_m$, а $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$ в силу симметрии определителя системы Δ относительно главной диагонали (см. § 1.13), то ток I_k в схеме рис. 1.15, б равняется току I_m в схеме рис. 1.15, в.

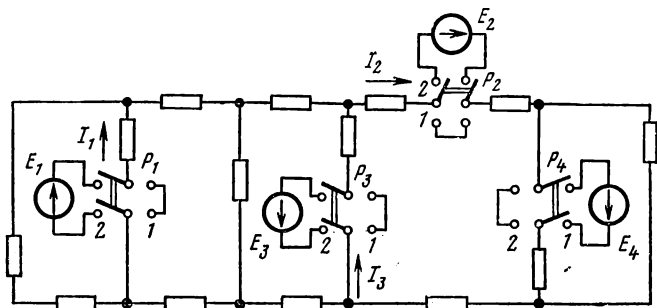


Рис. 1.17

При практическом использовании теоремы взаимности важно иметь в виду взаимное соответствие направлений токов э. д. с. в схемах рис. 1.15, б и в.

Так, если э. д. с. E_k , находящаяся в k -ветви схемы рис. 1.15, в, будет направлена согласно с контурным током I_k в схеме рис. 1.15, б, то положительное направление тока I_m в схеме рис. 1.15, в будет совпадать с направлением э. д. с. E_m в схеме рис. 1.15, б.

Для нелинейных цепей теорема (принцип) взаимности невыполнима. Цепи, для которых не выполняется принцип взаимности, называют **н е о б р а т и м ы м и**.

Пример 8. В схеме рис. 1.17 переключатели P_1 , P_2 , P_3 и P_4 могут находиться либо в первом, либо во втором положении. Если они находятся в положении 1, то в схеме включена только одна э. д. с. E_4 . Под действием E_4 протекают токи $I_1 = 1,5$ а, $I_2 = 3$ а, $I_3 = 1$ а.

Найти ток I_4 , если все переключатели будут находиться в положении 2, полагая, что $E_1 = 20$ в, $E_2 = 40$ в, $E_3 = 50$ в, $E_4 = 10$ в.

Р е ш е н и е. Для определения тока I_4 воспользуемся принципом наложения и принципом взаимности. Если бы в схеме была включена лишь одна э. д. с. E_1 , которая равнялась бы 10 в, а остальные э. д. с.

* Амперметр включаем только для наглядности; сопротивление амперметра полагаем равным нулю.

(E_2 и E_3) отсутствовали, то в ветви 4* по принципу взаимности протекал бы сверху вниз ток в $1,5 \text{ а}$. Так как э. д. с. E_1 вместо 10 в в действительности равна 20 в , то от ее действия в ветви 4 протекает ток, равный $1,5 \cdot \frac{20}{10} = 3 \text{ а}$. Аналогичным образом определим токи в ветви 4 от действия э. д. с. E_2 и от э. д. с. E_3 и произведем алгебраическое сложение частичных токов (с учетом их направления):

$$I_4 = 1,5 \cdot \frac{20}{10} + 3 \cdot \frac{40}{10} - 1 \cdot \frac{50}{10} = 10 \text{ а.}$$

§ 1.17. ТЕОРЕМА КОМПЕНСАЦИИ

В любой электрической цепи без изменения токораспределения в ней *сопротивление можно заменить э. д. с.*, численно равной падению напряжения на заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении.

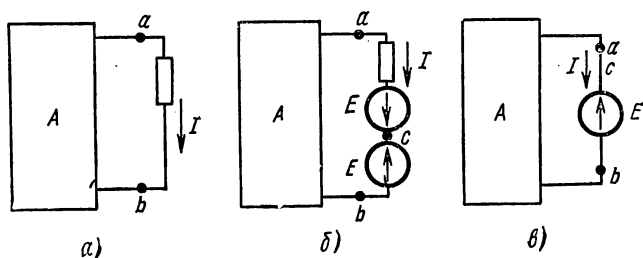


Рис. 1.18

Для доказательства теоремы компенсации выделим из схемы одну ветвь с сопротивлением R , по которой течет ток I , а всю остальную часть схемы условно обозначим прямоугольником (рис. 1.18, а).

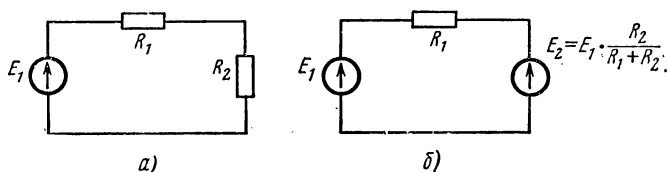


Рис. 1.19

Если в выделенную ветвь включить две одинаковых и противоположно направленных э. д. с. E , численно равных падению напряжения на сопротивлении R под действием тока I ($E = IR$; рис. 1.18, б), то ток I в цепи от этого не изменится. Убедимся, что разность потен-

* Номер ветви соответствует индексу э. д. с.

сигналов между точками a и c в схеме рис. 1.18, b при этом будет равна нулю. Действительно,

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a - IR + IR = \varphi_a.$$

Но если $\varphi_c = \varphi_a$, то точки a и c можно объединить в одну точку, т. е. замкнуть участок ac и получить схему рис. 1.18, b . В ней вместо сопротивления R включена э. д. с. E .

Пример 9. Убедиться в тождественности схем рис. 1.19, a и b .

Решение. В схеме рис. 1.19, a ток $I = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$. Для схемы рис. 1.19, b

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = \frac{E_1 - E_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} = \frac{E_1}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом, замена сопротивления R_2 на э. д. с. E_2 в схеме рис. 1.19, как это и следует из теоремы компенсации, не вызвала изменения тока в схеме.

§ 1.18. ЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Если в линейной электрической цепи изменяется э. д. с. или сопротивление в какой-либо *одной ветви*, то *две любые величины* (токи и напряжения) *двух любых ветвей* связаны друг с другом линейными зависимостями вида $y = a + bx$.

Роль x играет ток или напряжение одной ветви, роль y выполняет ток или напряжение другой ветви.

Доказательство. Согласно методу контурных токов, общее выражение для тока в k -ветви записывается в виде (1.7). Если в схеме изменяется только одна э. д. с., например э. д. с. E_m , то все слагаемые в (1.7), кроме слагаемого $E_m g_{km}$, постоянны и могут быть для сокращения записи заменены некоторым слагаемым A_k . Следовательно,

$$I_k = A_k + E_m g_{km}. \quad (1.12)$$

Аналогично для какой-то p -ветви

$$I_p = A_p + E_m g_{pm}. \quad (1.13)$$

Выразим E_m из (1.13):

$$E_m = \frac{I_p - A_p}{g_{pm}}$$

и подставим в (1.12). Получим

$$I_k = a_k + b_k I_p. \quad (1.14)$$

Здесь

$$a_k = A_k - A_p \frac{g_{km}}{g_{pm}} \quad \text{и} \quad b_k = \frac{g_{km}}{g_{pm}}.$$

Коэффициенты a_k и b_k могут быть ≥ 0 . В частном случае либо a_k , либо b_k может быть равно нулю.

Равенство (1.14) свидетельствует о том, что при изменении э. д. с. E_m токи I_k и I_p связаны линейной зависимостью. Из теоремы компенсации известно, что любое сопротивление можно заменить э. д. с.

Следовательно, изменение сопротивления в m -ветви эквивалентно изменению э. д. с. E_m . Таким образом, линейное соотношение между двумя любыми токами (1.14) имеет место при изменении не только э. д. с. E_m , но и сопротивления какой-то m -ветви.

Если обе части (1.12) умножить на сопротивление k -ветви R_k и проделать аналогичные выкладки, то можно убедиться в том, что напряжение на k -ветви линейно связано с током в p -ветви.

Коэффициенты a_k и b_k из (1.14) и в других подобных выражениях могут быть найдены либо расчетным, либо опытным путем.

При опытном определении коэффициентов достаточно найти значения двух токов (или, соответственно, напряжений) при двух различных режимах работы схемы и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть, например, в первом опыте $I_k = I_{k1}$ и $I_p = I_{p1}$, а во втором опыте $I_k = I_{k2}$ и $I_p = I_{p2}$, тогда

$$I_{k1} = a_k + b_k I_{p1} \quad \text{и} \quad I_{k2} = a_k + b_k I_{p2}.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{I_{k2} - \frac{I_{p2}}{I_{p1}} I_{k1}}{1 - \frac{I_{p2}}{I_{p1}}}; \quad b_k = \frac{I_{k1} - a_k}{I_{p1}}.$$

Если в схеме одновременно изменяются э. д. с. или сопротивления в каких-либо двух ветвях, то любые три величины в этой схеме (токи, напряжения) связаны друг с другом линейным соотношением вида $y = a + bx + cz$.

Доказательство этого соотношения проводится аналогично приведенному ранее.

Пример 10. На рис. 1.20 изображена схема, в которой выделены три ветви. В ветви 1 включен амперметр A_1 , в ветви 2 — амперметр A_2 . В ветви 3 имеется рубильник P и сопротивление R_3 . Если рубильник P разомкнут, то A_1 показывает 1 а, а A_2 — 5 а. При замкнутом рубильнике P амперметр A_1 показывает 2 а, а A_2 — 4 а. При замкнутом рубильнике P сопротивление R_3 изменили так, что показание амперметра A_2 стало 4,5 а. Каково показание амперметра A_1 в этом режиме?

Решение. Выразим I_1 через I_2 :

$$I_1 = a + b I_2.$$

Составим два уравнения для определения a и b :

$$1 = a + 5b; \quad 2 = a + 4b,$$

отсюда $a = 6$ и $b = -1$.

При $I_2 = 4,5$ а

$$I_1 = 6 - 4,5 \cdot 1 = 1,5 \text{ а.}$$

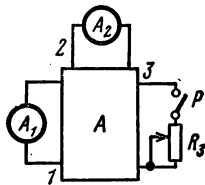


Рис. 1.20

§ 1.19. ЗАМЕНА НЕСКОЛЬКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИСТОЧНИКИ Э.Д.С. И ИСТОЧНИКИ ТОКА, ОДНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ

При расчете сложных схем существенное облегчение дает замена нескольких параллельно включенных ветвей, содержащих источники э. д. с. и источники тока и сопротивления, одной эквивалентной ветвью.

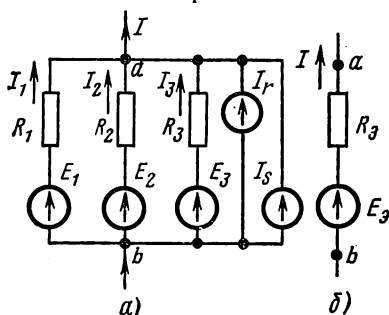


Рис. 1.21

Участок цепи рис. 1.21, б эквивалентен участку цепи, изображенному на рис. 1.21, а, если при любых значениях тока I , подтекающего из всей остальной, не показанной на рисунке части схемы, напряжение на зажимах a и b (U_{ab}) в обеих схемах будет одинаковым. Для того чтобы выяснить, чему должны равняться R_9 и E_9 , составим уравнения для обеих схем.

Для схемы рис. 1.21, а

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_r + I_s = I,$$

но

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab}) g_1;$$

$$I_2 = (E_2 - U_{ab}) g_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I_n = (E_n - U_{ab}) g_n. \quad (1.15)$$

Следовательно,

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k - U_{ab} \sum_{k=1}^n g_k. \quad (1.16)$$

Здесь через n обозначено число параллельных ветвей с источниками э. д. с. и через q — число ветвей с источниками тока. Для схемы рис. 1.21, б справедливо

$$I = E_9 g_9 - U_{ab} g_9, \quad (1.17)$$

где

$$g_9 = \frac{1}{R_9}.$$

Равенство токов I в схемах рис. 1.21, а и б должно иметь место при любых значениях U_{ab} , а это возможно только в том случае, когда коэффициент при U_{ab} в (1.16) равен коэффициенту при U_{ab} в (1.17). Следовательно,

$$g_9 = \sum_{k=1}^n g_k. \quad (1.18)$$

Но если слагаемые с U_{ab} в (1.16) и (1.17) равны и токи I по условию эквивалентности двух схем также равны, то

$$\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k = E_3 g_3;$$

отсюда

$$E_3 = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (1.19)$$

Формула (1.18) дает возможность найти проводимость g_3 и по ней R_3 в схеме рис. 1.21, б. Из формулы (1.18) видно, что проводимость g_3 не зависит от того, есть в ветвях схемы рис. 1.21, а э. д. с. или нет.

При подсчетах по формуле (1.19) следует иметь в виду следующее: если в какой-либо ветви схемы э. д. с. будет отсутствовать, то соответствующее слагаемое в числителе (1.19) выпадает, но проводимость этой ветви в знаменателе формулы (1.19) остается; если какая-либо э. д. с. в исходной схеме имеет направление, обратное изображенному на рис. 1.21, а, то соответствующее слагаемое войдет в числитель формулы (1.19) со знаком минус.

Ветви схемы рис. 1.21, а и ветвь схемы рис. 1.21, б эквивалентны только в смысле поведения их по отношению ко всей остальной части схемы, не показанной на рис. 1.21, но они не эквивалентны в отношении мощности, выделяющейся в них. Качественно поясним это. В ветвях схемы рис. 1.21, а токи могут протекать даже при $I = 0$, тогда как в ветви ab рис. 1.21, б при $I = 0$ ток и потребление энергии отсутствуют.

Пример 11. Заменить параллельные ветви рис. 1.22 одной эквивалентной. Дано: $E_1' = 10$ в; $E_1'' = 30$ в; $E_2 = 40$ в; $E_3 = 60$ в; $R_1 = 2$ ом; $R_2 = 4$ ом; $R_3 = 1$ ом; $R_4 = 5$ ом; $I_k = 6$ а.

Решение. Находим:

$$g_1 = 0,5 \text{ сим}; \quad g_2 = 0,25 \text{ сим}; \quad g_3 = 1 \text{ сим}; \quad g_4 = 0,2 \text{ сим};$$

$$R_3 = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 g_k} = \frac{1}{0,5 + 0,25 + 1 + 0,2} = 0,513 \text{ ом};$$

$$E_3 = \frac{\sum_{k=1}^4 E_k g_k - I_k}{\sum g_k} = \frac{(10 - 30) \cdot 0,5 - 40 \cdot 0,25 + 60 \cdot 1 - 6}{1,95} = 18,4 \text{ в}.$$

Таким образом, параметры эквивалентной ветви рис. 1.21, б:

$$R_3 = 0,513 \text{ ом} \quad \text{и} \quad E_3 = 18,4 \text{ в}.$$

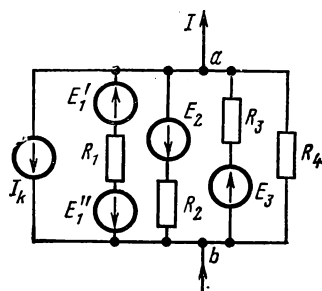


Рис. 1.22

§ 1.20. МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

Часто встречаются схемы, содержащие всего два узла; на рис. 1.23 изображена одна из таких схем. Наиболее рациональным методом расчета токов в них является метод двух узлов.

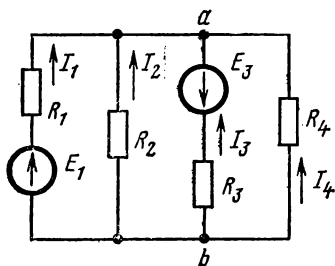


Рис. 1.23

Под *методом двух узлов* понимают метод расчета электрических цепей, в котором за искомое (с его помощью определяют затем токи ветвей) принимают напряжение между двумя узлами схемы.

Расчетные формулы этого метода получают на основе формул (1.15) и (1.16); их также можно весьма просто получить из более общего метода — метода узловых потенциалов (см. § 1.21).

В отличие от схемы рис. 1.21, a ток I к узлам a и b схемы рис. 1.23 не подтекает. Поэтому, если в формуле (1.16) принять $I = 0$, то из нее может быть найдено напряжение U_{ab} между двумя узлами:

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k + \sum I_k}{\sum g_k}. \quad (1.20)$$

После определения напряжения U_{ab} находят ток в любой (n) ветви по формуле (1.15).

Пример 12. Найти токи в схеме рис. 1.23 и сделать проверку баланса мощности, если $E_1 = 120$ в, $E_3 = 50$ в, $R_1 = 2$ ом, $R_2 = 4$ ом, $R_3 = 1$ ом и $R_4 = 10$ ом.

Решение.

$$U_{ab} = \frac{120 \cdot 0,5 - 50 \cdot 1}{0,5 + 0,25 + 1 + 0,1} = \frac{10}{1,85} = 5,4 \text{ в};$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{120 - 5,4}{2} = 57,3 \text{ а};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{R_2} = \frac{0 - 5,4}{4} = -1,35 \text{ а};$$

$$I_3 = -55,4 \text{ а}; \quad I_4 = -0,54 \text{ а}.$$

В схеме потребляется мощность

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 57,3^2 \cdot 2 + 1,35^2 \cdot 4 + 55,4^2 \cdot 1 + 0,54^2 \cdot 10 = 9647 \text{ вт}.$$

Источники э. д. с. доставляют мощность $E_1 I_1 - E_3 I_3 = 120 \cdot 57,3 + 50 \cdot 55,4 = 9647 \text{ вт}.$

§ 1.21. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Ток в любой ветви схемы можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего э. д. с. Для того чтобы можно было применить закон Ома, необходимо знать потенциалы узлов схемы. Метод расчета

электрических цепей, в котором за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы, называют *методом узловых потенциалов*.

Допустим, что в схеме n узлов. Так как любая (одна) точка схемы может быть заземлена без изменения токораспределения в схеме, то один из узлов схемы можно мысленно заземлить, т. е. принять потенциал его равным нулю. При этом число неизвестных уменьшается с n до $n - 1$.

Число неизвестных в методе узловых потенциалов равно числу уравнений, которые необходимо составить для схемы по первому закону Кирхгофа. Метод узловых потенциалов, как и метод контурных токов, — один из основных расчетных приемов. В том случае, когда число узлов без единицы меньше числа независимых контуров в схеме, данный метод является более экономичным, чем метод контурных токов.

Обратимся к схеме рис. 1.24, которая имеет довольно большое количество ветвей (11 ветвей) и сравнительно небольшое число узлов (4 узла). Если узел 4 мысленно заземлить, т. е. принять $\varphi_4 = 0$, то необходимо определить потенциалы только трех узлов: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Для единообразия

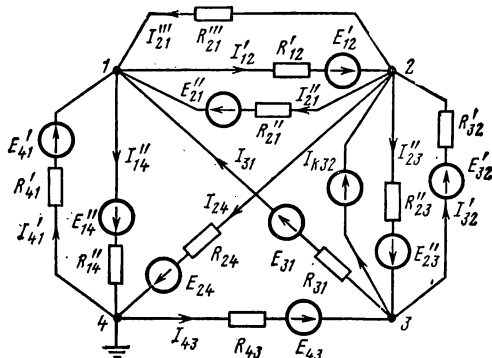


Рис. 1.24

в обозначениях условимся токи писать с двумя индексами: первый индекс будет соответствовать номеру узла, от которого ток утекает, второй индекс — номеру узла, к которому ток подтекает. Проводимости ветвей также будем снабжать двумя индексами. Необходимо заметить, что эти проводимости не имеют ничего общего с входными и взаимными проводимостями ветвей, которые рассматривались в § 1.15.

В соответствии с обозначениями токов на рис. 1.24 составим уравнение по первому закону Кирхгофа для первого узла:

$$I_{41} - I''_{14} + I'''_{31} - I'_{12} + I''_{21} + I_{31} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & [E'_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)] g'_{41} - [E''_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)] g''_{14} + \\ & + [0 - (\varphi_1 - \varphi_2)] g'''_{12} - [E'_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)] g'_{12} + \\ & + [E''_{31} - (\varphi_1 - \varphi_2)] g''_{12} + [E_{31} - (\varphi_1 - \varphi_3)] g_{13} = 0. \end{aligned}$$

Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}. \quad (1.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{11} &= g_{41} + g_{13} + g_{12}' + g_{41}'' + g_{12}' + g_{12}'''; \\ G_{12} &= -(g_{12}' + g_{12}'' + g_{12}'''); \quad G_{13} = -g_{13}; \\ I_{11} &= E_{41}g_{14} + E_{31}g_{31} + E_{21}g_{21} - E_{14}g_{14} - E_{13}g_{13}. \end{aligned}$$

Обсудим структуру уравнения (1.21). Множителем при Φ_1 в нем является коэффициент G_{11} , равный сумме проводимостей всех ветвей, сходящихся в первом узле. G_{12} равняется сумме проводимостей всех ветвей, соединяющих узел 1 с узлом 2, взятой со знаком минус. Аналогично, G_{13} есть сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узел 1 с узлом 3, взятая со знаком минус. Ток I_{11} , называемый *узловым током* первого узла, — это расчетная величина, равная алгебраической сумме токов, полученной от деления э. д. с. ветвей, подходящих к узлу 1, на сопротивления данных ветвей. В эту сумму со знаком плюс входят токи тех ветвей, э. д. с. которых направлены к узлу 1.

Подобные же уравнения могут быть записаны и для остальных узлов схемы. Если схема имеет n узлов, то ей соответствует система из $n-1$ уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \dots + \varphi_{n-1} G_{1, n-1} &= I_{11}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \dots + \varphi_{n-1} G_{2, n-1} &= I_{22}; \\ \vdots & \\ \varphi_1 G_{n-1, 1} + \varphi_2 G_{n-1, 2} + \dots + \varphi_{n-1} G_{n-1, n-1} &= I_{n-1, n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

где G_{kk} — сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле k ;

G_{km} — сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы k и m ,
взятая со знаком минус;

 I_{kk} — узловый ток k -узла.

Если к k -узлу подтекает ток от источника тока, то он должен быть включен в ток I_{kk} со знаком плюс, если утекает, то со знаком минус.

Если между какими-либо двумя узлами нет ветви, то соответствующая проводимость равна нулю. После решения системы (1.22) относительно потенциалов определяют токи в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.

Максвеллом было установлено, что распределение токов в электрической цепи всегда происходит так, что тепловая функция системы

$$P = \frac{1}{2} \sum_{N=1, 2, 3, \dots} \sum_{m=1, 2, 3, \dots} [E_{Nm} - (\Phi_N - \Phi_m)]^2 g_{Nm}$$

минимална.

Коэффициент $\frac{1}{2}$ обусловлен тем, что при двойном суммировании мощность каждой ветви учитывается дважды.

Доказательство основано на том, что совокупность уравнений (1.22) является совокупностью условий минимума функции P , т. е. совокупностью условий $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi_1} = 0$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi_2} = 0$ и т. д. Так как вторые производные $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi_1^2} = G_{11} > 0$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi_2^2} = G_{22} > 0$ и т. д. положительны, то, действительно, это есть условия минимума тепловой функции.

Пример 13. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.24 и сделать проверку по второму закону Кирхгофа. Дано: $E'_{41} = 10$ в, $E''_{14} = 6$ в,

$$\begin{aligned} E'_{12} &= 20 \text{ в}, & E''_{21} &= 30 \text{ в}, & E_{31} &= 14 \text{ в}, & E_{24} &= 10 \text{ в}, & E_{43} &= 8 \text{ в}, \\ E''_{23} &= 12 \text{ в}, & E'_{32} &= 7 \text{ в}, & R'_{41} &= 1 \text{ ом}, & R''_{14} &= 2 \text{ ом}, & R'_{13} &= 10 \text{ ом}, \\ R''_{21} &= 10 \text{ ом}, & R''_{21} &= 5 \text{ ом}, & R_{31} &= 2 \text{ ом}, & R_{24} &= 4 \text{ ом}, & R_{34} &= 2 \text{ ом}, \\ & & R''_{33} &= 4 \text{ ом}, & R'_{32} &= 2 \text{ ом}. \end{aligned}$$

Источник тока, включенный между узлами 3 и 2, дает ток $I_{k32} = 1,5$ а.

Р е ш е н и е. Записываем систему уравнений:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11};$$

$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22};$$

$$\varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33}.$$

Подсчитываем проводимости:

$$G_{11} = \frac{1}{R'_{41}} + \frac{1}{R''_{14}} + \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R''_{21}} + \frac{1}{R''_{21}} + \frac{1}{R_{31}} = 2,4 \text{ см};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R''_{21}} + \frac{1}{R''_{21}} + \frac{1}{R_{24}} + \frac{1}{R'_{32}} + \frac{1}{R''_{23}} = 1,4 \text{ см};$$

$$G_{33} = \frac{1}{R'_{31}} + \frac{1}{R''_{23}} + \frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{43}} = 1,75 \text{ см};$$

$$G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{R''_{21}} + \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R'_{21}}\right) = -0,4 \text{ см};$$

$$G_{31} = G_{13} = -\frac{1}{R_{31}} = -0,5 \text{ см};$$

$$G_{23} = G_{32} = -(0,25 + 0,5) = -0,75 \text{ см}.$$

При подсчете G_{22} , G_{33} и G_{23} учтено, что проводимость ветви с источником тока равна нулю (сопротивление источника тока равно бесконечности).

Узловые токи:

$$I_{11} = \frac{E'_{41}}{R'_{41}} - \frac{E''_{14}}{R''_{14}} + \frac{E_{31}}{R_{31}} - \frac{E'_{12}}{R'_{12}} + \frac{E''_{21}}{R''_{21}} = 15 \text{ а};$$

$$I_{22} = \frac{E'_{32}}{R'_{32}} - \frac{E''_{23}}{R''_{23}} + \frac{E'_{12}}{R'_{12}} - \frac{E''_{21}}{R''_{21}} - \frac{E_{24}}{R_{24}} + I_{k32} = -1,5 \text{ а};$$

$$I_{33} = -3,5 + 3 - 7 + 4 - 1,5 = -5 \text{ а}.$$

Система уравнений

$$2,4\varphi_1 - 0,4\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = 15;$$

$$-0,4\varphi_1 + 1,4\varphi_2 - 0,75\varphi_3 = -1,5;$$

$$-0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 = -5$$

имеет решение: $\varphi_1 = 6$ в; $\varphi_2 = 0,06$ в; $\varphi_3 = -1,07$ в.

Заключительный этап расчета состоит в подсчете токов по закону Ома. Перед определением токов в ветвях схемы следует эти токи обозначить и выбрать для них положительные направления:

$$I'_{41} = \frac{E'_{14} - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R'_{41}} = \frac{10 - (6 - 0)}{1} = 4 \text{ а}; \quad I'''_{21} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R'''_{21}} = -1,185 \text{ а};$$

$$I'_{32} = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E'_{32}}{R'_{32}} = 2,92 \text{ а}; \quad I_{43} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_{43}}{R_{43}} \cong 4,55 \text{ а и т. д.}$$

Сделаем проверку решения по второму закону Кирхгофа для периферийного контура.

Алгебраическая сумма падений напряжений

$$4 \cdot 1 - 1,185 \cdot 5 + 2,92 \cdot 2 - 4,55 \cdot 2 \approx -5 \text{ в.}$$

Алгебраическая сумма э. д. с.

$$10 - 7 - 8 = -5 \text{ в.}$$

Покажем, что основная формула (1.20) метода двух узлов получается как частный случай из формулы (1.22). Действительно, если один узел схемы рис. 1.23, например узел b , заземлить, то остается найти только один потенциал $\varphi_a = U_{ab}$. Для получения формулы (1.20) из (1.22) следует положить:

$$\varphi_1 = \varphi_a = U_{ab}; \quad \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \dots = 0; \quad I_{22} = -I_{11};$$

$$G_{21} = -G_{11}; \quad I_{33} = I_{44} = \dots = 0.$$

§ 1.22. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗВЕЗДЫ В ТРЕУГОЛЬНИК И ТРЕУГОЛЬНИКА В ЗВЕЗДУ

Соединение трех сопротивлений, имеющее вид трехлучевой звезды (рис. 1.25), называют соединением *звезда*, а соединение трех сопротивлений так, что они образуют собой стороны треугольника

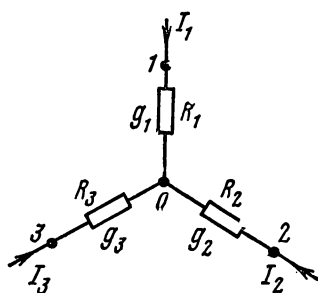


Рис. 1.25

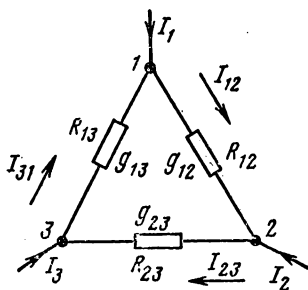


Рис. 1.26

(рис. 1.26), — соединением *треугольник*. В узлах 1, 2, 3 (потенциалы их φ_1 , φ_2 и φ_3) и треугольник, и звезда соединяются с остальной частью схемы (не показанной на рисунках).

Обозначим токи, подтекающие к узлам 1, 2, 3, через I_1 , I_2 и I_3 .

Очень часто при расчете электрических цепей оказывается полезным преобразовать треугольник в звезду или, наоборот, звезду в треугольник. Практически чаще бывает необходимо преобразовывать треугольник в звезду, чем звезду в треугольник. Если преобразование выполнить таким образом, что при одинаковых значениях потенциалов одноименных точек треугольника и звезды подтекающие к этим точкам токи будут одинаковы, то вся внешняя схема «не заметит» произведенной замены. Выведем формулы преобразований. С этой целью выразим токи I_1 , I_2 и I_3 в звезде и в треугольнике через разности потенциалов точек и соответствующие проводимости.

Для звезды

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (1.23)$$

но

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1, \quad I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) g_2, \quad I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) g_3. \quad (1.24)$$

Подставим (1.24) в (1.23) и найдем φ_0 :

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 - \varphi_0 (g_1 + g_2 + g_3) = 0;$$

откуда

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.25)$$

Далее введем φ_0 в выражение (1.24) для тока I_1 :

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) g_1 = \frac{[\varphi_1 (g_2 + g_3) - \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_3] g_1}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.26)$$

Для треугольника в соответствии с обозначениями на рис. 1.26

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2) g_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1) g_{13} = \varphi_1 (g_{12} + g_{13}) - \varphi_3 g_{13} - \varphi_2 g_{12}. \quad (1.27)$$

Так как ток I_1 в схеме рис. 1.25 должен равняться току I_1 в схеме рис. 1.26 при любых значениях потенциалов φ_1 , φ_2 , φ_3 , то коэффициент при φ_2 в правой части (1.27) должен равняться коэффициенту при φ_2 в правой части (1.26), а коэффициент при φ_3 в правой части (1.27) должен равняться коэффициенту при φ_3 в правой части (1.26). Следовательно,

$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad (1.28)$$

$$g_{13} = \frac{g_1 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.29)$$

Аналогично,

$$g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (1.30)$$

Формулы (1.28) — (1.30) дают возможность найти проводимости сторон треугольника через проводимости лучей звезды. Они имеют легко запоминающуюся структуру: индексы у проводимостей в числителе правой части соответствуют индексам у проводимости в левой части, в знаменателе — сумма проводимостей лучей звезды.

Из уравнений (1.28) — (1.30) выразим сопротивления лучей звезды

$$R_1 = \frac{1}{g_1}; \quad R_2 = \frac{1}{g_2} \quad \text{и} \quad R_3 = \frac{1}{g_3}$$

через сопротивления сторон треугольника:

$$R_{12} = \frac{1}{g_{12}}; \quad R_{23} = \frac{1}{g_{23}}; \quad R_{13} = \frac{1}{g_{13}}.$$

С этой целью запишем дроби, обратные (1.28) — (1.30):

$$R_{12} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 R_3}}{\frac{1}{R_1 R_2}} = \frac{m}{R_3}. \quad (1.31)$$

Здесь

$$m = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1; \quad (1.32)$$

$$R_{23} = \frac{m}{R_1}; \quad (1.33)$$

$$R_{13} = \frac{m}{R_2}. \quad (1.34)$$

Подставив (1.31), (1.33) и (1.34) в (1.32), получим

$$m = m^2 \left(\frac{1}{R_{23} R_{13}} + \frac{1}{R_{13} R_{12}} + \frac{1}{R_{12} R_{23}} \right) = m^2 \frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{12} R_{23} R_{31}}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{R_{12} R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Подставим m в (1.33) и найдем

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.35)$$

Аналогично,

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (1.36)$$

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}. \quad (1.37)$$

Структура формул (1.35) — (1.37) аналогична структуре формул (1.28) — (1.30).

Полезность преобразования треугольника в звезду можно пояснить, например, схемой рис. 1.27. На рис. 1.27, *а* изображена схема до преобразования, пунктиром обведен преобразуемый треугольник. На рис. 1.27, *б* представлена та же схема после преобразования. Расчет токов в ней значительно проще (например, методом двух узлов), чем расчет токов в схеме рис. 1.27, *а*.

В полезности преобразования звезды в треугольник можно убедиться на примере схемы рис. 1.28. На рис. 1.28, *а* изображена схема

до преобразования, пунктиром обведена преобразуемая в треугольник звезда. На рис. 1.28, б представлена схема после преобразования, которая свелась к последовательному и параллельному соединению сопротивлений*.

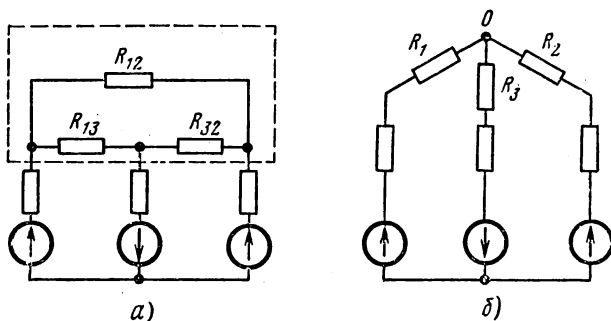


Рис. 1.27

Пример 14. Найти значения сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 в схеме рис. 1.27, б, если сопротивления R_{12} , R_{13} , R_{32} в схеме рис. 1.27, а равны соответственно 2, 3, 5 ом.

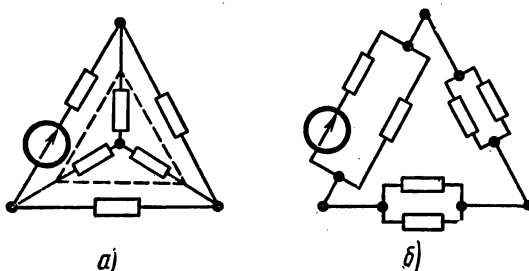


Рис. 1.28

Решение. По формуле (1.35),

$$R_1 = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3 + 5} = 0,6 \text{ ом};$$

по формуле (1.36),

$$R_2 = \frac{5 \cdot 2}{10} = 1 \text{ ом};$$

по формуле (1.37),

$$R_3 = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1,5 \text{ ом}.$$

* В § 5.31 рассмотрен еще один вид преобразований — преобразование последовательно-параллельного соединения в параллельное.

§ 1.23. АКТИВНЫЙ И ПАССИВНЫЙ ДВУХПОЛЮСНИКИ

Познакомимся с понятием двухполюсника, которым довольно широко пользуются в теории электрических цепей.

В любой электрической схеме всегда можно мысленно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть схемы независимо от ее структуры и сложности условно изобразить некоторым прямоугольником (рис. 1.29, а). (Такой прием был использован и раньше в § 1.17 без специальных объяснений.) По отношению к выделенной ветви вся схема, обозначенная прямоугольником, представляет собой так называемый двухполюсник.

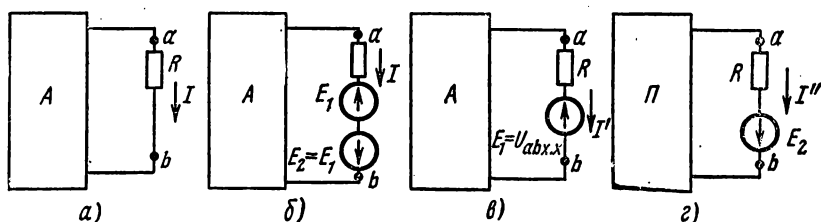


Рис. 1.29

Таким образом, **д в у х п о л ю с н и к** — это обобщенное название схемы, которая двумя выходными зажимами (полюсами) присоединена к выделенной ветви.

Если в двухполюснике есть источник э. д. с. или (и) тока, то такой двухполюсник называют *активным*. В этом случае в прямоугольнике ставят букву **А** (рис. 1.29, а, б и в).

Если в двухполюснике нет источника э. д. с. и (или) тока, то его называют *пассивным*. В этом случае в прямоугольнике либо не ставится никакой буквы, либо ставится буква **П** (рис. 1.29, г).

§ 1.24. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

По отношению к выделенной ветви двухполюсник при расчете можно заменить эквивалентным генератором, э. д. с. которого равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Пусть задана некоторая схема и требуется найти ток в одной ее ветви. Мысленно заключим всю схему, содержащую э. д. с. и сопротивления, в прямоугольник, выделив из нее одну ветвь ab , в которой требуется найти ток I (см. рис. 1.29, а); **А** в прямоугольнике свидетельствует о том, что в нем есть источники э. д. с. (или тока).

Ток I не изменится, если в ветвь ab включить две равные и противоположно направленные э. д. с. E_1 и E_2 (см. рис. 1.29, б).

На основании принципа наложения ток можно представить в виде суммы двух токов I' и I'' :

$$I = I' + I''.$$

Под током I' будем понимать ток, вызванный э. д. с. E_1 и всеми источниками э. д. с. и тока активного двухполюсника, заключенными в прямоугольник, а ток I'' вызывается только одной э. д. с. E_2 . В соответствии с этим для нахождения токов I' и I'' используем схемы рис. 1.29, *в* и *г*. В прямоугольнике Π схемы рис. 1.29, *г* отсутствуют все э. д. с., но оставлены внутренние сопротивления источников.

Э. д. с. E_1 направлена встречно напряжению U_{ab} . По закону Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.,

$$I' = \frac{U_{ab} - E_1}{R}. \quad (a)$$

Выберем E_1 так, чтобы ток I' был равен нулю. Отсутствие тока в ветви ab эквивалентно ее размыканию (холостому ходу). Напряжение на зажимах ab при холостом ходе (х. х) ветви обозначим $U_{ab \text{ х. х.}}$.

Следовательно, если выбрать E_1 равной $U_{ab \text{ х. х.}}$, то $I' = 0$. Так как $I = I' + I''$, а $I' = 0$, то $I = I''$. Но ток I'' в соответствии со схемой рис. 29, *г* определяется так:

$$I'' = \frac{E_2}{R + R_{\text{вх}}} = \frac{U_{ab \text{ х. х.}}}{R + R_{\text{вх}}}, \quad (б)$$

где $R_{\text{вх}}$ — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам ab ;

R — сопротивление ветви ab .

Уравнению (б) отвечает эквивалентная схема рис. 1.30, *а*, где вместо двухполюсника изображены источник э. д. с. $U_{ab \text{ х. х.}} = E_2$ и сопротивление $R_{\text{вх}}$ (схема Гельмгольца—Тевенена).

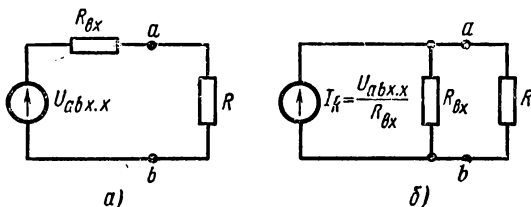


Рис. 1.30

Совокупность э. д. с. $E_2 = U_{ab \text{ х. х.}}$ и сопротивления $R_{\text{вх}}$ можно рассматривать как некоторый эквивалентный генератор ($R_{\text{вх}}$ является его внутренним сопротивлением, а $U_{ab \text{ х. х.}}$ — его э. д. с.).

Таким образом, по отношению к выделенной ветви (ветви рис. 1.29, *а*) всю остальную часть схемы можно заменить эквивалентным генератором с названными значениями параметров.

Метод расчета тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором, принято называть *методом эквивалентного генератора*, *методом активного двухполюсника* или *методом холостого хода и короткого замыкания*.

В дальнейшем чаще используется первое название.

Последовательность расчета тока этим методом рекомендуется следующая:

- а) найти напряжение на зажимах разомкнутой ветви ab ;
- б) определить входное сопротивление $R_{вх}$ всей схемы по отношению к зажимам ab при замкнутых источниках э. д. с.*;
- в) подсчитать ток по формуле

$$I = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}}{R + R_{вх}}. \quad (1.38)$$

Если сопротивление ветви ab сделать равным нулю ($R = 0$), то для нее будет иметь место режим короткого замыкания, а протекающий

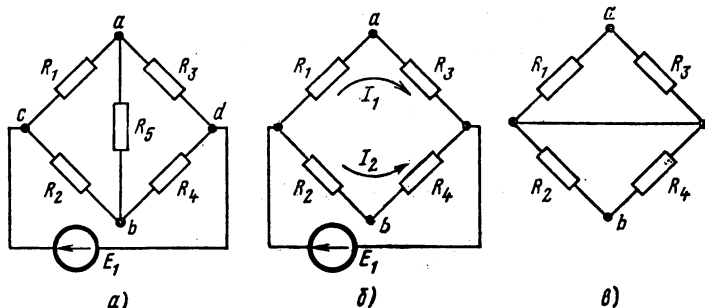


Рис. 1.31

по ней ток будет током короткого замыкания ($I_{к.з}$). Из (1.38) при $R = 0$ получим

$$I_{к.з} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}}{R_{вх}} \quad (1.39)$$

или

$$R_{вх} = \frac{U_{ab \text{ х.х.}}}{I_{к.з}}. \quad (1.40)$$

Из формулы (1.40) следует простой метод опытного определения входного сопротивления. Для этого необходимо измерить напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой ветви ($U_{ab \text{ х.х.}}$) и ток короткого замыкания ($I_{к.з}$) ветви и найти $R_{вх}$ как частное от деления $U_{ab \text{ х.х.}}$ на $I_{к.з}$.

Название метода — метод холостого хода и короткого замыкания — объясняется тем, что при решении этим методом для нахождения $U_{ab \text{ х.х.}}$ используется холостой ход ветви ab и для определения входного сопротивления двухполюсника может быть использовано короткое замыкание ветви ab .

Заменив источник э. д. с. на источник тока, получим схему эквивалентного генератора в виде рис. 1.30, б (схема Нортона).

Пример 15. Определить ток в диагонали ab мостовой схемы рис. 1.31, а, полагая $R_1 = R_4 = 1 \text{ ом}$, $R_2 = 4 \text{ ом}$, $R_3 = 2 \text{ ом}$; $R_5 = 2 \text{ ом}$; $E_1 = 10 \text{ в}$.

* Если среди источников питания схемы есть источники тока, то при определении входного сопротивления всей схемы по отношению к зажимам ab ветви с источниками тока следует считать разомкнутыми. Это станет понятным, если вспомнить, что внутреннее сопротивление источников тока равно бесконечности (см. § 1.2).

Решение. Размыкаем ветвь ab (рис. 1.31, б) и находим напряжение холостого хода:

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \varphi_b + I_2 R_2 - I_1 R_1 = \varphi_b + \frac{E_1 R_2}{R_2 + R_4} - \frac{E_1 R_1}{R_1 + R_3} = \\ &= \varphi_b + E_1 \left(\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right);\end{aligned}$$

$$U_{ab \text{ х. х}} = \varphi_a - \varphi_b = E_1 \left(\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right) = 10 \left(\frac{4}{4+1} - \frac{1}{1+2} \right) = 4,67 \text{ в.}$$

Подсчитываем входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам ab при замкнутом источнике э. д. с. (рис. 1.31, в).

Точки c и d схемы оказываются соединенными накоротко. Поэтому

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{4 \cdot 1}{4+1} = 1,47 \text{ ом.}$$

Определим ток в ветви по формуле (1.38):

$$I = \frac{U_{ab \text{ х. х}}}{R_b + R_{\text{вх}}} = \frac{4,67}{2+1,47} = 1,346 \text{ а.}$$

§ 1.25. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ОТ АКТИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА НАГРУЗКЕ

Если нагрузка R подключена к активному двухполюснику (см. рис. 1.29, а), то через нее пойдет ток $I = \frac{U_{ab \text{ х. х}}}{R + R_{\text{вх}}}$ и в ней будет выделяться мощность

$$P = I^2 R = \frac{U_{ab \text{ х. х}}^2}{(R + R_{\text{вх}})^2} R. \quad (1.41)$$

Выясним, каково должно быть соотношение между сопротивлением нагрузки R и входным сопротивлением двухполюсника $R_{\text{вх}}$, чтобы в сопротивлении нагрузки выделялась максимальная мощность; чему будет она равна и каков при этом будет к. п. д. передачи. С этой целью найдем первую производную P по R и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R + R_{\text{вх}})^2 - 2R(R + R_{\text{вх}})}{(R + R_{\text{вх}})^4} = 0.$$

Отсюда

$$R = R_{\text{вх}}. \quad (1.42)$$

Нетрудно найти вторую производную и убедиться в том, что она отрицательна $\left(\frac{d^2 P}{dR^2} < 0 \right)$, поэтому соотношение (1.42) соответствует максимуму функции $P = f(R)$.

Подставив (1.42) в (1.41), найдем максимальную мощность, которая может быть выделена в нагрузке R :

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{ab \text{ х. х}}^2}{4R_{\text{вх}}}. \quad (1.43)$$

Полезная мощность, выделяющаяся в нагрузке, определяется уравнением (1.41). Полезная мощность, выделяемая эквивалентным генератором,

$$P_{\text{полн}} = U_{ab \text{ х. х}} I = \frac{U_{ab \text{ х. х}}^2}{R_{\text{вх}} + R}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{полн}}} = \frac{R}{R + R_{\text{вх}}}. \quad (1.44)$$

Если $R = R_{\text{вх}}$, то $\eta = 0,5$.

Если мощность P значительна, то работать с таким низким к. п. д., как 0,5, совершенно недопустимо. Но если мощность P мала и составляет всего несколько милливатт (такой мощностью обладают, например, различные датчики устройств автоматики), то с низким к. п. д. можно не считаться, поскольку в этом режиме датчик отдает нагрузке максимально возможную мощность. Выбор величины сопротивления нагрузки R , равного входному сопротивлению $R_{\text{вх}}$ активного двух-полюсника, называют *согласованием нагрузки*.

Пример 16. Найти, при каком значении сопротивления схемы рис. 1.31, а в нем будет выделяться максимальная мощность и чему она будет равна.

Решение. Из условия (1.42) находим:

$$R_5 = R_{\text{вх}} = 1,47 \text{ ом};$$

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{ab \text{ х. х}}^2}{4R_{\text{вх}}} = \frac{4,67^2}{4 \cdot 1,47} = 3,71 \text{ вт}.$$

§ 1.26. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ПО ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Схема линии передачи электрической энергии изображена на рис. 1.32, где U_1 — напряжение генератора в начале линии; U_2 — напряжение на нагрузке R_2 ; R — сопротивление проводов линии; R_2 — сопротивление нагрузки в конце линии.

При передаче больших мощностей (например, нескольких десятков мегаватт) в реальных линиях передач

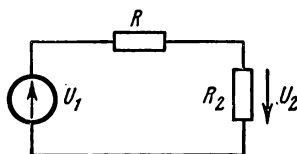


Рис. 1.32

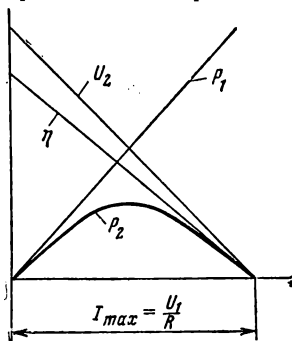


Рис. 1.33

к. п. д. составляет практически 0,94—0,97, а U_2 лишь на несколько процентов меньше U_1 .

Если по линии передачи с сопротивлением R нагрузке должна быть передана мощность P_2 , то к. п. д. передачи будет тем выше, чем больше напряжение U_1 . В этом можно убедиться путем следующих рассуждений: снижение U_1 вызовет снижение U_2 , а уменьшение U_2 при неизменном P_2 приведет к уменьшению R_2 ($R_2 = \frac{U_2^2}{P_2}$). Снижение R_2 при $R = \text{const}$ приведет к уменьшению к. п. д.:

$$\eta = \frac{R_2}{R + R_2}.$$

Характер изменения мощности в начале линии P_1 , мощности в нагрузке P_2 , к. п. д. η и напряжения на нагрузке U_2 в функции от тока по линии при неизменном напряжении на входе линии U_1 и неизменном сопротивлении проводов линии R иллюстрируется кривыми рис. 1.33. По оси абсцисс на этом рисунке отложен ток I , по оси ординат — P_1 , P_2 , U_2 , η .

Максимальное значение тока $I_{\max} = \frac{U_1}{R}$ имеет место при коротком замыкании нагрузки. Кривые построены по уравнениям:

$$P_1 = U_1 I; \quad P_2 = U_1 I - I^2 R;$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{RI}{U_1}; \quad U_2 = U_1 - RI.$$

Глава вторая

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как уже говорилось в § 1.1, под нелинейными электрическими цепями принято понимать электрические цепи, содержащие нелинейные элементы. Нелинейные элементы подразделяют на нелинейные сопротивления, нелинейные индуктивности и нелинейные емкости.

Нелинейные сопротивления (НС) в отличие от линейных обладают нелинейными вольтамперными характеристиками. Напомним, что вольтамперная характеристика (в. а. х.) — это зависимость тока, протекающего через сопротивление, от напряжения на нем. Нелинейные сопротивления могут быть подразделены на две большие группы: *неуправляемые* и *управляемые* НС. В управляемых НС в отличие от неуправляемых, кроме основной цепи, как правило, есть еще по крайней мере одна вспомогательная, или управляющая цепь, воздействуя на ток или напряжение которой можно деформировать в. а. х. основной цепи. В неуправляемых НС в. а. х. изображается одной кривой, а в управляемых — семейством кривых.

В *группу неуправляемых* НС входят лампы накаливания, электрическая дуга, бареттер, газотрон, стабилитрон, тиристоры и вентильные сопротивления, полупроводниковые выпрямители (диоды) и некоторые другие НС.

В *группу управляемых* НС входят трех- (и более) электродные лампы, полупроводниковые триоды (транзисторы), тиристоры и другие элементы.

§ 2.2. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

На рис. 2.1 изображено одиннадцать типов наиболее часто встречающихся вольтамперных характеристик неуправляемых НС.

В. а. х. типа рис. 2.1, *а* имеют, например, лампы накаливания с металлической нитью. Чем больше протекающий через нить ток, тем нить сильнее нагревается и тем больше становится ее сопротивление.

Если величину, откладываемую по оси абсцисс, обозначить через x , а величину, откладываемую по оси ординат, — через $f(x)$, то характеристика типа «а» подчиняется условию

$$f(x) = -f(-x).$$

Нелинейные сопротивления, для которых выполняется это условие, называют нелинейными сопротивлениями с *симметричной* вольтамперной характеристикой.

В. а. х. типа рис. 2.1, б обладают тиритовые и вилитовые сопротивления, некоторые типы терморезисторов и лампы накаливания с угольной нитью.

Основу тирита и вилита составляют мелкоизмельченный графит и карборунд. После соответствующей технологической обработки эту массу прессуют в виде дисков и запекают. Вилитовые и тиритовые НС используют в нелинейных мостовых схемах автоматики, применяемых, например, в качестве индикаторов отклонения напряжения генераторов от номинала. Их широко используют в защитных устройствах при передаче энергии высокого напряжения. Для данной группы характерно то, что с увеличением протекающего тока сопротивление их уменьшается. В. а. х. их симметрична.

В. а. х. типа рис. 2.1, в обладает, например, бареттер. Бареттер выполняют в виде спирали из стальной проволоки, помещенной

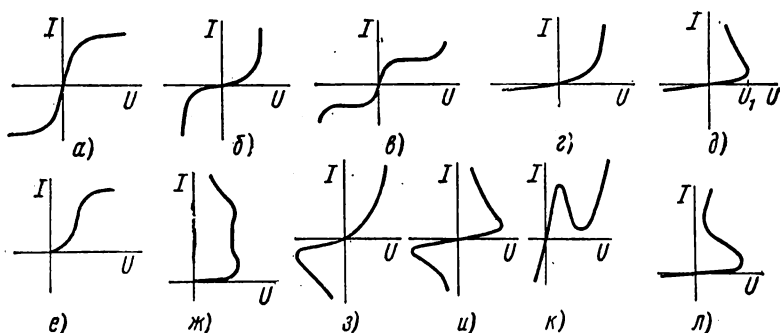


Рис. 2.1

в стеклянный сосуд, заполненный водородом при давлении порядка 80 мм рт. ст. В определенном диапазоне изменения тока в. а. х. бареттера расположена почти горизонтально. Бареттер используют для стабилизации тока накала электронных ламп при изменении напряжения питания. В. а. х. типа рис. 2.1, в также симметрична.

В. а. х. типа рис. 2.1, г в отличие от предыдущих *несимметрична*. Ею обладают полупроводниковые выпрямители (мелкозакаисные, селеновые, кремниевые, германиевые), очень широко применяемые для преобразования переменного тока в постоянный. Они способны пропускать ток практически только в одном, проводящем, направлении. Широко используют их также в различных датчиках и преобразователях устройств автоматики.

В. а. х. типа рис. 2.1, д имеют электрическая дуга с разнородными электродами, газотрон и некоторые типы терморезисторов. Если напряжение повышать, начиная с нуля, то сначала ток растет, но остается весьма малым, после достижения напряжения U_1 (напряжения зажигания) происходит резкое увеличение тока в цепи и снижение напряжения на электрической дуге или газотроне. Для верхнего участка в. а. х. приращению тока соответствует убыль напряжения на нелинейном сопротивлении.

Участок в. а. х. типа верхнего участка кривой рис. 2.1, *д* называют *падающим участком вольтамперной характеристики* *.

Электрическую дугу широко применяют при сварке металлов, в электротермии (в дуговых электропечах), а также в качестве мощного источника электрического освещения, например в прожекторах.

Газотрон представляет собой лампу с двумя электродами, заполненную благородным газом или парами ртути.

В. а. х. типа рис. 2.1, *е* имеет двухэлектродная выпрямительная лампа — кенотрон. По нити накала лампы пропускают ток. Этот ток разогревает катод (один из двух электродов лампы) до высокой температуры, в результате чего с поверхности катода начинается термоэлектронная эмиссия. Под действием электрического поля поток электронов направляется ко второму, холодному, электроду — аноду. В начальной части в. а. х. (см. рис. 2.1, *е*) зависимость тока от напряжения подчиняется закону трех вторых $i = ai^3/2$. В. а. х. кенотрона несимметрична, это объясняется тем, что поток электронов направляется с катода на анод только в том случае, если анод положителен по отношению к катоду.

В. а. х. типа рис. 2.1, *ж* обладают лампы с тлеющим разрядом. К числу их относятся стабилитроны и неоновые лампы. При тлеющем разряде благородный газ, которым заполнена лампа (неон, аргон и др.), светится. В. а. х. типа рис. 2.1, *ж* свидетельствует о том, что в определенном диапазоне значений токов напряжение на лампе остается практически неизменным.

Некоторые типы точечных германиевых и кремниевых выпрямителей имеют в. а. х. типа рис. 2.1, *з*.

Электрическая дуга между электродами, выполненными из одного и того же материала и находящимися в одинаковых условиях, имеет в. а. х. типа рис. 2.1, *и*.

В. а. х. четырехслойного германиевого (кремниевое) диода — тринистора — изображена на рис. 2.1, *л*; в. а. х. туннельного диода — на рис. 2.1, *к* (о принципах работы тринистора см. стр. 293 и туннельного диода см., например, [28]).

В качестве управляемых нелинейных сопротивлений широко применяют полупроводниковые триоды (транзисторы), тиристоры и трехэлектродные электронные лампы. Полупроводниковые триоды, их характеристики и применение рассмотрены в гл. IX; тиристоры — в § 9.43. Вольтамперные характеристики трехэлектродной лампы — в § 2.14 и 9.37.

§ 2.3. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В первой части учебника рассматривается методика расчета простейших нелинейных электрических цепей с последовательно, параллельно и последовательно-параллельно соединенными НС и источни-

* Падающий участок в. а. х. представляет собой такой ее участок, на котором *положительному* приращению тока через НС соответствует *отрицательное* приращение напряжения на НС.

ками э. д. с. Кроме того, изложена методика расчета сложных цепей, в состав которых входит только одно НС (или цепи, сводящиеся к таким) *.

Обратим внимание на то, что с линейной частью любой сложной разветвленной цепи, содержащей нелинейные сопротивления, можно осуществлять любые преобразования, рассмотренные в гл. I. Но эти преобразования целесообразны, если они облегчают расчет всей сложной схемы. Одно из таких преобразований — от треугольника сопротивлений к звезде для облегчения нахождения входного сопротивления линейной части схемы — использовано при расчете в § 2.9.

Из методов расчета в гл. I к нелинейным цепям применимы следующие:

метод двух узлов;

замена нескольких параллельно включенных ветвей одной эквивалентной;

метод холостого хода и короткого замыкания.

До проведения расчета нелинейных цепей должны быть известны вольтамперные характеристики входящих в схему нелинейных сопротивлений. Расчет нелинейных цепей постоянного тока производят, как правило, графически.

§ 2.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

На рис. 2.2, а изображена схема последовательного соединения НС с заданной в. а. х., линейного сопротивления R и источника э. д. с. E . Требуется найти ток в цепи. В. а. х. НС обозначена на рис. 2.2, б

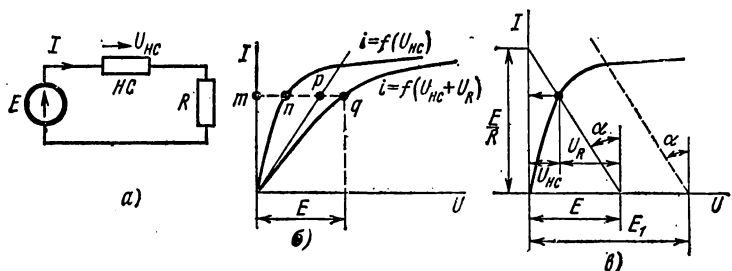


Рис. 2.2

как $I = f(U_{НС})$, в. а. х. линейного сопротивления — прямая линия. В. а. х. всей цепи, т. е. зависимость тока в цепи от суммы падений напряжений на НС и R , обозначена через $I = f(U_{НС} + U_R)$. Расчет основывается на законах Кирхгофа. Обсудим два способа расчета. Первый способ иллюстрируется рис. 2.2, б, второй — рис. 2.2, в.

При расчете цепи по первому способу строим результирующую в. а. х. всей пассивной части схемы, исходя из того, что при последо-

* С расчетами более сложных схем, которые выходят за рамки курса, можно ознакомиться в [1], стр. 156 и в журнале «Электричество», 1955, № 12.

вательном соединении через HC и R течет одинаковый ток. Для построения результирующей в. а. х. задаемся произвольным током — точкой m , проводим через нее (см. рис. 2.2, б) горизонталь и складываем отрезок mn , равный напряжению на HC , с отрезком mp , равным напряжению на R :

$$\overline{mn} + \overline{mp} = \overline{mq}^*.$$

Точка q принадлежит результирующей в. а. х. всей схемы. Аналогично строят и другие точки результирующей в. а. х. Определение тока в цепи при заданной э. д. с. E производят графически по результирующей в. а. х. (см. рис. 2.2, б). С этой целью следует заданную величину э. д. с. E отложить по оси абсцисс и через полученную точку на оси абсцисс провести вертикаль до пересечения с результирующей в. а. х. в точке q . Ордината точки q равна искомому току.

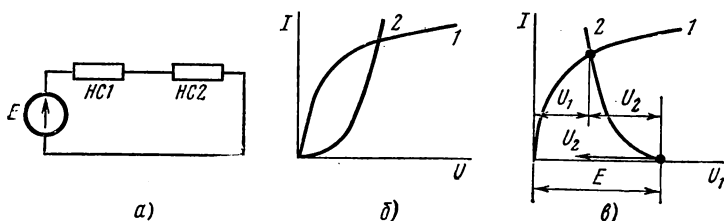


Рис. 2.3

При расчете цепи по второму способу нет необходимости строить результирующую в. а. х. всей пассивной части схемы. Учитывая, что уравнение $IR + U_{HC} = E$ в координатах I и U_{HC} представляет собой уравнение прямой, проходящей через точки $I = \frac{E}{R}$; $U = U_{HC} = 0$; $I = 0$; $U_{HC} = U = E$, проводим на рис. 2.2, в эту прямую. Тангенс угла α наклона ее к вертикали, умноженный на отношение m_U/m_I масштабов по осям, численно равен R . Точка пересечения прямой с в. а. х. HC определяет режим работы цепи. Действительно, для этой точки ток, проходящий через HC и через R , одинаков, а сумма падений напряжений $U_{HC} + U_R = E$. При изменении э. д. с. со значения E до E_1 прямую $I = f(U_R)$ надо переместить параллельно себе так, чтобы она исходила из точки $I = 0$, $U = E_1$ (пунктирная прямая на рис. 2.2, в).

Аналогично рассчитывают цепи при последовательном соединении двух и большего числа HC . В этом случае сначала находят в. а. х. двух HC , затем трех и т. д.

Обсудим применение второго способа для расчета цепи рис. 2.3, а с двумя различными HC ; в. а. х. $HC1$ и $HC2$ изображены на рис. 2.3, б. Так как $HC2$ имеет нелинейную в. а. х., то вместо прямой $I = f(U_R)$, как это было на рис. 2.2, в, теперь надо нанести нелинейную зависимость $I = f(U_2)$. Начало ее (см. рис. 2.3, в) расположено в точке

* Здесь и далее черта над отрезком означает, что речь идет о его длине.

$I = 0$, $U_1 = E$. Отсчет положительных значений U_2 производится влево от этой точки. Так как положительные значения U_{HC2} на рис. 2.3, б откладываются вправо от начала координат, а на рис. 2.3, в — влево, то кривая $I = f(U_2)$ рис. 2.3, в представляет собой зеркальное отображение кривой 2 рис. 2.3, б относительно вертикальной оси, проведенной через точку $U_1 = E$.

§ 2.5. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Схема параллельного соединения двух НС изображена на рис. 2.4, а; в. а. х. ее — на рис. 2.4, б. При построении результирующей в. а. х. исходят из того, что напряжения на $HC1$ и $HC2$ равны в силу их параллельного соединения, а ток I в неразветвленной части схемы равен сумме токов I_1 и I_2 :

$$I = I_1 + I_2.$$

Кривая 3 рис. 2.4, б представляет собой в. а. х. параллельного соединения. Строим ее следующим образом. Задаемся произвольно напряжением U , например, равным отрезку Om .

Проводим через точку m вертикаль. Складываем отрезок mn , равный току в $HC2$, с отрезком mp , равным току в $HC1$:

$$\overline{mn} + \overline{mp} = \overline{mq}.$$

Отрезок \overline{mq} равен току в неразветвленной части цепи при напряжении Om . Аналогично определяют и другие точки результирующей в. а. х. параллельного соединения.

§ 2.6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

На рис. 2.5 изображена схема последовательного соединения $HC3$ и двух параллельно соединенных $HC1$ и $HC2$. Требуется найти токи

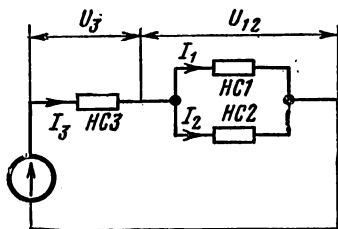


Рис. 2.5

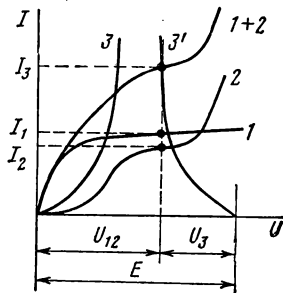


Рис. 2.6

в ветвях схемы. Заданы в. а. х. нелинейных сопротивлений (кривые 1, 2, 3, рис. 2.6) и э. д. с. E . Сначала строим в. а. х. параллельного соединения в соответствии с § 2.5 (кривая 1 + 2 на рис. 2.6). После этого цепь сводится к последовательному соединению $HC3$ и HC , имеющего в. а. х. 1 + 2.

Применяем второй способ построения, описанный в § 2.4. Кривая 3' рис. 2.6 представляет собой в. а. х. $HC3$, зеркально отраженную относительно вертикали, проведенной через точку $U = E$. В точке пересечения кривой 3' с кривой 1 + 2 удовлетворяется второй закон Кирхгофа $U_3 + U_{12} = E$. Сумма токов I_1 и I_2 равна току I_3 .

§ 2.7. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ МЕТОДОМ ДВУХ УЗЛОВ

Для схем, содержащих только два узла или приводящихся к ним, широко применяют метод двух узлов. Рассмотрим его на примере схемы рис. 2.7. В схеме три HC и три э. д. с. Пусть в. а. х. HC изображаются кривыми рис. 2.8, а, б и в. Для определенности положим, что $E_1 > E_2 > E_3$. Выберем положительные направления для токов. Пусть, например, все токи направлены к узлу a . Тогда по первому закону Кирхгофа

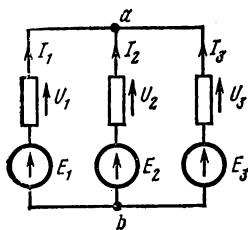


Рис. 2.7

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (2.1)$$

Каждый из токов является нелинейной функцией падения напряжения на своем HC . Так, I_1 является функцией U_1 , I_2 — функцией U_2 и I_3 — функцией U_3 .

Выразим все токи в функции не от различных переменных (U_1 , U_2 , U_3), а в функции одного переменного — напряжения U_{ab} между двумя узлами:

$$U_1 = E_1 - U_{ab}; \quad (2.2)$$

$$U_2 = E_2 - U_{ab}; \quad (2.3)$$

$$U_3 = E_3 - U_{ab}. \quad (2.4)$$

Таким образом, возникает задача о перестройке кривой $I_1 = f(U_1)$ в кривую $I_1 = f(U_{ab})$, кривой $I_2 = f(U_2)$ — в кривую $I_2 = f(U_{ab})$ и т. д. На рис. 2.9 показано, как из кривой $I_1 = f(U_1)$ (см. рис. 2.8, а) получить кривую $I_1 = f(U_{ab})$ — точки соответственно обозначены одинаковыми цифрами.

Для точки 5 кривой рис. 2.8, а $I_1 = 0$ и $U_1 = 0$; при этом $U_{ab} = E_1$ [см. формулу (2.2)], т. е. начало кривой $I_1 = f(U_{ab})$ сдвинуто в точку $U_{ab} = E_1$.

Росту U_1 при $U_1 > 0$ соответствует убыль U_{ab} . Для точки 2 при значении $U = E_1$ напряжение $U_{ab} = 0$. Росту U_1 при $U_1 < 0$ отвечает рост U_{ab} , причем $U_{ab} > E_1$.

На основании изложенного рекомендуется поступать следующим образом:

1) сместить кривую $I_1 = f(U_1)$ параллельно самой себе так, чтобы ее начало находилось в точке $U_{ab} = E_1$. Кривая, полученная в результате переноса, представлена пунктиром на рис. 2.9;

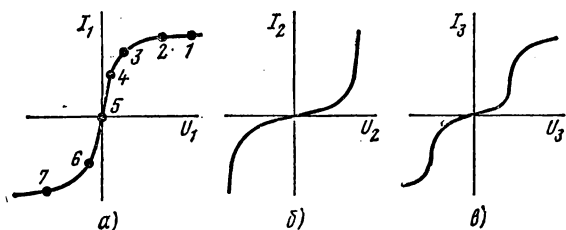


Рис. 2.8

2) провести через точку $U_{ab} = E_1$ вертикаль и зеркально отразить пунктирную кривую относительно вертикали.

Аналогичным образом производится перестройка кривых и для других ветвей схемы. Нанесем кривые $I_1 = f(U_{ab})$, $I_2 = f(U_{ab})$ и $I_3 = f(U_{ab})$ на одном рисунке (на рис. 2.10 кривые 1, 2, 3) и построим кривую $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$ (на рис. 2.10 кривая 4), про-

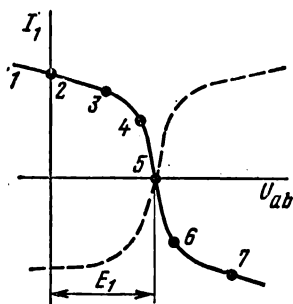


Рис. 2.9

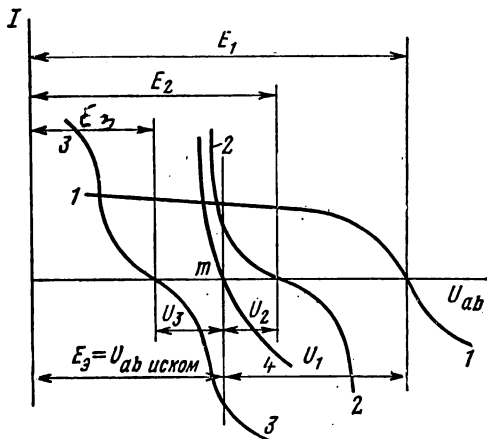


Рис. 2.10

суммировав ординаты кривых 1, 2, 3. Точка m пересечения кривой 4 с осью абсцисс дает значение U_{ab} , при котором удовлетворяется уравнение (2.1). Восставим в этой точке перпендикуляр к оси абсцисс. Ординаты точек пересечения перпендикуляра с кривыми 1, 2, 3 дадут соответственно токи I_1 , I_2 и I_3 по величине и по знаку.

§ 2.8. ЗАМЕНА НЕСКОЛЬКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ НС И Э.Д.С., ОДНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ

Положим, что имеется совокупность нескольких параллельных ветвей, содержащих НС и э. д. с. (рис. 2.11). Параллельные ветви входят в состав сложной схемы, не показанной на рис. 2.11. Какова

должна быть э. д. с. и в. а. х. эквивалентного нелинейного сопротивления *НСЭ* участка схемы рис. 2.12, чтобы он был эквивалентен параллельным ветвям рис. 2.11?

Одна ветвь рис. 2.12 будет эквивалентной ветвям рис. 2.11 в том случае, если ток I в неразветвленной части цепи рис. 2.11 при любых значениях напряжения U_{ab} будет равняться току I в ветви рис. 2.12.

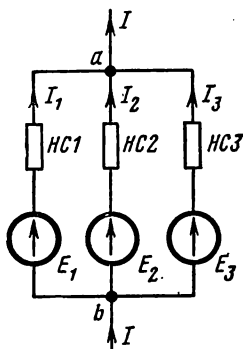


Рис. 2.11

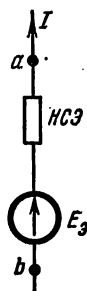


Рис. 2.12

Воспользуемся построениями на рис. 2.10. Кривая 4 рис. 2.10 представляет собой зависимость

$$I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab}),$$

т. е. является результирующей в. а. х. трех параллельных ветвей. Такую же в. а. х. должна иметь ветвь рис. 2.12. Если ток I в схеме рис. 2.12 будет равен нулю, то $U_{ab} = E_3$. Следовательно, E_3 на рис. 2.10 определяется напряжением U_{ab} , при котором кривая 4 будет пересекать ось абсцисс. Для определения в. а. х. *НСЭ* необходимо кривую 4 рис. 2.10 зеркально отобразить относительно вертикали, проведенной через точку m .

В. а. х. *НСЭ* изображена на рис. 2.13. Важно подчеркнуть, что включение э. д. с. в параллельные ветви привело к тому, что в. а. х. *НСЭ* стала несимметричной, несмотря на то что в. а. х. нелинейных сопротивлений 1, 2, 3 в схеме рис. 2.7 были взяты симметричными.

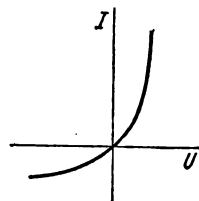


Рис. 2.13

Таким образом, изменяя э. д. с. в ветвях параллельной группы, можно изменять ее результирующую в. а. х. и как бы искусственно создавать *НС* с самыми причудливыми в. а. х.

§ 2.9. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Если в сложной электрической цепи есть одна ветвь с *НС*, то определение тока в ней можно производить по методу эквивалентного генератора. С этой целью выделим ветвь с *НС*, а всю остальную линейную схему представим в виде активного двухполюсника (рис. 2.14, а).

Как известно из § 1.24, схему линейного активного двухполюсника по отношению к зажимам a и b выделенной ветви можно представить в виде последовательного соединения источника э. д. с. с э. д. с., равной напряжению на зажимах ab при размыкании ветви ($U_{ab\text{ х.х}}$), сопротивления, равного входному сопротивлению $R_{вх}$ линейного двухполюсника, и сопротивления ветви ab (рис. 2.14, б).

Определение тока в схеме рис. 2.14, б не представляет труда и может проводиться в соответствии с § 2.4.

Пример 17. Определить ток в ветви ab схемы рис. 2.15 по методу эквивалентного генератора при $R_1 = R_0 = 2\text{ ом}$, $R_2 = 8\text{ ом}$, $R_3 = 4\text{ ом}$, $R_4 = 6\text{ ом}$; $E = 58,4\text{ в}$. В. а. х. НС изображена на рис. 2.16, а.

Решение. Размыкаем ветвь и определяем напряжение холостого хода:

$$U_{ab\text{ х.х}} = 8,35\text{ в.}$$

Для подсчета входного сопротивления $R_{вх}$ линейной части схемы относительно зажимов ab необходимо преобразовать треугольник со-

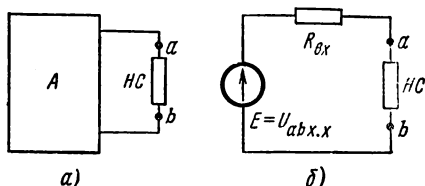


Рис. 2.14

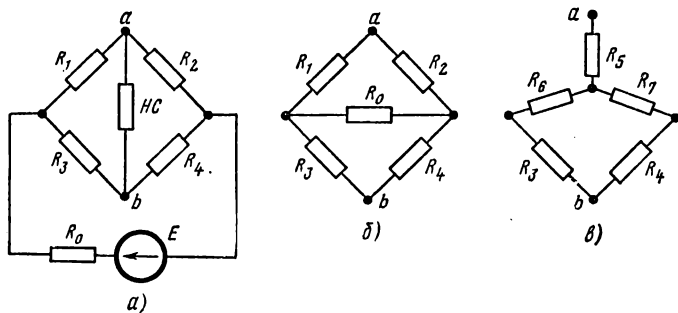


Рис. 2.15

противлений R_1 , R_2 , R_0 (или R_4 , R_0 , R_3) (рис. 2.15, б) в эквивалентную звезду (рис. 2.15, в) по формулам (1.35) — (1.37):

$$R_5 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_0} = \frac{2 \cdot 8}{2 + 8 + 2} = 1,333\text{ ом}; \quad R_6 = 0,33\text{ ом};$$

$$R_7 = 1,333\text{ ом}; \quad R_{вх} = R_5 + \frac{(R_6 + R_3)(R_7 + R_4)}{R_6 + R_3 + R_7 + R_4} = 4,05\text{ ом}.$$

Для определения тока в ветви ab схемы (рис. 2.15, а) на рис. 2.16, а из точки m ($U_{х.х} = 8,35\text{ в}$) проводим луч mn , тангенс угла наклона γ которого к вертикали (с учетом масштабов по осям абсцисс и ординат)

численно равен $R_{вх}$. Точка n пересечения луча mn с в. а. х. нелинейного сопротивления определяет рабочий режим схемы:

$$I = 0,22 \text{ а.}$$

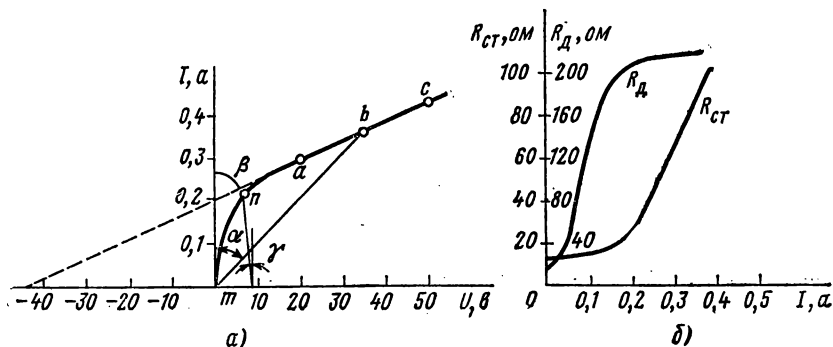


Рис. 2.16

§ 2.10. СТАТИЧЕСКОЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Свойства нелинейного сопротивления могут быть охарактеризованы либо его в. а. х., либо зависимостями его статического и дифференциального сопротивлений от тока (или напряжения).

Статическое сопротивление $R_{ст}$ характеризует поведение НС в режиме неизменного тока. Оно равно отношению напряжения на НС к протекающему по нему току:

$$R_{ст} = \frac{U}{I}. \quad (2.5)$$

$R_{ст}$ численно равно тангенсу угла α между осью ординат и прямой, идущей в точку b (рис. 2.16, а) умноженному на отношение масштабов по осям m_U/m_I .

При переходе от одной точки в. а. х. к соседней статическое сопротивление изменяется.

Под *дифференциальным сопротивлением* R_d принято понимать отношение малого (теоретически бесконечно малого) приращения напряжения dU на НС к соответствующему приращению тока dI :

$$R_d = \frac{dU}{dI}. \quad (2.6)$$

Дифференциальное сопротивление численно равно тангенсу угла β (см. рис. 2.16, а) наклона касательной к в. а. х. в рабочей точке, умноженному на m_U/m_I . Оно характеризует поведение НС при достаточно малых отклонениях от предшествующего состояния, т. е. *приращение напряжения на НС связано с приращением тока, проходящим через него, соотношением* $dU = R_d dI$.

Если в. а. х. НС имеет падающий участок, т. е. такой участок, на котором увеличению напряжения на ΔU соответствует убыль тока

на величину ΔI , что имеет место, например, для электрической дуги (см. ее в. а. х. на рис. 2.1, д), то дифференциальное сопротивление на этом участке отрицательно.

Из двух сопротивлений ($R_{ст}$ и R_d) чаще применяют R_d . Его используют, например, при замене НС эквивалентным линейным сопротивлением и э. д. с. (см. § 2.11), а также при исследовании устойчивости режимов работы нелинейных цепей (см. § И.3).

Пример 18. Построить кривые зависимости $R_{ст}$ и R_d в функции от тока I для нелинейного сопротивления, в. а. х. которого изображена на рис. 2.16, а. Кривые построены на рис. 2.16, б.

§ 2.11. ЗАМЕНА НЕЛИНЕЙНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И Э.Д.С.

Если заранее известно, что изображающая точка будет перемещаться лишь по определенному участку в. а. х. НС и этот участок может быть с известной степенью приближения заменен прямой линией, то НС при расчете может быть заменено эквивалентным линейным сопротивлением и источником э. д. с.

Положим, что рабочая точка будет перемещаться лишь по участку ab рис. 2.16, а (см. также рис. 2.17). Для этого участка

$$U = U_0 + I \operatorname{tg} \beta = U_0 + IR_d. \quad (2.7)$$

Уравнению (2.7) удовлетворяет участок цепи рис. 2.18. На нем $E = -U_0$ и линейное сопротивление $R = R_d$.

Замена НС на линейное сопротивление и э. д. с. удобна тем, что после такой замены вся схема становится линейной и ее работа может быть исследована методами, разработанными для линейных цепей. Однако при этом необходимо внимательно следить за тем, чтобы рабочая точка не выходила за пределы линейного участка в. а. х.

Пример 19. Выразить аналитически участок в. а. х. рис. 2.16, а в интервале между точками a и c .

Решение. Из рис. 2.16, а находим $U_0 = -45$ в и $R_d = \operatorname{tg} \beta = 220$ ом. Следовательно, $U \approx -45 + 220 I$.

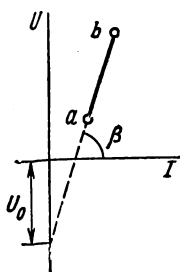


Рис. 2.17

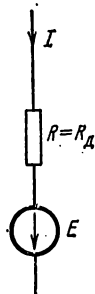


Рис. 2.18

* *
*

Нелинейные сопротивления в ряде случаев придают электрическим цепям свойства, принципиально недостижимые в линейных цепях, например, стабилизация тока, стабилизация напряжения, усиление постоянного тока и др.

§ 2.12. СТАБИЛИЗАТОР ТОКА

Стабилизатором тока называют устройство, которое способно поддерживать в нагрузке неизменный ток при изменении сопротивления нагрузки и при изменении напряжения на входе всей схемы.

Стабилизацию постоянного тока можно производить с помощью различных схем. Простейшей схемой стабилизатора тока является схема рис. 2.19. В ней последовательно с нагрузкой R_n включено НС типа бареттера Б. На рис. 2.20 приведена в. а. х. бареттера 0,3Б17—35. Первая цифра означает величину тока в амперах, который бареттер способен поддерживать постоянным, цифры 17—35 показывают область изменения напряжения на бареттере в вольтах на участке бареттирования (поддержания постоянства тока).

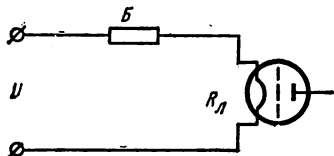


Рис. 2.19

Пример 20. Бареттер 0,3Б17—35 используется для стабилизации тока накала электронной лампы. Номинальный ток накала 0,3 а, напряжение 6 в. Требуется найти, в каких пределах можно изменять напряжение U на входе схемы, чтобы ток нити накала лампы оставался неизменным и равным 0,3 а.

Решение. Находим сопротивление нити накала лампы:

$$R_n = \frac{6}{0,3} = 20 \text{ ом.}$$

Проводим через точки a и b (см. рис. 2.20), ограничивающие участок бареттирования, две прямые под углом α ($\text{tg } \alpha$ с учетом масштабов по осям численно равен 20) к вертикали. По рис. 2.20 определяем, что напряжение U можно изменять в интервале $23 \div 41$ в.

Пример 21. В схему предыдущей задачи введено последовательное сопротивление R_1 . Полагая напряжение на входе схемы неизменным и равным 41 в, найти, до какого максимального значения R_1 в схеме будет иметь место стабилизация тока.

Решение. Если $R_1 = 0$ и $U = 41$ в, то рабочий режим характеризуется положением точки b (см. рис. 2.20). С увеличением сопротивления R_1 рабочая точка на в. а. х. перемещается по направлению к точке a . В граничном режиме в точке a

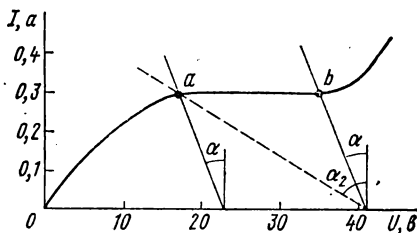


Рис. 2.20

$$R_{1\text{ max}} + R_n = \text{tg } \alpha_2 \frac{m_U}{m_I} = 80 \text{ ом.}$$

Следовательно, $R_{1\text{ max}} = 80 - 20 = 60 \text{ ом.}$

§ 2.13. СТАБИЛИЗАТОР НАПЯЖЕНИЯ

Стабилизатором напряжения называют устройство, напряжение на выходе которого U_n поддерживается постоянным или почти постоянным при изменении сопротивления нагрузки R_n или величины напряжения U_1 на входе устройства.

Схема простейшего стабилизатора напряжения показана на рис. 2.21. В качестве НС используется стабилитрон; R_6 — балластное сопротивление. На рис. 2.22 изображена в. а. х. стабилитрона 150С5-30.

При анализе работы стабилизатора определяют пределы допустимых изменений U_1 при $R_n = \text{const}$, а также исследуют работу стабилизатора при одновременном изменении U_1 и R_n .

Для оценки качества работы стабилизатора иногда пользуются понятием коэффициента стабилизации. Под ним понимают отношение относительного приращения напряжения на входе стабилизатора ($\Delta U_1/U_1$) к относительному приращению напряжения на выходе стабилизатора ($\Delta U_n/U_n$).

Пример 22. В схеме рис. 2.21 $R_n = 5 \text{ ком}$, $R_6 = 2 \text{ ком}$. Характеристика стабилитрона соответствует рис. 2.22. Определить границы допустимого изменения U_1 , чтобы стабилизатор давал на выходе стабилизированное напряжение 150 в.

Решение. Воспользуемся методом эквивалентного генератора.

Разомкнем ветвь стабилитрона и найдем напряжение холостого хода:

$$U_{ab \text{ х. х.}} = U_1 \frac{R_n}{R_n + R_6} = 0,713 U_1.$$

Определим входное сопротивление линейной части схемы (см. рис. 2.21) по отношению к зажимам ab :

$$R_{вх} = \frac{R_n \cdot R_6}{R_n + R_6} = 1427 \text{ ом.}$$

На рис. 2.22 проведем две прямые (сплошные) линии через точки m и n в в. а. х. ста-

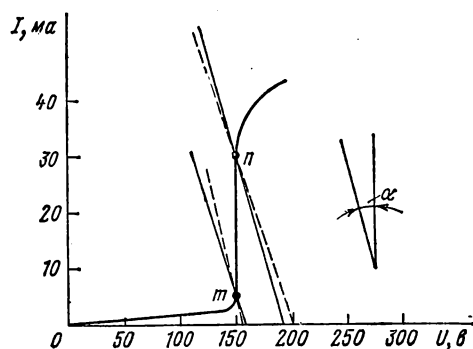


Рис. 2.22

билитрона так, чтобы тангенс угла (образованного ими с вертикалью), умноженный на m_U/m_I , равнялся $R_{вх} = 1427 \text{ ом}$.

Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси абсцисс, равны $U_{х. х.}$. Из рисунка находим $0,713 U_{1\text{min}} = 157 \text{ в}$, или $U_{1\text{min}} = 220 \text{ в}$. Аналогично, $0,713 U_{1\text{max}} = 192 \text{ в}$, или $U_{1\text{max}} = 269 \text{ в}$. Следовательно, напряжение U_1 может изменяться от 220 до 269 в.

Пример 23. Для схемы рис. 2.21 при $R_6 = 2 \text{ ком}$, характеристике стабилитрона по рис. 2.22 и $U_1 = 250 \text{ в}$ определить, в каких пре-

делах можно изменять сопротивление нагрузки R_n , чтобы стабилизатор мог выполнять свои функции по стабилизации выходного напряжения.

Решение. Воспользовавшись методом эквивалентного генератора, определим

$$U_{x,x} = U_1 \frac{R_n}{R_n + R_6} = 250 \frac{R_n}{R_n + 2000}.$$

Находим

$$R_{вх} = \operatorname{tg} \alpha \frac{m_U}{m_I} = \frac{R_n R_6}{R_n + R_6} = \frac{2000 R_n}{2000 + R_n}.$$

Задача сводится к определению значений R_n , при которых прямые, характеризующие $R_{вх}$, будут проходить через точки m и n в а. х. стабиловольта. В данном примере неизвестны ни тангенсы углов α , ни исходные точки на оси абсцисс, из которых должны быть проведены прямые, поэтому решаем задачу путем пробных построений. С этой целью задаемся значениями R_n , подсчитываем соответствующие им $U_{x,x}$ и $R_{вх}$:

R_n , ком	3	4	5	6	7	8
$U_{x,x}$, в	150	167	178	187	194	200
$R_{вх}$, ом	1200	1330	1425	1500	1555	1600

По данным таблицы проводим несколько лучей. Графически находим, что прямые (см. пунктирные прямые на рис. 2.22) пройдут через точки m и n соответственно при $R_{n \min} = 3,3$ ком и $R_{n \max} = 8$ ком.

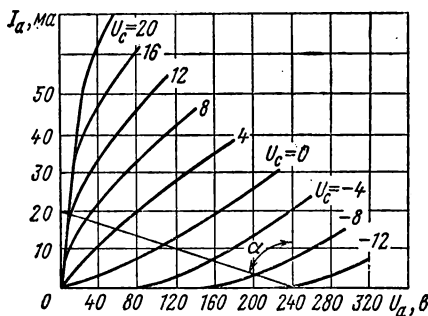


Рис. 2.23

2.23 изображены анодные (по существу вольтамперные) характеристики трехэлектродной лампы 6С2С. Под ними понимают зависимость анодного тока лампы I_a от анодного напряжения U_a при сеточном напряжении U_c в качестве параметра.

Схема усилителя постоянного напряжения изображена на рис. 2.24.

§ 2.14. УСИЛИТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО НАПЯЖЕНИЯ

Усилителем постоянного напряжения называют устройство, величина приращения напряжения на выходе которого больше величины приращения напряжения на входе. Усилители постоянного напряжения часто выполняют на управляемых НС — трехэлектродных лампах или полупроводниковых триодах (транзисторах). На рис.

Входное (усиливаемое) напряжение подается на сетку лампы. На выходе усилителя (зажимы a и b) включена нагрузка R_H .

Сетка триода расположена ближе к катоду, чем анод. Влияние поля сетки на поток электронов с катода на анод значительно больше влияния поля анода. Поэтому сравнительно незначительные изменения напряжения на сетке приводят к резкому изменению анодного тока и напряжения на выходе усилителя. Для анодной цепи $E = U_a + I_a R_H$. Зависимость напряжения выхода ($I_a R_H = E - U_a$) от напряжения входа (U_c) строится с помощью семейства кривых рис. 2.23.

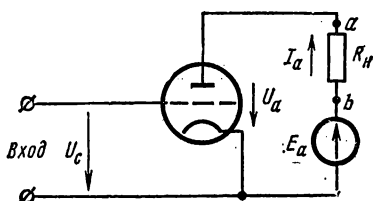


Рис. 2.24

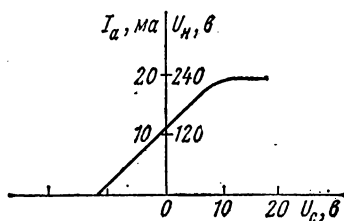


Рис. 2.25

Пример 24. Построить зависимость $U_{\text{вых}} = f(U_c)$ для схемы рис. 2.24, если $R_H = 12 \text{ ком}$ и $E = 240 \text{ в}$. Триод 6С2С.

Решение. Из точки $I_a = 0$, $U_a = E$ под углом α к вертикали ($\text{tg } \alpha = m_U/m_I = 12\,000$) проводим прямую. Точки пересечения ее с анодными характеристиками дают соответствующие значения I_a и U_c . Зависимость $U_{\text{вых}} = f(U_c)$ отличается от зависимости $I_a = f(U_c)$ (рис. 2.25) только масштабом ($U_H = I_a R_H$, $R_H = \text{const}$).

Глава третья

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

§ 3.1. ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВ НА ДВЕ ГРУППЫ — ФЕРРОМАГНИТНЫЕ И НЕФЕРРОМАГНИТНЫЕ

Из курса физики известно, что все вещества по магнитным свойствам подразделяют на три группы: диамагнитные, парамагнитные и ферромагнитные. У диамагнитных веществ относительная магнитная проницаемость μ немного меньше единицы, например у висмута она равна 0,99983. У парамагнитных веществ μ немного больше единицы, например у платины равно 1,00036. У ферромагнитных веществ (железо, никель, кобальт и их сплавы, ферриты и др.) μ много больше единицы (до 10^4 , а у некоторых материалов даже до 10^6).

При решении большинства электротехнических задач практически достаточно подразделять все вещества не на диа-, пара- и ферромагнитные, а на ферромагнитные и неферромагнитные. У ферромагнитных веществ μ много больше единицы, у всех неферромагнитных μ практически равно единице.

§ 3.2. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основными величинами, характеризующими магнитное поле, являются магнитная индукция \vec{B} и намагниченность \vec{J} *.

Магнитная индукция \vec{B} — это векторная величина, определяемая по силовому воздействию магнитного поля на ток (см. § 4.11).

Намагниченность \vec{J} — магнитный момент единицы объема вещества.

Кроме этих двух величин, магнитное поле характеризуется *напряженностью магнитного поля \vec{H}* .

При величины \vec{B} , \vec{J} , \vec{H} связаны друг с другом следующей зависимостью **:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (3.1)$$

В СИ индукция B измеряется в теслах (тл):

$$1 \text{ тл} = 1 \text{ вб} \cdot \text{сек} / \text{м}^2 = 1 \text{ вб} / \text{м}^2$$

или в кратных ей единицах $\text{вб} / \text{см}^2$, а в системе СГСМ — в гауссах ($1 \text{ гс} = 10^{-8} \text{ вб} / \text{см}^2$).

Намагниченность J и напряженность поля H в СИ измеряют в амперах на метр (а/м), а в системе СГСМ — в эрстедах (э).

* Стрелка над буквой свидетельствует о том, что речь идет о векторе в пространстве

** Пояснения к формуле (3.1) см. в § 3.24.

На практике индукцию B часто измеряют в единицах системы СГСМ $гс$, а напряженность поля H — в $а/см$ (см. также сноску на стр. 68).

Намагниченность \vec{J} представляет собой вектор, направление которого совпадает с направлением \vec{H} в данной точке:

$$\vec{J} = \kappa \vec{H}. \quad (3.2)$$

Коэффициент κ для ферромагнитных веществ является функцией H . Подставив (3.2) в (3.1) и обозначив $1 + \kappa = \mu$, получим

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (3.3)$$

где μ_0 — постоянная, характеризующая магнитные свойства вакуума; μ — относительная магнитная проницаемость.

В СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м}$; в СГСМ $\mu_0 = 1$. Для ферромагнитных веществ μ является функцией H .

Магнитный поток Φ есть поток вектора магнитной индукции через площадь S :

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}, \quad (3.4)$$

где dS — элемент поверхности S .

В СИ магнитный поток измеряют в $в \cdot сек$ или веберах ($вб$); в СГСМ — в максвеллах ($мкс$) или кратных единицах — киломаксвеллах ($кмкс$): $1 \text{ мкс} = 10^{-8} \text{ вб}$; $1 \text{ кмкс} = 10^3 \text{ мкс}$.

При расчетах магнитных цепей обычно используют две величины — магнитную индукцию B и напряженность магнитного поля H .

Намагниченность J в расчетах, как правило, не используют [но при необходимости значение J , отвечающее соответствующим значениям B и H , всегда можно найти по формуле (3.1)].

§ 3.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА

Известно, что ферромагнитные тела состоят из областей самопроизвольного (спонтанного) намагничивания. Магнитное состояние каждой области характеризуется вектором намагниченности. Направление вектора намагниченности зависит от внутренних упругих напряжений и от кристаллической структуры ферромагнитного тела.

Векторы намагниченности отдельных областей ненамагниченного тела направлены в различные стороны. Поэтому во внешнем по отношению к ферромагнитной среде пространстве намагниченность ферромагнитного тела, если оно не помещено во внешнее магнитное поле, ни в чем не проявляется. Если же ферромагнитное тело поместить во внешнее магнитное поле, то под его действием векторы намагниченности отдельных областей будут поворачиваться по внешнему полю. В результате этого индукция результирующего магнитного поля оказывается во много раз (сотни и даже сотни тысяч раз) больше, чем магнитная индукция внешнего поля до помещения в него ферромагнитного тела.

§ 3.4. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H . Различают два основных типа этих зависимостей: кривые намагничивания и гистерезисные петли.

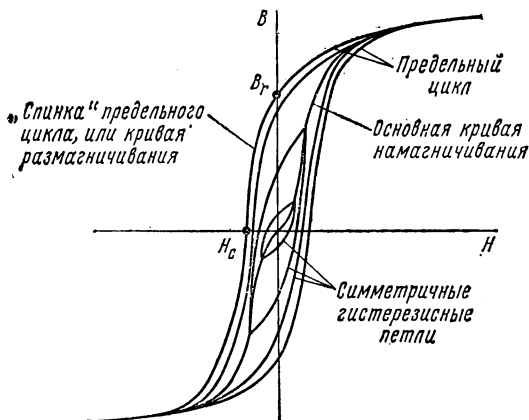


Рис. 3.1

обусловлен, грубо говоря, внутренним трением областей самопроизвольного намагничивания. При периодическом изменении напряженности поля зависимость между B и H приобретает петлевой характер.

Различают несколько типов гистерезисных петель — симметричную, предельную и несимметричную (частный цикл).

На рис. 3.1 изображено семейство симметричных гистерезисных петель. Для каждой симметричной петли максимальное положительное значение B равно максимальному отрицательному значению B и соответственно H_{\max} равно $|-H_{\max}|$.

Геометрическое место вершин симметричных гистерезисных петель принято называть *основной кривой намагничивания*. При очень больших H вблизи $\pm H_{\max}$ восходящая и нисходящая части гистерезисной петли практически сливаются.

Предельной гистерезисной петлей, или *предельным циклом*, называют симметричную гистерезисную петлю, снятую при очень больших H_{\max} .

Индукцию при $H = 0$ называют *остаточной индукцией* и обозначают B_r .

Под кривыми намагничивания понимают однозначную зависимость между B и H . Кривые намагничивания подразделяют на начальную, основную и безгистерезисную (что будет пояснено далее).

Из курса физики известно, что ферромагнитным материалам присуще явление *гистерезиса* — отставание изменения магнитной индукции B от изменения напряженности магнитного поля H . Гистерезис

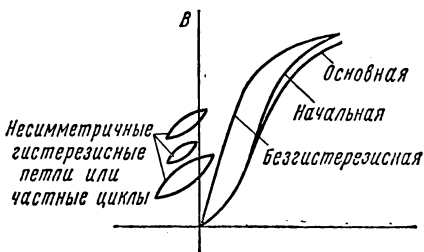


Рис. 3.2

Напряженность поля при $B = 0$ называют задерживающей, или *коэрцитивной, силой* и обозначают H_c .

Участок предельного цикла B, H_c (см. рис. 3.1) принято называть *кривой размагничивания*, или «*спинкой*» *гистерезисной петли*.

Этот участок используют при расчетах магнитных цепей с постоянными магнитами и магнитных элементов запоминающих устройств счетно-решающей техники.

Если изменять H периодически и так, что значение $+H_{\max}$ не будет равно значению $|-H_{\max}|$, то зависимость между B и H будет петлевого характера, но центр петли не совпадает с началом координат (рис. 3.2). Такие гистерезисные петли принято называть *частными петлями гистерезиса*, или *частными циклами*.

Когда предварительно размагниченный ферромагнитный материал ($B = 0, H = 0$) намагничивают, монотонно увеличивая H , получаемую зависимость между B и H называют *начальной кривой намагничивания*.

Начальная и основная кривые намагничивания настолько близко расположены друг к другу, что практически во многих случаях их можно считать совпадающими (см. рис. 3.2).

Безгистерезисной кривой намагничивания называют зависимость между B и H , возникающую, когда при намагничивании ферромагнитного материала его периодически постукивают или воздействуют на него полем, имеющим, кроме постоянной составляющей, еще и затухающую по амплитуде синусоидальную составляющую. При этом гистерезис как бы снимается.

Безгистерезисная кривая намагничивания весьма резко отличается от основной кривой (см. рис. 3.2).

В различных справочниках, а также в ГОСТ 802—58 в качестве однозначной зависимости между B и H дается основная кривая намагничивания.

§ 3.5. МАГНИТНОМЯГКИЕ И МАГНИТНОТВЕРДЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Все ферромагнитные материалы можно подразделить на магнитномягкие и магнитнотвердые.

Магнитномягкие материалы обладают круто поднимающейся основной кривой намагничивания и относительно малыми площадями гистерезисных петель. Их применяют во всех устройствах, которые работают или могут работать при периодически изменяющемся магнитном потоке (трансформаторах, электрических двигателях и генераторах, индуктивных катушках и т. п.).

Некоторые магнитномягкие материалы, например перминвар, сплавы 68НМП и др., обладают петлей гистерезиса по форме, близкой к *прямоугольной* (рис. 3.3). Такие материалы получили распространение в счетно-решающих устройствах и в устройствах автоматики.

В группу магнитномягких материалов входят электротехнические стали, железоникелевые сплавы типа пермаллоя и др.

Магнитнотвердые материалы обладают полого поднимающейся основной кривой намагничивания и большой площадью гистерезисной петли.

В группу магнитотвердых материалов входят углеродистые стали, вольфрамовые сплавы, сплавы магнито, платинокобальтовые сплавы и др. Из магнитотвердых материалов выполняют постоянные магниты.

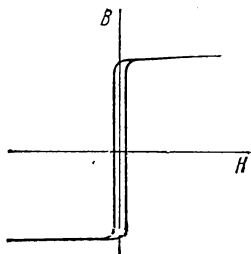


Рис. 3.3

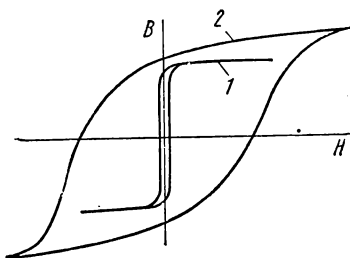


Рис. 3.4

На рис. 3.4 качественно сопоставлены гистерезисные петли для магнитомягкого материала типа пермаллоя (кривая 1) и для магнитотвердого материала (кривая 2).

§ 3.6. МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКИ И ФЕРРИТЫ

В радиотехнике, где используют колебания высокой частоты, сердечники катушек индуктивности изготовляют из магнитодиэлектриков или из ферритов.

Магнитодиэлектрики — это материалы, полученные путем смешения мелкоизмельченного порошка магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Эту смесь формуют и запекают. Каждую ферромагнитную крупинку обволакивает пленка из диэлектрика. Благодаря наличию таких пленок сердечники из магнитодиэлектриков не насыщаются; μ их находится в интервале от нескольких единиц до нескольких десятков.

Ферриты — это материалы, которые изготовляют из окислов меди или цинка и окислов железа или никеля. Смесь формуют и обжигают, в результате чего получают твердый раствор, например $Zn \cdot Fe_2O_3$. По своим электрическим свойствам ферриты являются полупроводниками. Объемное сопротивление их находится в пределах от 1 до $10^7 \text{ ом} \cdot \text{м}$, тогда как для железа $\rho \approx 10^{-6} \text{ ом} \cdot \text{м}$.

Магнитные свойства ферритов можно получить самые различные. В отличие от магнитодиэлектриков ферриты могут насыщаться. Коэрцитивная сила ферритов составляет примерно 10 а/м . Маркируют их двумя буквами и цифрой. Например, феррит НЦ-1000 означает никель-цинковый феррит, у которого μ на начальном участке кривой намагничивания равна 1000.

§ 3.7. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Магнитное поле создается электрическими токами. Количественная связь между линейным интегралом от вектора напряженности магнитного поля \vec{H} вдоль любого произвольного контура и алгебраическим суммарным током, протекающим через этот контур, выражается законом полного тока.

ческой суммой токов $\sum I$, охваченных этим контуром, определяется законом полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (3.5)$$

Положительное направление интегрирования $d\vec{l}$ связано с положительным направлением тока I правилом правого винта.

Закон полного тока является опытным законом. Его можно экспериментально проверить путем измерения $\oint \vec{H} d\vec{l}$ с помощью специального устройства (известного из курса физики), называемого магнитным поясом.

§ 3.8. МАГНИТОДВИЖУЩАЯ (НАМАГНИЧИВАЮЩАЯ) СИЛА

Магнитодвижущей силой (м. д. с.) или намагничивающей силой (н. с.) катушки или обмотки с током называют произведение числа витков катушки w на протекающий по ней ток I .

М. д. с. Iw вызывает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как э. д. с. вызывает электрический ток в электрической цепи. Как и э. д. с., м. д. с. есть величина направленная (положительное направление на схеме обозначают стрелкой).

Положительное направление м. д. с. совпадает с движением острия правого винта, если его вращать по направлению тока в обмотке.

Для определения положительного направления м. д. с. часто пользуются следующим *мнемоническим правилом*: если сердечник мысленно охватить правой рукой, расположив ее пальцы по току в обмотке, а затем отогнуть большой палец, то последний укажет направление м. д. с.

На рис. 3.5 даны несколько эскизов с различным направлением намотки катушек на сердечник и различным направлением м. д. с.

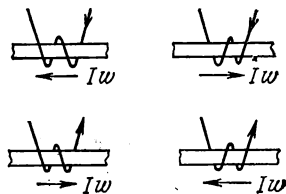


Рис. 3.5

§ 3.9. РАЗНОВИДНОСТИ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Магнитной цепью называют совокупность м. д. с., ферромагнитных тел или каких-либо иных тел или сред, по которым замыкается магнитный поток.

Магнитные цепи могут быть подразделены на неразветвленные и разветвленные. Примером неразветвленной цепи может служить цепь, показанная на рис. 3.6. Разветвленные цепи делятся на симметричные и несимметричные. Магнитная цепь рис. 3.7 симметрична: в ней поток Φ_1 будет равняться потоку Φ_2 , если обе части ее, расположенные слева и справа от вертикальной пунктирной линии, будут одинаковы в геометрическом отношении, изготовлены из одного и того же материала и если $I_1 w_1 = I_2 w_2$.

Достаточно сделать $I_1 w_1 \neq I_2 w_2$, или изменить направление тока в одной из обмоток, или сделать воздушный зазор в одном из крайних

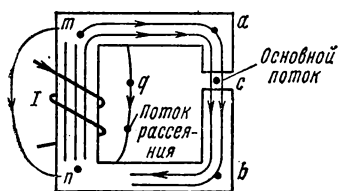


Рис. 3.6

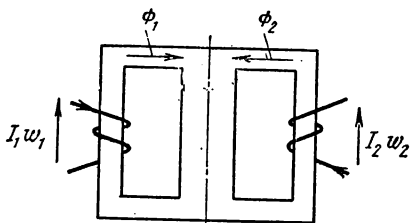


Рис. 3.7

стержней магнитопровода, чтобы магнитная цепь рис. 3.7 стала несимметричной. В несимметричной цепи рис. 3.7 поток Φ_1 , как правило, не равен Φ_2 .

§ 3.10. РОЛЬ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ В МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

Электрические машины, трансформаторы и другие аппараты конструируют так, чтобы магнитный поток в них был по возможности наибольшим. Если в магнитную цепь входит ферромагнитный материал, то поток в магнитной цепи при одной и той же м. д. с. и одинаковой геометрии цепи оказывается во много раз больше, чем в случае отсутствия ферромагнитного материала.

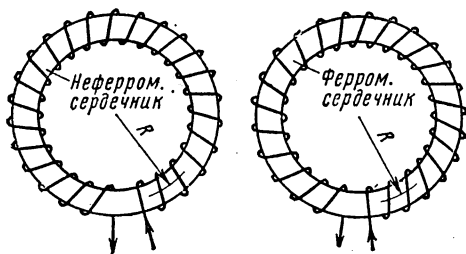


Рис. 3.8

Пример 25. Возьмем два одинаковых в геометрическом отношении кольцевых сердечника (рис. 3.8). Пусть радиус средней магнитной ли-

нии их $R = 10 \text{ см}$ и поперечное сечение $S = 2 \text{ см}^2$. Один сердечник неферромагнитный, например деревянный, а другой — ферромагнитный (кривая намагничивания рис. 3.9). Намотаем на каждый кольцевой сердечник обмотку с числом витков $w = 200$ и пропустим по ним одинаковый ток I , например в 1 а . Найдем потоки в теле сердечников.

По закону полного тока напряженность поля одинакова в обоих сердечниках и не зависит от материала:

$$H = \frac{Iw}{2\pi R} = \frac{1 \cdot 200}{2\pi \cdot 0.1} = 318 \text{ а/м}.$$

Магнитный поток в неферромагнитном сердечнике

$$\Phi_{\text{нф}} = BS = \mu_0 \mu H S = 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 318 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ вб}.$$

По кривой намагничивания рис. 3.9 находим, что при $H = 318 \text{ а/м}$ $B \approx 1,02 \text{ тл}$.

Магнитный поток в ферромагнитном сердечнике

$$\Phi_{\text{фм}} = BS = 1,02 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 20,4 \cdot 10^{-5} \text{ вб.}$$

Таким образом, поток в ферромагнитном сердечнике в $\frac{20,4 \cdot 10^3}{8} = 2550$ раз больше, чем в неферромагнитном.

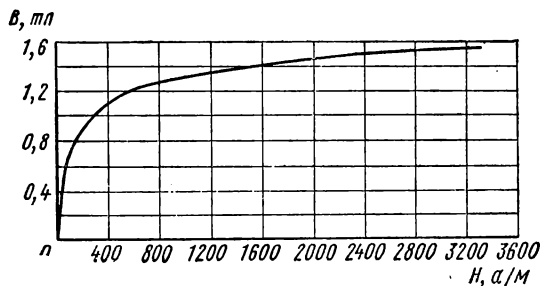


Рис. 3.9

Кроме усиления магнитного потока, ферромагнитные материалы вводят в магнитную цепь также с целью сосредоточения магнитного поля в определенной области пространства и придания ему определенной конфигурации.

§ 3.11. ПАДЕНИЕ МАГНИТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Падением магнитного напряжения между точками a и b магнитной цепи называют линейный интеграл от напряженности магнитного поля между этими точками:

$$U_{\text{м} ab} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}. \quad (3.6a)$$

Если на этом участке \vec{H} постоянно и совпадает по направлению с элементом пути $d\vec{l}$, то $\vec{H} d\vec{l} = H dl \cos 0^\circ$ и H можно вывести из-под знака интеграла. Тогда

$$U_{\text{м} ab} = H \int_a^b dl = H l_{ab}, \quad (3.6б)$$

где l_{ab} — длина пути между точками a и b .

Магнитное напряжение измеряют в амперах.

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками a и b может быть подразделен на n отдельных частей так, что для каждой части $H = H_k$ постоянно, то

$$U_{\text{м} ab} = \sum_{k=1}^n H_k l_k. \quad (3.7)$$

§ 3.12. ВЕБЕРАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под *веберамперной* (или *максвелламперной*) *характеристикой* понимают зависимость потока Φ по какому-либо участку магнитной цепи от падения магнитного напряжения на этом участке.

$$\Phi = f(U_m).$$

Она играет такую же важную роль при расчетах и исследовании магнитных цепей, как и вольтамперная характеристика нелинейных сопротивлений при расчетах и исследовании электрических цепей с нелинейными сопротивлениями (см. гл. II).

Веберамперные характеристики (в. а. х.) при расчетах магнитных цепей в готовом виде не задаются. Перед расчетом их надо построить с помощью кривых намагничивания ферромагнитных материалов, входящих в магнитную цепь.

§ 3.13. ПОСТРОЕНИЕ ВЕБЕРАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

На рис. 3.10 изображен участок магнитной цепи, по которому идет поток Φ . Пусть участки l_1 и l_2 сечением S выполнены из ферромагнитного материала, кривая $B = f(H)$ для которого дана, например на рис. 3.10. На участке длиной δ магнитный поток идет по воздуху.

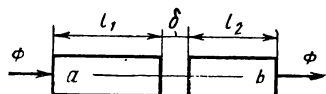


Рис. 3.10

Требуется построить в. а. х.* участка цепи между точками a и b .

При построении допустим: 1) что магнитный поток вдоль всего участка от a до b постоянен (отсутствует рассеяние) и 2) что сечение магнитного потока в воздушном зазоре такое же, как и на участках l_1 и l_2 (отсутствует боковой распор силовых линий в зазоре). В действительности оба допущения справедливы лишь в известной мере и чем больше воздушный зазор, тем менее справедливы эти допущения.

Построение в. а. х. производим следующим образом. Задаемся рядом значений индукции B , например для электротехнических сталей значениями 0; 0,5; 0,8; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 $тл$ и для каждого значения B находим напряженности поля на всех участках (l_1 , l_2 и δ).

На участках из ферромагнитного материала (участки l_1 и l_2 , рис. 3.10) напряженности $H_1 = H_2$ (так как $B_1 = B_2$) находим по кривой намагничивания.

Для неферромагнитных участков (участок δ)

$$H_{a/m} = \frac{B_{тл}}{\mu_0 \text{ гн/м}} = \frac{B_{тл}}{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м}} = 0,8 \cdot 10^6 B_{тл} = 80 B_{гс}^{**}.$$

* В гл. III (в отличие от гл. II) под в. а. х. понимается веберамперная характеристика.

** Во многих книгах, изданных примерно до 1970 г. и посвященных различным магнитным устройствам, магнитную индукцию измеряют в гауссах (не в $вб/м^2$), а напряженность поля — в $а/см$.

Таким образом, для определения H (в a/m) в воздухе надо умножить индукцию, выраженную в $мл$, на коэффициент $0,8 \cdot 10^6$.

Для каждого значения B определим поток $\Phi = BS$ и найдем магнитное напряжение:

$$U_{\text{маб}} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_8 \delta.$$

По результатам подсчетов строим кривую $\Phi = f(U_{\text{м}})$.

Пример 26. Построить в. а. х. для участка цепи рис. 3.10 при трех значениях δ : 0; 0,005; 0,05 $см$; $l_1 = 10$ $см$, $l_2 = 5$ $см$; $S = 5$ $см^2$.

Решение. Определим падение магнитного напряжения между точками a и b участка магнитной цепи рис. 3.10 при $\delta = 0,005$ $см$ и $B = 0,5$ $мл$.

Из кривой рис. 3.9 находим, что индукции $B = 0,5$ $мл$ соответствует напряженность поля $H = 40$ a/m .

Таким образом, при $B = 0,5$ $мл$ $H_1 = H_2 = 40$ a/m .

По формуле $U_{\text{маб}} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_8 \delta$ подсчитываем $U_{\text{маб}} = 40 \cdot 0,1 + 40 \cdot 0,05 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 10^6 \times 5 \cdot 10^{-5} = 26$ a .

Значения $U_{\text{маб}}$ при иных зазорах и индукциях находим аналогичным образом.

Подсчеты сводим в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$B, мл$	0,5	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$\Phi, вб$	$25 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	$50 \cdot 10^{-5}$	$55 \cdot 10^{-5}$	$60 \cdot 10^{-5}$	$65 \cdot 10^{-5}$	$70 \cdot 10^{-5}$
$H_1 = H_2, a/m$	40	130	300	440	700	1080	1800
$H_8, a/m$	$4 \cdot 10^5$	$6,4 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^5$	$10,4 \cdot 10^5$	$11,2 \cdot 10^5$
$U_{\text{маб}}$ при $\delta = 0, a$	6	19,5	45	66	105	162	270
$U_{\text{маб}}$ при $\delta = 0,005 \text{ см}, a$	26	51,5	85	110	153	214	326
$U_{\text{маб}}$ при $\delta = 0,05 \text{ см}, a$	206	339,5	445	506	585	682	830

По данным таблицы из рис. 3.11 построены в. а. х. при трех значениях δ . Из построений видно, что если участок, для которого строят в. а. х., не имеет «воздушного» включения, то в. а. х. круто поднимается вверх. При наличии воздушного включения в. а. х. спрямляется и идет более полого.

§ 3.14. ЗАКОНЫ КИРХГОФА ДЛЯ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

При расчетах магнитных цепей, как и электрических, используют первый и второй законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю:

$$\sum \Phi = 0. \quad (3.8)$$

Первый закон Кирхгофа для магнитных цепей следует из принципа непрерывности магнитного потока, известного из курса физики (о принципе непрерывности магнитного потока см. также § 17.8).

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме м. д. с. вдоль того же контура:

$$\sum U_m = \sum Iw. \quad (3.9)$$

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей по сути дела есть иная форма записи закона полного тока.

Перед тем как для магнитной цепи записать уравнения по законам Кирхгофа, следует произвольно выбрать положительные направления потоков в ветвях магнитной цепи и положительные направления обхода контуров.

Если направление магнитного потока на некотором участке совпадает с направлением обхода, то падение магнитного напряжения этого участка входит в сумму $\sum U_m$ со знаком плюс; если встречно ему, то со знаком минус.

Аналогично, если м. д. с. совпадает с направлением обхода, она входит в $\sum Iw$ со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

В качестве примера составим уравнения по законам

Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи, изображенной на рис. 3.12.

Левую ветвь назовем первой и все относящиеся к ней величины обозначим с индексом 1 (поток Φ_1 , напряженность поля H_1 , длина пути в стали l_1 , длина воздушного зазора δ_1 , м. д. с. $I_1 w_1$).

Среднюю ветвь назовем второй и все относящиеся к ней величины будут соответственно с индексом 2 (поток Φ_2 , напряженность поля H_2 , длина пути в стали l_2 , длина воздушного зазора δ_2 , м. д. с. $I_2 w_2$).

Все величины, относящиеся к правой ветви, имеют индекс 3 (поток Φ_3 , длина пути на вертикальном участке l_3 , суммарная длина пути на двух горизонтальных участках l'_3).

Произвольно выбираем направление потоков в ветвях.

Положим, что все потоки (Φ_1 , Φ_2 , Φ_3) направлены вверх (к узлу a). Число уравнений, которые следует составить по законам Кирхгофа,

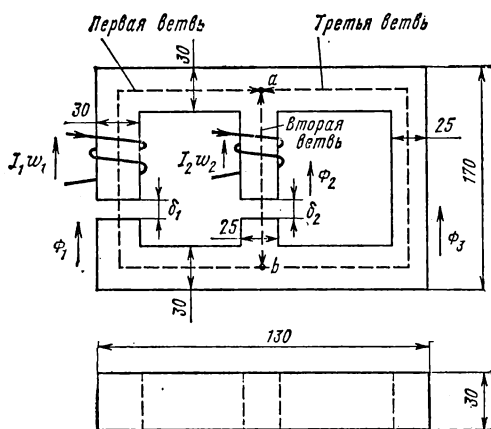


Рис. 3.12

должно быть равно числу ветвей цепи (в рассматриваемом случае надо составить три уравнения).

По первому закону Кирхгофа необходимо составить столько уравнений, сколько в цепи узлов без единицы (см. § 1.8).

В цепи рис. 3.12 два узла; следовательно, по первому закону Кирхгофа надо составить одно уравнение:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \quad (a)$$

По второму закону Кирхгофа надо составить число уравнений, равное числу ветвей, за вычетом числа уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. В рассматриваемом примере по второму закону Кирхгофа следует составить $3 - 1 = 2$ уравнения.

Первое из этих уравнений составим для контура, образованного первой и второй ветвями, а второе — для контура, образованного первой и третьей ветвями (для периферийного контура).

Перед составлением уравнений по второму закону Кирхгофа надо выбрать положительное направление обхода контуров. Будем обходить контуры по часовой стрелке.

Уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями,

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1 - H_2 l_2 - H_{\delta 2} \delta_2 = I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2, \quad (б)$$

где $H_{\delta 1}$ и $H_{\delta 2}$ — напряженности поля соответственно в воздушных зазорах δ_1 и δ_2 .

В левую часть уравнения вошли слагаемые $H_1 l_1$ и $H_{\delta 1} \delta_1$ со знаком плюс, так как на первом участке поток Φ_1 направлен согласно с обходом контура; слагаемые $H_2 l_2$ и $H_{\delta 2} \delta_2$ — со знаком минус, так как поток Φ_2 направлен встречно обходу контура.

В правую часть уравнения м. д. с. $I_1 \omega_1$ вошла со знаком плюс, так как она направлена согласно с обходом контура, а м. д. с. $I_2 \omega_2$ — со знаком минус, так как она направлена встречно обходу контура.

Составим уравнение для периферийного контура, образованного первой и третьей ветвями:

$$H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1 - H_3 l_3 - H_{\delta 3} \delta_3 = I_1 \omega_1. \quad (в)$$

Совместно решать три уравнения (а, б, в) с тремя неизвестными (Φ_1 , Φ_2 , Φ_3) не будем, так как в § 3.18 дается решение рассматриваемой задачи более совершенным методом, чем метод на основе законов Кирхгофа, — методом двух узлов.

§ 3.15. ПРИМЕНЕНИЕ К МАГНИТНЫМ ЦЕПЯМ ВСЕХ МЕТОДОВ, ИСПОЛЗУЕМЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НС

В гл. II подробно обсуждались различные приемы расчета электрических цепей с НС. Все эти методы полностью применимы и к расчету магнитных цепей, так как и магнитные и электрические цепи подчиняются одним и тем же законам — законам Кирхгофа.

Аналогом тока в электрической цепи является поток в магнитной цепи. Аналогом э. д. с. — м. д. с. Аналогом вольтамперной характеристики нелинейного сопротивления — веберамперная характеристика участка магнитной цепи.

§ 3.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ М. Д. С. НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ ПО ЗАДАННОМУ ПОТОКУ

Заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая (или кривые) намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или индукция в каком-либо сечении. Требуется найти м. д. с., ток или число витков намагничивающей обмотки.

Расчет проводим в следующей последовательности:

1) разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения и определяем длины l_k (в м) и площади поперечного сечения S_k (в м^2) участков. Длины участков берем по средней силовой линии;

2) исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по заданному потоку и сечениям S_k находим магнитные индукции на каждом участке:

$$B_k = \frac{\Phi}{S_b};$$

3) по кривой намагничивания определяем напряженности поля H_k для ферромагнитных участков магнитной цепи.

Напряженность поля в воздушном зазоре находим по формуле

$$H_{a/M} = 0,8 \cdot 10^6 B_{mM}; \quad (3.10)$$

Рис. 3.13

4) подсчитываем сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$ и на основании закона полного тока приравняем эту сумму полному току $I\omega$:

$$\Sigma H_k l_k = I\omega.$$

Основным допущением при расчете является то, что магнитный поток вдоль всей магнитной цепи полагаем неизменным. В действительности небольшая часть потока всегда замыкается, минуя основной путь. Например, для магнитной цепи рис. 3.6 поток, выйдя из левого сердечника, в основном направляется по пути $macbn$, но небольшая часть потока идет по воздуху по пути mqn .

Поток, который замыкается, минуя основной путь, называют *потоком рассеяния*. При малом воздушном зазоре поток рассеяния относительно мал; с увеличением воздушного зазора поток рассеяния может стать соизмеримым с основным потоком.

Пример 27. Геометрические размеры магнитной цепи даны на рис. 3.13 в мм; кривая намагничивания — на рис. 3.9. Найти, какой

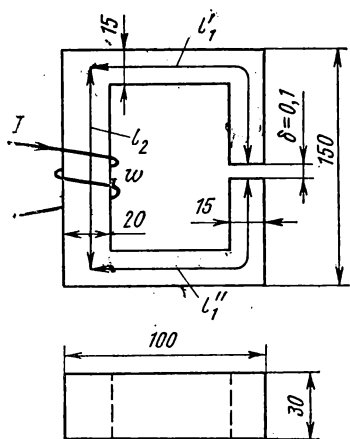


Рис. 3.13

ток должен протекать по обмотке с числом витков $w = 500$, чтобы магнитная индукция в воздушном зазоре $B_\delta = 1$ тл.

Решение. Магнитную цепь разбиваем на три участка:

$$l_1 = l'_1 + l''_1 = 30 \text{ см}; \quad S_1 = 4,5 \text{ см}^2; \quad l_2 = 13,5 \text{ см}; \quad S_2 = 6 \text{ см}^2.$$

Воздушный зазор

$$\delta = 0,01 \text{ см}; \quad S_\delta = S_1 = 4,5 \text{ см}^2.$$

Индукция

$$B_1 = B_\delta = 1 \text{ тл.}$$

Индукцию на участке l_2 найдем, разделив поток $\Phi = B_\delta S_\delta$ на сечение S_2 второго участка:

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{B_\delta S_\delta}{S_2} = \frac{1 \cdot 4,5}{6} = 0,75 \text{ тл.}$$

Напряженности поля на участках l_1 и l_2 определяем согласно кривой намагничивания (см. рис. 3.9) по известным значениям B_1 и B_2 :

$$H_1 = 300 \text{ а/м}, \quad H_2 = 115 \text{ а/м.}$$

Напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 8 \cdot 10^5 \text{ а/м.}$$

Подсчитываем падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи:

$$\begin{aligned} \sum H_k l_k &= H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = \\ &= 300 \cdot 0,3 + 115 \cdot 0,135 + 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 185,6 \text{ а.} \end{aligned}$$

Ток в обмотке

$$I = \frac{\sum H_k l_k}{w} = \frac{185,6}{500} = 0,371 \text{ а.}$$

§ 3.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА В НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ ПО ЗАДАННОЙ М. Д. С.

Заданы геометрические размеры магнитной цепи, кривая намагничивания и полный ток. Требуется найти поток или индукцию

Для решения задачи необходимо построить зависимость потока в функции от $\sum H_k l_k$ и на ней найти рабочую точку.

Пример 28. Найти магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной цепи примера 27, если $Iw = 350$ а.

Решение. Задаемся значениями B_δ , равными 0,5; 1,1; 1,2 и 1,3 тл, и для каждого

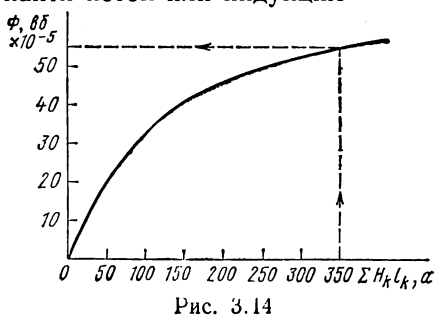


Рис. 3.14

из них подсчитываем $\sum H_k l_k$ так же, как в предыдущей задаче. Подсчеты сводим в табл. 3.2

Т а б л и ц а 3.2

B_δ , <i>мл</i>	0,5	1,1	1,2	1,3
B_1 , <i>мл</i>	0,5	1,1	1,2	1,3
B_2 , <i>мл</i>	0,375	0,825	0,9	0,975
H_1 , <i>а/м</i>	50	460	700	1020
H_2 , <i>а/м</i>	25	150	200	300
H_δ , <i>а/м</i>	$4 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^5$	$10,4 \cdot 10^5$
$\sum H_k l_k$, <i>а</i>	58,3	246,3	333	450,5
Φ , <i>вб</i>	$22,5 \cdot 10^{-5}$	$49,5 \cdot 10^{-5}$	$54 \cdot 10^{-5}$	$58,5 \cdot 10^{-5}$

По данным табл. 3.2 строим зависимость $\Phi = f(\sum H_k l_k)$ (рис. 3.14) и по ней находим, что при $I\omega = 350$ а $\Phi = 55 \cdot 10^{-5}$ вб.

Следовательно,

$$B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{55 \cdot 10^{-5}}{4,5 \cdot 10^{-4}} = 1,21 \text{ мл.}$$

§ 3.18. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ МЕТОДОМ ДВУХ УЗЛОВ

Ранее отмечалось, что для расчета разветвленных магнитных цепей применимы все методы, которые обсуждались в гл. II.

Рассмотрим расчет разветвленной магнитной цепи (см. рис. 3.12) методом двух узлов.

Пример 29. Задано: геометрические размеры в мм; кривая намагничивания рис. 3.9; $I_1 \omega_1 = 80$ а, $I_2 \omega_2 = 300$ а; зазоры $\delta_1 = 0,05$ мм и $\delta_2 = 0,22$ мм. Найти магнитные потоки в ветвях магнитной цепи.

Р е ш е н и е. Как и в схеме рис. 2.7, узловые точки обозначим буквами *a* и *b*. Выберем положительные направления потоков Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 к узлу *a*. Построим зависимость потока Φ_1 от падения магнитного напряжения первой ветви U_{m1} . Для этого произвольно задаемся рядом числовых значений Φ_1 , для каждого значения находим индукцию B_1 и по кривой намагничивания напряженность H_1 на пути в стали по первой ветви.

Магнитное напряжение на первом участке

$$U_{m1} = H_1 l_1 + 0,8 \cdot 10^6 B_1 \delta_1,$$

где $l_1 = 0,24$ м — длина пути в стали по первой ветви.

Таким образом, для каждого значения потока Φ_1 подсчитываем U_{m1} и по точкам строим зависимость $\Phi_1 = f(U_{m1})$ — кривая 1 рис. 3.15.

Аналогично строим зависимость $\Phi_2 = f(U_{m2})$ — кривая 2;

$$U_{m2} = H_2 l_2 + 0,8 \cdot 10^6 B_2 \delta_2,$$

где $l_2 = 0,138$ м — длина пути в стали по второй ветви. Кривая 3 есть зависимость $\Phi_3 = f(U_{m3})$;

$$U_{m3} = H_3 l_3 + H_3' l_3',$$

где $l'_3 \approx 0,1$ м и $l''_3 \approx 0,14$ м. Им соответствуют участки третьей ветви, имеющие сечения 9 и $7,5$ см².

Магнитная цепь рис. 3.12 формально аналогична нелинейной электрической цепи рис. 2.7. Аналогом I_1 и I_2 электрической цепи рис. 2.7 являются магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 магнитной цепи рис. 3.12. Аналогом э. д. с. E_1 является м. д. с. $I_1\omega_1$. Аналогом зависимости тока в первой ветви от падения напряжения на сопротивлении первой ветви [$I_1 = f(U_1)$] является зависимость магнитного потока Φ_1 в первой ветви магнитной цепи от падения магнитного напряжения U_{m1} вдоль первой ветви [$\Phi_1 = f(U_{m1})$] и т. д.

Воспользуемся аналогией для определения потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3 . С этой целью выполним графические построения, подобные построениям на рис. 2.10.

Вспомним, что кривые рис. 2.10 представляют собой зависимости токов в ветвях схемы не от падений напряжений (U_1, U_2, U_3) вдоль этих ветвей, а от напряжения U_{ab} между двумя узлами (a и b) схемы рис. 2.7.

В соответствии с этим введем в расчет магнитное напряжение — разность магнитных потенциалов — между узлами a и b :

$$U_{mab} = \Phi_{ma} - \Phi_{mb}.$$

Выразим магнитный потенциал точки a (Φ_{ma}) через магнитный потенциал точки b (Φ_{mb}), следуя от точки b к точке a сначала по первой ветви, затем по второй и, наконец, по третьей. Для первой ветви

$$\Phi_{ma} = \Phi_{mb} - (H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1) + I_1 \omega_1.$$

Здесь $H_1 l_1 + H_{\delta 1} \delta_1 = U_{m1}$ — падение магнитного напряжения по первой ветви. Знак минус перед скобкой обусловлен тем, что при перемещении согласно с направлением потока магнитный потенциал (как и электрический при перемещении по току) снижается (если бы двигались против потока, то магнитный потенциал возрастал бы и надо было ставить плюс). Плюс перед $I_1 \omega_1$ свидетельствует о том, что при перемещении от точки b к точке a идем согласно с направлением м. д. с. $I_1 \omega_1$. Таким образом, для первой ветви

$$U_{mab} = \Phi_{ma} - \Phi_{mb} = -U_{m1} + I_1 \omega_1; \quad (a)$$

для второй ветви (перемещаясь от b к a по потоку Φ_2 и согласно с направлением м. д. с. $I_2 \omega_2$)

$$U_{mab} = -U_{m2} + I_2 \omega_2; \quad (b)$$

для третьей ветви (в ней м. д. с. отсутствует)

$$U_{mab} = -U_{m3}. \quad (b)$$

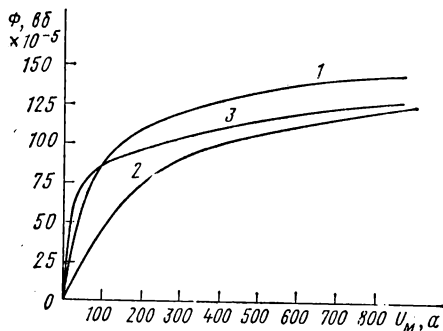


Рис. 3.15

Графическое решение задачи приведено на рис. 3.16. На нем зависимость $\Phi_1 = f(U_{\text{мab}})$ представлена кривой 1, $\Phi_2 = f(U_{\text{мab}})$ — кривой 2; $\Phi_3 = f(U_{\text{мab}})$ — кривой 3. Построение их производилось так же, как и построение соответствующих кривых рис. 2.10. Начало кривой 1

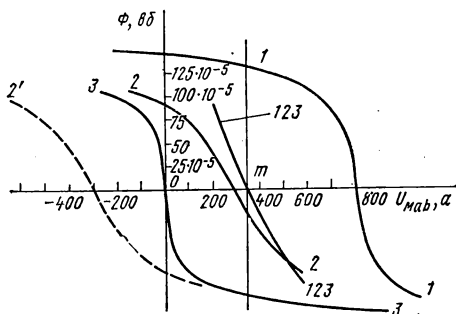


Рис. 3.16

смещено в точку $U_{\text{мab}} = I_1 \omega_1 = 800 \text{ а}$; начало кривой 2 — в точку $U_{\text{мab}} = I_2 \omega_2 = 300 \text{ а}$. Кривая 123 представляет собой $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{\text{мab}})$. Она пересекает ось абсцисс в точке m . Проведем через точку m вертикаль и найдем потоки в ветвях:

$$\Phi_1 = 126,2 \cdot 10^{-5} \text{ вб};$$

$$\Phi_2 = -25 \cdot 10^{-5} \text{ вб};$$

$$\Phi_3 = -101,2 \cdot 10^{-5} \text{ вб}.$$

В результате расчета потоки Φ_2 и Φ_3 оказались отрицательными. Это означает, что в действительности они направлены противоположно положительным для них направлениям, показанным стрелками на рис. 3.12.

Рассмотрим, какие изменения произошли бы в построениях на рис. 3.16, если бы какая-либо из м. д. с. изменила направление на противоположное (например, в результате изменения тока в этой обмотке). Допустим, что изменилось на противоположное направление м. д. с. $I_2 \omega_2$. В уравнение (6) м. д. с. $I_2 \omega_2$ войдет теперь с отрицательным знаком. Это найдет свое отражение при построениях в том, что кривая 2 рис. 3.12 переместится влево параллельно самой себе так, что пересечет ось абсцисс не в точке $U_{\text{мab}} = 300 \text{ а}$, а в точке $U_{\text{мab}} = -300 \text{ а}$ (см. пунктирную кривую 2' на рис. 3.12). Кривые 1 и 3 останутся без изменений, но суммарная кривая $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{\text{мab}})$ станет иной.

§ 3.19. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РАСЧЕТУ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

1. При построении веберамперных характеристик участков магнитной цепи в § 3.12 и далее явление гистерезиса не учитывалось. Поэтому в а. х. исходили из начала координат, не зависели от предыстории, и им соответствовало соотношение $\Phi(-U_{\text{м}}) = -\Phi(U_{\text{м}})$. Если учесть гистерезис, то у в. а. х. каждой ветви будут неодинаковые восходящий и нисходящий участки, которые в свою очередь зависят от магнитного состояния, предшествующего рассматриваемому, и в этом случае $\Phi(-U_{\text{м}}) \neq -\Phi(U_{\text{м}})$. Для получения более правильных количественных результатов при построении в а. х. следует учитывать гистерезис, что практически возможно лишь в случае, если известны гистерезисные петли используемого материала.

2. В логических устройствах и устройствах счетно-решающей техники широко применяют различные элементы, имеющие разветвленные магнитные цепи (трансфлюксоры, бйаксы, леддики и др.), выполненные из феррита с прямоугольной петлей гистерезиса. Изложенную в § 3.18 методику расчета, если несколько ее видоизменить, можно применить и к определению потокораспределения в упомянутых элементах при установившихся режимах работы. В этих случаях расчет следует начинать с определения положения узлов магнитной цепи элемента (в таких элементах узлы, как правило, выражены в неявном виде). Затем каждую ветвь необходимо разделить на две параллельные со своими длинами и рассматривать последние как самостоятельные ветви со своими потоками. Это необходимо потому, что магнитные потоки в двух параллельных участках каждой ветви могут замыкаться по различным путям,

т. е. ведут себя по-разному. Так, например, магнитные потоки двух параллельных участков при определенных условиях могут замыкаться в пределах одной ветви, не заходя в другие ветви. Сам расчет производят так же, как и в § 3.18. Однако вебер-амперные характеристики каждого участка должны быть взяты в виде прямоугольной петли с исходящими из двух ее противоположных углов горизонтальными (или почти горизонтальными) прямыми. Для каждого сочетания м. д. с. (последние могут и отсутствовать) имеется по крайней мере по два решения в соответствии с тем, что в. а. х. имеют петлевую форму.

3. Если число узлов магнитной цепи больше двух, то потокораспределение в ней можно найти методом постепенного приведения к двум узлам. Так, в трехотверстном трансфлюксоре рис. 3.17 цифры в кружках 1, 2, 3 означают узлы. Восемь тонких линий — это средние магнитные линии ветвей. Стрелки на них указывают произвольно выбранные направления потоков. Провода с токами проходят через отверстия трансфлюксора.

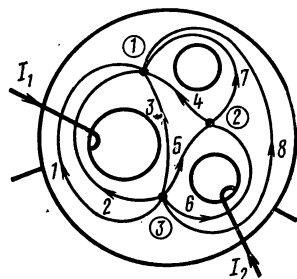


Рис. 3.17

Сначала строим зависимость суммы потоков 5 и 6 ветвей от магнитного напряжения между узлами 3 и 2, учитывая ток I_2 . Затем строим зависимость $\Phi_{4,7} = f(U_{м21})$. Имея в виду, что $\Phi_{5,6} = \Phi_{4,7}$, суммируем абсциссы полученных кривых и находим $\Phi_{5,6} = f(U_{м21})$. После этого задача оказывается сведенной к задаче с двумя узлами 1 и 2. В более сложных задачах можно воспользоваться методом, рассмотренным в § 7.6 [34].

§ 3.20. ПОЛУЧЕНИЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

Возьмем замкнутый кольцевой сердечник из магнитнотвердого материала. Сделаем в нем два очень тонких радиальных пропила на расстоянии δ (рис. 3.18, а). Выпиленный кусок оставим пока на месте.

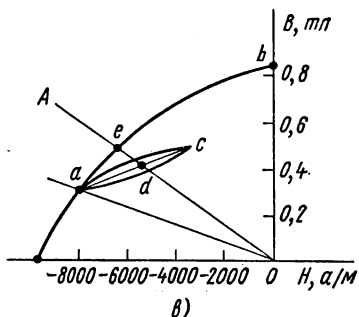
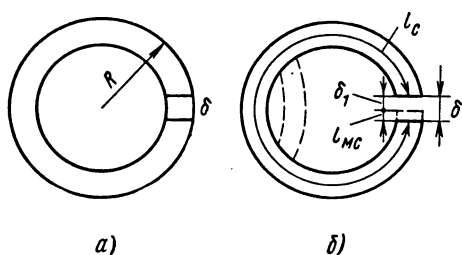


Рис. 3.18

Затем намотаем на сердечник обмотку и пропустим по ней ток такой величины, чтобы намагнитить сердечник до насыщения. После этого ток выключим и обмотку сматываем. Сердечник оказывается намагниченным. Намагниченность его есть следствие того, что магнитные моменты областей самопроизвольного намагничивания сохранили свою ориентацию, вызванную предшествующим воздействием внешнего поля.

Магнитный поток в теле сердечника определяется суммой магнитных моментов всего сердечника. Вынем выпиленный кусок (рис. 3.18, б).

Объем намагниченного вещества уменьшится на объем вынутой части, что приведет к уменьшению магнитного потока в теле сердечника.

В воздушном зазоре сердечника при отсутствии на нем обмотки с током проходит магнитный поток — устройство представляет собой постоянный магнит.

§ 3.21. РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

Величина магнитной индукции в зазоре магнита (B_δ) зависит от соотношения между длиной воздушного зазора δ и длиной ферромагнитной части магнита l_c (см. рис. 3.18, б). Обозначим: H_δ — напряженность поля в воздушном зазоре; B_c — магнитная индукция в теле магнита; H_c — напряженность магнитного поля в теле магнита.

Найдем две неизвестные величины B_c и H_c , полагая известными кривую размагничивания ферромагнитного материала, величину зазора δ и длину l_c . Одна связь между ними (нелинейная) дается кривой размагничивания (рис. 3.18, в) *. Другая связь (линейная) следует из закона полного тока.

Действительно, если воспользоваться законом полного тока, то можно записать

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_c l_c + H_\delta \delta = 0. \quad (3.11)$$

Нуль в правой части уравнения (3.11) объясняется тем, что на постоянном магните нет обмотки с током. Но

$$H_\delta (a/m) = 0,8 \cdot 10^6 B_\delta (тл).$$

Если зазор достаточно мал, то можно в первом приближении принять, что рассеяние потока отсутствует и $B_c S_c = B_\delta S_\delta$, где S_c — площадь поперечного сечения магнита; S_δ — площадь поперечного сечения воздушного зазора. Отсюда

$$B_\delta = B_c \frac{S_c}{S_\delta}$$

и

$$H_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \frac{S_c}{S_\delta} B_c.$$

Подставив H_δ в уравнение (3.11), получим

$$H_c (a/m) = -N B_c (тл), \quad (3.12)$$

где

$$N = 0,8 \cdot 10^6 \frac{\delta}{l_c} \frac{S_c}{S_\delta}. \quad (3.13)$$

Коэффициент N , зависящий от геометрических размеров, называют *размагничивающим фактором* **: $[N] = \frac{a \cdot м}{в \cdot секк}$.

* По оси абсцисс на рис. 3.18, в влево от точки O $H = H_c$ отрицательна.

** Название коэффициента N подчеркивает, что с его помощью можно определить то размагничивание (уменьшение магнитного потока в теле магнита), которое происходит при введении воздушного зазора в магнитную цепь постоянного магнита.

Для определения H_c и B_c следует на рис. 3.18, в нанести прямую по уравнению (3.12). В точке пересечения прямой с кривой размагничивания удовлетворяются обе связи между B_c и H_c , которым должно быть подчинено решение.

Приведенный расчет даст достаточно точный результат, если зазор δ очень мал по сравнению с длиной l . Если это условие не выполнено, то значительная часть магнитных силовых линий замыкается, как показано пунктиром на рис. 3.18, б. В этом случае вдоль сердечника поток, индукция и напряженность изменяются. Это учитывают при расчете, вводя некоторые поправочные коэффициенты, находясь из опыта.

Пример 30. Найдем B_c , B_δ , H_c и H_δ , если постоянный магнит (см. рис. 3.18, б) имеет $R = 5$ см, $\delta = 1$ см. Кривая размагничивания изображена на рис. 3.18, в.

Решение. Если пренебречь боковым распором магнитных силовых линий в зазоре, то $S_\delta = S_c$. При этом размагничивающий фактор $N = 0,8 \cdot \frac{10^6}{2\pi \cdot 5 - 1} = 263 \cdot 10^2$. На рис. 3.18, в проводим прямую $0a$ по уравнению $H_c = -263 \cdot 10^2 \cdot B_c$.

Точка a пересечения ее с кривой размагничивания дает $B_c = 0,3$ тл. Такая же индукция будет в воздушном зазоре. Напряженность поля в теле магнита $H_c = -8000$ а/м. Напряженность поля в воздушном зазоре $H_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,3 = 24 \cdot 10^4$ (а/м).

§ 3.22. ПРЯМАЯ ВОЗВРАТА И КОЭФФИЦИЕНТ ВОЗВРАТА

Частично заполним зазор δ на длине $l_{м.с}$ (см. рис. 3.18, б) куском магнитномягкого материала. Под действием поля постоянного магнита внесенный кусок намагнитится и поток в теле магнита возрастет.

Ввиду наличия гистерезиса магнитное состояние постоянного магнита будет изменяться не по участку ab (см. рис. 3.18, в) кривой размагничивания, а по нижней ветви adc частного цикла.

Для упрощения расчетов принято заменять частный цикл прямой линией, соединяющей его вершины. Эту прямую линию называют *прямой возврата*.

Тангенс угла наклона прямой возврата к оси абсцисс называют *коэффициентом возврата*. Числовые значения его для различных магнитотвердых материалов даются в руководствах по постоянным магнитам.

Обозначим длину оставшегося воздушного зазора через δ_1 (см. рис. 3.18, б):

$$\delta_1 = \delta - l_{м.с},$$

и на основании закона полного тока запишем

$$H_c l_c + H_{\delta 1} \delta_1 + l_{м.с} H_{м.с} = 0.$$

Напряженность поля в магнитномягком материале $H_{м.с}$ много меньше напряженности поля в магнитотвердом материале и в воздушном зазоре при одном и том же значении магнитной индукции, поэтому слагаемым $H_{м.с} l_{м.с}$ пренебрегаем по сравнению с остальными.

При этом

$$H_{c(a/m)} = -0,8 \cdot 10^{-6} \frac{\delta_1}{l_c} \frac{S_c}{S_\delta} B_{c(mA)}. \quad (3.12')$$

Магнитное состояние постоянного магнита определяется пересечением прямой возврата с прямой по уравнению (3.12').

Пример 31. Воздушный зазор магнита примера 30 уменьшен вдвое. Найти индукцию в нем.

Решение. Находим $N = 131,5 \cdot 10^3$. Прямая OA (см. рис. 3.18, в) пересекается с прямой возврата в точке d . Поэтому $B_c = 0,4$ тл. Такая же индукция будет и в воздушном зазоре, так как $S_\delta = S_c$.

Следовательно, уменьшение зазора со значения δ до δ_1 привело к увеличению магнитной индукции в нем с 0,3 до 0,4 тл.

Если же зазор δ_1 получить не путем сокращения его со значения δ , как в предыдущем примере, а путем выемки из намагниченного сердечника куска длиной δ_1 , то магнитное состояние магнита определится пересечением луча OA с кривой размагничивания baH_c в точке e . В этом случае $B_c = B_\delta = 0,48$ тл, т. е. возрастет по сравнению с магнитной индукцией примера 31 на $\frac{0,48-0,4}{0,4} \cdot 100 = 20\%$.

Таким образом, магнитный поток в постоянном магните зависит не только от величины воздушного зазора, но и от предыстории установления этого зазора.

§ 3.23. МАГНИТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И МАГНИТНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ УЧАСТКА МАГНИТНОЙ ЦЕПИ. ЗАКОН ОМА ДЛЯ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

По определению, падение магнитного напряжения $U_m = Hl$, но

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu S},$$

где Φ — поток; S — поперечное сечение участка. Следовательно,

$$U_m = \Phi \frac{l}{\mu_0 \mu S} = \Phi R_m; \quad (3.14)$$

откуда

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu S}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.14) называют *законом Ома для магнитной цепи*. Это уравнение устанавливает связь между магнитным напряжением U_m и потоком Φ ; R_m называют *магнитным сопротивлением участка магнитной цепи*. Обратную величину магнитного сопротивления называют *магнитной проводимостью*

$$G_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_0 \mu S}{l}. \quad (3.16)$$

Из предыдущего известно, что веберамперная характеристика участка магнитной цепи в общем случае нелинейна. Следовательно, в общем случае R_m и G_m являются функциями магнитного потока (непостоянными величинами). Поэтому практически понятиями R_m и G_m , при расчетах пользуются лишь в тех случаях, когда магнитная цепь в целом или ее участок, для которых определяются R_m и G_m , не насыщены. Чаще всего это бывает, когда в магнитной цепи имеется достаточно большой воздушный зазор, спрямляющий веберамперную характеристику магнитной цепи в целом или ее участка.

Магнитное сопротивление R_m участка цепи можно сопоставить со статическим сопротивлением нелинейного сопротивления $R_{ст}$ (см. § 2.10) и так же, как последнее, R_m можно использовать при качественном рассмотрении различных вопросов, например вопроса об изменении потоков двух параллельных ветвей при изменении потока в неразветвленной части магнитной цепи (как в § 3.2 по отношению к электрической цепи).

Пример 32. Найти R_m воздушного зазора постоянного магнита и по нему магнитный поток, если $\delta = 0,5$ см, площадь поперечного сечения воздушного зазора $S = 1,5$ см². Магнитное напряжение на воздушном зазоре 1920 а.

Р е ш е н и е.

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu S} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{ГН}}{\text{м}} \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,256 \cdot 10^8 \text{ ГН}^{-1};$$

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} = \frac{1920}{0,256 \cdot 10^8} = 7230 \cdot 10^{-8} \text{ вб.}$$

§ 3.24. ПОЯСНЕНИЯ К ФОРМУЛЕ $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$

Из курса физики известно о связи между магнитной индукцией \vec{B} , намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H} . Вспомним, что контур с током i , охватывающий площадку ΔS , создает магнитный момент $\vec{M} = i \Delta \vec{S}$ (рис. 3.19, а). Величина вектора $\Delta \vec{S}$ численно равна площади ΔS , а положительное направление вектора $\Delta \vec{S}$ связано с положительным направлением тока i правилом правоугового винта.

Ферромагнитный кольцевой сердечник, изображенный на рис. 3.19, б, имеет обмотки с числом витков w , по которой проходит ток I . Каждая единица объема ферромагнитного материала обладает некоторым вектором намагниченности \vec{J} , что при расчете можно рассматривать как результат наличия в ферромагнитном материале контуров с молекулярными токами. Эти токи показаны в сечениях сердечника на рис. 3.19, в (намагничивающая обмотка с током I на нем не показана).

Среднюю линейную плотность молекулярного тока (а/см), приходящегося на единицу длины сердечника в направлении $\Delta \vec{l}$, обозначим $\vec{\delta}_m$. Единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением $\vec{\delta}_m$, обозначим \vec{n}^{δ} . Молекулярный ток $\vec{\delta}_m \Delta l \vec{n}^{\delta}$ охватывает площадку ΔS . Положительное направление вектора $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}^{\delta}$ связано с положительным направлением этого тока правилом правоугового винта. Через \vec{S}^{δ} обозначен единичный вектор по направлению $\Delta \vec{S}$.

По определению, намагниченность \vec{J} представляет собой магнитный момент единицы объема вещества. Среднюю по объему намагниченность вещества \vec{J} можно определить путем деления магнитного момента контура с током $\vec{\delta}_m \Delta l \vec{n}^{\delta}$, охватываю-

щим площадку ΔS , на объем $\Delta V = \Delta l \Delta S$:

$$\vec{J} = \frac{\delta_m \Delta l \Delta S}{\Delta l \Delta S} \cdot \vec{S}^0 = \delta_m \vec{S}^0.$$

Следовательно, средняя по объему намагниченность \vec{J} численно равна средней линейной плотности молекулярного тока и направлена по \vec{S}^0 .

Как видно из рис. 3.19, а, на участках, являющихся смежными между соседними контурами, молекулярные токи направлены встречно и взаимно компенсируют друг друга. Не скомпенсированными остаются только токи по периферийному контуру (рис. 3.19, г).

Итак, наличие областей самопроизвольной намагниченности в ферромагнитном теле при расчете можно эквивалентировать протеканием по поверхности этого тела, считая его неферромагнитным, поверхностного тока с линейной плотностью δ_m , причем по модулю $\delta_m = J$.

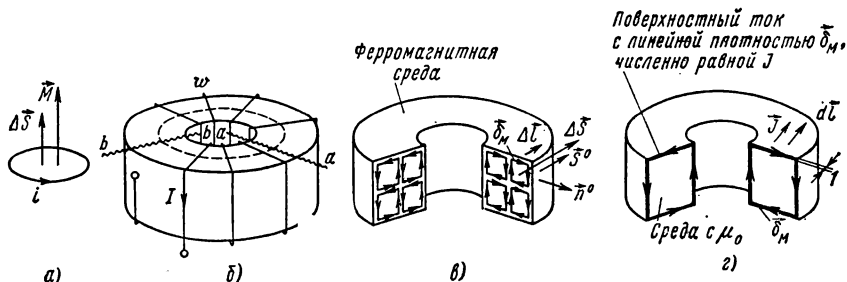


Рис. 3.19

Запишем уравнение по закону полного тока для контура, показанного пунктиром на рис. 3.19, б. При этом учтем, что после введения поверхностного тока сердечник станет неферромагнитным и будет намагничиваться не только током I , протекающим по обмотке с числом витков w , но и поверхностным током с линейной плотностью δ_m .

На длине dl поверхностный ток равен $\delta_m dl = \vec{J} d\vec{l}$. На длине всего сердечника поверхностный ток равен $\oint \vec{J} d\vec{l}$. Таким образом,

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = Iw + \oint \vec{J} d\vec{l}.$$

Отсюда

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = Iw.$$

Величину $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ обозначают \vec{H} и называют напряженностью магнитного поля.

В отличие от магнитной индукции \vec{B} и намагниченности \vec{J} напряженность поля \vec{H} не зависит от магнитных свойств намагничиваемого тела. Это и явилось основанием для того, чтобы закон полного тока для любых сред записывать в виде $\oint \vec{H} d\vec{l} = Iw$.

Если ферромагнитное тело намагничено и по высоте и по толщине неравномерно, то плотность молекулярных токов смежных контуров на рис. 3.19, в будет неодинаковой, а токи на смежных между соседними контурами участках будут компенсироваться неполностью. Отсюда следует, что неравномерно намагниченное ферромагнитное тело при расчете можно заменить таким же в геометрическом смысле неферромагнитным телом, по поверхности которого течет поверхностный ток с плотностью, изменяющейся по высоте тела, а во внутренних точках тела течет объемный ток, плотность которого также изменяется от точки к точке.

Глава четвертая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 4.1. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Явление электромагнитной индукции представляет собой одно из важнейших явлений, наблюдаемых в магнитном поле. Оно было обнаружено в 1831 г. английским физиком Майклом Фарадеем. Суть явления состоит в том, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур, независимо от того, чем вызвано изменение потока, в контуре наводится электродвижущая сила e .

Опыт показывает, что наведенная или индуктированная э. д. с. e прямо пропорциональна скорости изменения потокосцепления контура ψ :

$$e = - \frac{d\psi}{dt}. \quad (4.1)$$

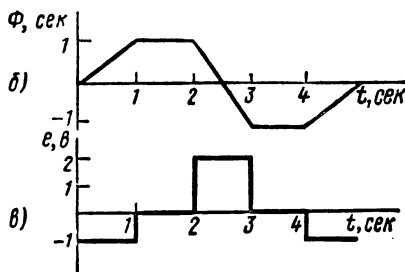
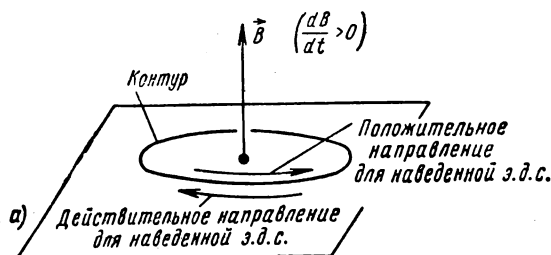


Рис. 4.1

Потокосцепление контура ψ равно алгебраической сумме потоков, пронизывающих отдельные витки обмотки:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n. \quad (4.2)$$

Если все витки обмотки w пронизываются одним и тем же потоком Φ , то

$$\psi = w\Phi. \quad (4.3)$$

Так как число витков w — величина безразмерная, то потокосцепление измеряют в тех же единицах, что и поток. Важно сделать замечания к формуле (4.1):

1) ψ есть полное или результирующее потокосцепление контура или обмотки; оно создается не только внешним по отношению к данному контуру потоком, но и собственным потоком, пронизывающим контур при протекании по нему электрического тока;

2) знак минус объясняется тем, что положительное направление отсчета для наведенной э. д. с. и положительное направление линий магнитной индукции, пронизывающих контур при возрастании потока, принято связывать *правилом правоходового винта*: если закручивать правоходовой винт так, что его острие будет двигаться по направлению магнитных силовых линий при возрастании потока, то положительное направление для наведенной э. д. с. будет совпадать с направлением вращения головки этого винта.

Знак минус в формуле (4.1) поставлен с целью приведения в соответствие действительного (полученного из опыта) направления э. д. с. при оговоренных условиях с направлением отсчета, принятым для нее за положительное (рис. 4.1, а).

Формулу (4.1) иллюстрируют рис. 4.1, б и в: на рис. 4.1, б показана зависимость потока, пронизывающего одновитковый контур рис. 4.1, а от времени $\Phi = f(t)$; на рис. 4.1, в — э. д. с. в контуре $e = f(t)$.

Эксперименты Фарадей проводил с замкнутыми проводниковыми контурами. Наведение э. д. с. он объяснял как следствие пересечения проводами контура магнитных силовых линий.

В 1873 г. английский физик Джеймс Кларк Максвелл обобщил и развил идеи Фарадея (см. ч. III учебника). Он показал, что явление электромагнитной индукции наблюдается не только в замкнутых проводниковых, но и в замкнутых непроводниковых контурах.

Э. д. с., наведенную в проводнике длиной dl , пересекающем магнитные силовые линии *неизменного* во времени магнитного поля, часто определяют по формуле

$$de = \vec{B} [\vec{dl} \vec{v}], \quad (4.4)$$

где de — э. д. с. в участке проводника длиной dl ;

\vec{v} — скорость перемещения проводника относительно внешнего магнитного поля.

В формуле (4.4) индукция \vec{B} скалярно умножается на векторное произведение \vec{dl} и \vec{v} .

Если в результате расчета по формуле (4.4) э. д. с. окажется положительной, то это означает, что э. д. с. de направлена согласно с положительным направлением элемента проводника \vec{dl} .

Формула (4.4) в одинаковой степени пригодна для определения э. д. с. при движении проводника в неравномерном и в равномерном магнитном полях, если магнитное поле неизменно во времени.

При движении проводника длиной l в *равномерном* неизменном во времени поле э. д. с. удобнее определять по формуле

$$e = Blv_n, \quad (4.5)$$

где B — индукция внешнего равномерного поля;

l — длина активной части проводника (пересекающей магнитные силовые линии);

v_n — составляющая скорости движения проводника, нормальная (перпендикулярная) магнитному полю.

Направление наведенной э. д. с. при использовании формулы (4.5) определяют по правилу правой руки (известному из курса физики); если расположить правую руку таким образом, что магнитная индукция входит в ладонь, а отогнутый большой палец направить по нормальной составляющей скорости проводника, то возникающая в проводнике э. д. с. совпадает с направлением четырех остальных вытянутых пальцев правой руки.

Из формулы (4.5) можно получить формулу (4.1). С этой целью обратимся к рис. 4.2, а.

На рис. 4.2, а изображено неравномерное магнитное поле, направленное перпендикулярно чертежу. В этом поле может перемещаться проводник длиной l , являющийся составной частью некоторого контура.

Нормальная к полю составляющая скорости проводника

$$v_n = \frac{dx}{dt},$$

где x — координата в направлении v_n .

В отрезке проводника длиной dl наведется э. д. с., которую определим по формуле (4.5); вместо l подставим dl : $de = Bv_n dl$. Э. д. с. в проводнике длиной l

$$e = \int_0^l B v_n dl = \int_0^l \frac{B dx dl}{dt}.$$

Произведение $dx dl$ есть элементарная площадка ds , пронизываемая магнитным потоком, а

$\int_0^l B ds = d\Phi$ есть приращение потока в рассматриваемом контуре.

Таким образом, числовое значение э. д. с. равно $\frac{d\Phi}{dt}$. Так

как положительное направление для наведенной э. д. с. и положительное направление индукционных линий при возрастании потока связаны правилом правого винта, то следует учесть еще знак минус. Окончательно (при $\omega = 1$) $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

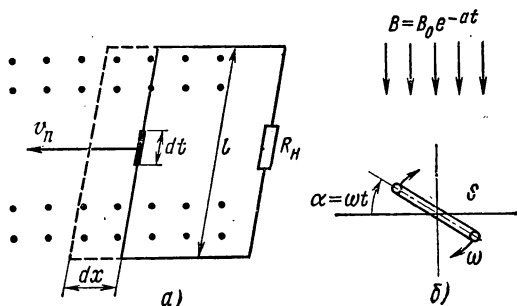


Рис. 4.2

* * *

Поясним явление возникновения э. д. с. на концах движущегося в магнитном поле проводника, используя понятие о силах Лоренца.

Известно, что на движущиеся в магнитном поле заряды действуют механические силы, пропорциональные величине зарядов и составляющей скорости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля. Эти силы принято называть *силами Лоренца* по имени голландского физика Гендрика Лоренца (1853—1928). Сила, действующая на электрический заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле индукции \vec{B} , равна $q [\vec{v} B]$.

Если какой-либо проводник будет перемещаться в магнитном поле так, что он будет иметь составляющую скорости, перпендикулярную силовым линиям магнитного поля, то на положительные и отрицательные заряды, входящие в состав атомов и молекул этого проводника, будут действовать силы Лоренца.

Силы, действующие на носители отрицательных зарядов, будут действовать в одну сторону, а на носители положительных зарядов — в противоположную сторону.

Если движущийся в магнитном поле проводник металлический, то в силу большой способности к перемещению в нем носителей отрицательных зарядов (свободных электронов) на одном конце проводника образуется избыток, а на другом — недостаток отрицательных зарядов (т. е. избыток положительных зарядов).

Но явление разделения зарядов в проводнике, движущемся в магнитном поле, и представляет собой явление возникновения в нем индуктированной э. д. с.

Пример 33. Вывести формулу для определения э. д. с. в обмотке с числом витков w , намотанной на прямоугольной рамке площадью s . Рамка вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией $B = B_0 e^{-at}$ (рис. 4.2, б).

Подсчитать числовое значение э. д. с. e при $\omega t = \frac{\pi}{2}$; $B_0 = 1$ тл; $a = 10 \text{ сек}^{-1}$; $s = 4 \text{ см}^2$; $\omega = 31,4 \text{ сек}^{-1}$; $w = 100$.

Решение. Потокосцепление обмотки

$$\psi = w\Phi = wBs \cos \alpha = wB_0 s e^{-at} \cos \omega t.$$

Здесь угол $\alpha = \omega t$ представляет собой угол, образованный плоскостью рамки и горизонтальной плоскостью;

$$e = - \frac{d\psi}{dt} = - B_0 s w (-a e^{-at} \cos \omega t - \omega e^{-at} \sin \omega t) = \\ = B_0 s w e^{-at} (a \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Подсчитаем числовое значение e при $\omega t = \frac{\pi}{2}$:

$$t = \frac{\pi}{2 \cdot 31,4}; \quad at = 0,5;$$

$$e = 1 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 100 e^{-0,5} \cdot 31,4 = 0,761 \text{ в.}$$

§ 4.2. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ И Э. Д. С. САМОИНДУКЦИОННОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Явление наведения э. д. с. в каком-либо контуре при изменении тока, протекающего по этому контуру, называют *самоиндукцией*.

Наведенную (индуктированную) э. д. с. называют *э. д. с. самоиндукции* и обозначают e_L . Для ее определения необходимо продифференцировать потокосцепление контура ψ , вызванное собственным током i .

Из опыта известно, что для контуров (катушек) с неферромагнитным сердечником или для катушек с сердечником из магнитодиэлектриков, у которых μ почти постоянна и не зависит от напряженности магнитного поля, потокосцепление ψ пропорционально току i , т. е.

$$\psi = Li. \quad (4.6)$$

Коэффициент пропорциональности L называют собственной индуктивностью контура, или *индуктивностью*. Индуктивность как элемент

схемы замещения реальной цепи дает возможность учитывать при расчете явление самоиндукции и явление накопления энергии в магнитном поле катушки.

Индуктивность L зависит от геометрических размеров контура (катушки) и от числа витков ω , но не зависит от величины тока, протекающего по катушке; измеряется L в $\text{в} \cdot \text{сек}/\text{а} = \text{ом} \cdot \text{сек} = \text{генри (гн)}$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} (Li) = L \frac{di}{dt}$$

и

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (4.7)$$

Таким образом, э. д. с. самоиндукции в катушке пропорциональна скорости изменения тока в этой катушке; э. д. с. самоиндукции равна нулю, если ток не изменяется.

Положительное направление э. д. с. совпадает с положительным направлением тока.

Знак минус в формуле (4.7) свидетельствует о том, что мгновенное значение э. д. с. отрицательно, если приращение тока положительно (если $\frac{di}{dt} > 0$).

Для катушек с ферромагнитным сердечником потокоцепление является нелинейной функцией тока $\psi(i)$ и э. д. с. самоиндукции по правилам дифференцирования сложной функции

$$e_L = -\frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = -L_d \frac{di}{dt}. \quad (4.8)$$

Производную $\frac{d\psi}{di}$ называют *дифференциальной индуктивностью* и обозначают L_d .

Дифференциальная индуктивность является функцией тока. Для подсчета e_L как функции времени по формуле (4.8) следует построить кривую $L_d = \frac{d\psi}{di} = f(i)$, а значения $\frac{di}{dt}$ находить путем либо аналитического, либо графического дифференцирования зависимости $i = f(t)$ по времени.

Значение e_L определяется произведением $\frac{di}{dt}$ на $\frac{d\psi}{di}$, соответствующих взятому моменту времени t .

Пример 34. Определить индуктивность катушки, равномерно намотанной на сердечник прямоугольного сечения (рис. 4.3), внутренний радиус которого $R_1 = 4 \text{ см}$, наружный $R_2 = 6 \text{ см}$, высота $h = 2 \text{ см}$; число витков $\omega = 1000$; $\mu = 80$ (сердечник из магнитодиэлектрика).

Решение. Напряженность поля в сердечнике по закону полного тока

$$H = \frac{I\omega}{2\pi R}.$$

Поток через полоску $h \, dR$, заштрихованную на рис. 4.3,

$$d\Phi = Bh \, dR = \frac{\mu_0 \mu / \omega h}{2\pi R} \, dR.$$

Полный поток

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 \mu / \omega h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{\mu_0 \mu / \omega h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Потокоосцепление

$$\psi = \omega \Phi.$$

Индуктивность

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.9)$$

Следовательно,

$$L = \frac{1000^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln \frac{6}{4} = 0,131 \text{ гн}.$$

Пример 35. По катушке примера 34 течет ток $i = I_m \sin \omega t$. Определить э. д. с. самоиндукции в катушке при $I_m = 0,1$ а и $\omega = 10^3$ сек⁻¹.
Р е ш е н и е.

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t;$$

$$e_L = -10^3 \cdot 0,131 \cdot 0,1 \cos \omega t = -13,1 \cos \omega t \text{ в}.$$

Пример 36. Определить индуктивность двухпроводной линии передачи длиной $l = 10$ км при расстоянии между проводами $d = 2$ м. Диаметр проводов 12 мм.

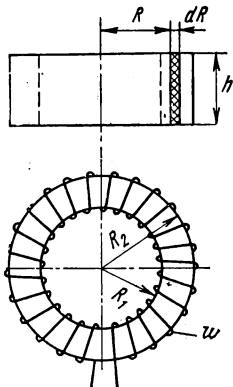


Рис. 4.3

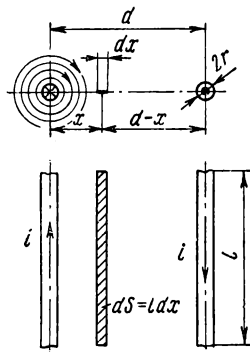


Рис. 4.4

Р е ш е н и е. Двухпроводная линия (рис. 4.4) представляет собой как бы один большой виток с током $i = I$. Напряженность поля в пространстве между проводами в произвольной точке на линии, соединяющей оси проводов, создается обоими проводами и равна сумме напряженностей, каждая из которых находится по закону полного тока:

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi (d-x)},$$

где $d - r \geq x \geq r$. Поток через элементарную площадку $ds = ldx$

$$d\Phi = Bds = Bl dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx.$$

Полный поток *

$$\Phi = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \left(\int_r^{d-r} \frac{dx}{x} + \int_r^{d-r} \frac{dx}{d-x} \right) = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \ln \frac{d-r}{r}.$$

Если $d \gg r$, то

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 Il}{\pi} \ln \frac{d}{r}$$

и

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r}. \quad (4.10)$$

Подставим числовые значения:

$$L = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{\pi} \ln \frac{200}{0,6} = 0,0232 \text{ гн.}$$

§ 4.3. ЯВЛЕНИЕ ВЗАИМОИНДУКЦИИ И Э.Д.С. ВЗАИМОИНДУКЦИИ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

Явление наведения э. д. с. в каком-либо контуре при изменении тока в другом контуре называют *взаимоиндукцией*.

Наведенную (индуктированную) э. д. с. называют э. д. с. *взаимоиндукции* и обозначают e_m . Пусть, например, есть два контура, удаленных на некоторое расстояние друг от друга (рис. 4.5). По первому контуру протекает ток i_1 , по второму — ток i_2 .

Поток Φ_1 создаваемый током i_1 , частично замыкается, минуя второй контур (Φ_{11}), частично проходит через него (Φ_{12}); **;

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}. \quad (4.11)$$

В свою очередь поток Φ_2 , создаваемый током i_2 , частично замыкается, минуя первый контур (Φ_{22}), частично проходит через него (Φ_{21}):

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (4.12)$$

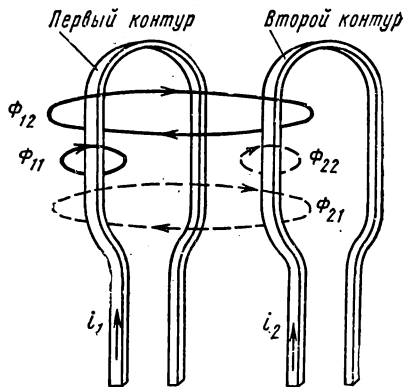


Рис. 4.5

* Потокосцеплением в проводах при решении задачи пренебрегаем. Считаем длину l достаточно большой по сравнению с d , что дает основание не учитывать поток поперечных сторон петли.

** Чтобы рис. 4.5 был более понятным, на нем изображено только по одной силовой линии каждого из потоков.

Потокосцепление первого контура (число витков его ω_1)

$$\psi_{1\text{полн}} = \omega_1 (\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \psi_1 \pm \psi_{21}. \quad (4.13)$$

Потокосцепление второго контура (число витков его ω_2)

$$\psi_{2\text{полн}} = \omega_2 (\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \psi_2 \pm \psi_{12}. \quad (4.14)$$

В выражениях (4.13) и (4.14), если поток взаимной индукции направлен согласно с потоком самоиндукции, создаваемым током данного контура, ставят знак плюс; при несогласном (встречном) направлении — знак минус.

Из опыта известно, что если сердечники катушек выполнены из неферромагнитных материалов или из ферромагнитных, но имеющих постоянную μ , то ψ_{21} пропорционально току i_2 , а ψ_{12} пропорционально i_1 .

Коэффициенты пропорциональности обозначают буквой M с соответствующими индексами. Так,

$$\psi_{21} = M_{21} i_2; \quad (4.15)$$

$$\psi_{12} = M_{12} i_1. \quad (4.16)$$

Коэффициенты M_{21} и M_{12} численно равны друг другу (доказательство в § 4.7):

$$M_{21} = M_{12} = M. \quad (4.17)$$

Коэффициент M называют *взаимной индуктивностью контуров* (катушек). Он имеет ту же размерность, что и индуктивность L .

Полная э. д. с., индуктируемая в первом контуре,

$$\begin{aligned} e_{1\text{полн}} &= - \frac{d\psi_{1\text{полн}}}{dt} = - \frac{d}{dt} (\psi_1 \pm \psi_{21}) = \\ &= - L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} + e_{1M}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

во втором контуре

$$e_{2\text{полн}} = - L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} + e_{2M}. \quad (4.19)$$

Э. д. с. взаимной индукции:

$$e_{1M} = \mp M \frac{di_2}{dt}; \quad (4.20)$$

$$e_{2M} = \mp M \frac{di_1}{dt}. \quad (4.21)$$

В выражениях (4.20) и (4.21) знак минус ставят при согласном направлении потоков самоиндукции и взаимной индукции, а знак плюс — при встречном. При таком обозначении взаимная индуктивность M — величина всегда положительная.

Как элемент схемы замещения реальной цепи M позволяет при расчете учесть явление взаимной индукции и явление накопления энергии в магнитном поле магнитно связанных катушек.

В литературе встречается и другой способ записи э. д. с. самоиндукции:

$$e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}; \quad (4.20')$$

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}; \quad (4.21')$$

принимают, что коэффициент M может быть либо положительным (при согласном направлении потоков самоиндукции и взаимной индукции), либо отрицательным (при встречном направлении потоков).

Взаимную индуктивность M определяют как отношение $\frac{\psi_{21}}{i_2}$ или $\frac{\psi_{12}}{i_1}$. Ни от ψ_{21} , ни от i_2 (и соответственно от ψ_{12} и i_1) порознь она не зависит, если сердечники катушек неферромагнитны или если сердечники выполнены из ферромагнитного материала с постоянной μ . Взаимная индуктивность M зависит только от взаимного расположения катушек, числа их витков, геометрических размеров катушек и от постоянной для данного сердечника μ .

При любой форме и любом расположении магнитносвязанных катушек взаимную индуктивность M между ними без затруднений можно определить опытным путем на переменном токе (см. § 5.38). Расчет же M при сложном распределении магнитного поля в силу трудностей математического характера производят лишь для катушек простейших геометрических форм.

Если магнитносвязанные катушки имеют ферромагнитные сердечники с непостоянной μ , например обмотки намотаны на одном сердечнике, μ которого является функцией результирующей напряженности магнитного поля, то M будет непостоянной величиной. Понятие взаимной индуктивности для таких катушек вследствие ее непостоянства избегают вводить.

Пример 37. На сердечник примера 34, кроме первой обмотки с числом витков $w_1 = 1000$, намотана вторая с $w_2 = 500$. Определить взаимную индуктивность между обмотками.

Решение. Если принять, что весь поток, созданный первой обмоткой, $\Phi = \frac{\mu_0 \mu w_1 h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi}$ (см. пример 34) пронизывает и вторую обмотку (потоком рассеяния пренебрегаем), то $\psi_{12} = w_2 \Phi$ и

$$M = \frac{\psi_{12}}{i_1} = \frac{\mu_0 \mu w_1 w_2 h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi}. \quad (4.22)$$

Подставляем числовые значения:

$$M = \frac{1,256 \cdot 10^{-9} \cdot 80 \cdot 1000 \cdot 500 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,41}{2\pi} = 0,0655 \text{ гн.}$$

§ 4.4. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ УЕДИНЕННОЙ КАТУШКИ

Подключим к источнику э. д. с. E индуктивную катушку с сопротивлением R и индуктивностью L . Пусть в момент времени $t = 0$ в ней $i = 0$ и $\psi = 0$.

По второму закону Кирхгофа,

$$E = u_R + u_L = iR + \frac{d\psi}{dt}. \quad (4.23)$$

Умножив обе части равенства (4.23) на idt , получим

$$Ei dt = i^2 R dt + id\psi. \quad (4.24)$$

Левая часть (4.24) представляет собой энергию, отдаваемую источником э. д. с. за время dt . Слагаемое $i^2 R dt$ — энергия, выделяющаяся в виде теплоты за время dt в сопротивлении R . Слагаемое $id\psi$ есть энергия, создающая магнитное поле уединенной неподвижной недеформирующейся катушки; обозначим ее dW_m :

$$dW_m = id\psi. \quad (4.25)$$

Полная энергия, запасенная в магнитном поле катушки при изменении ψ от 0 до ψ_m ,

$$W_m = \int_0^{\psi_m} id\psi.$$

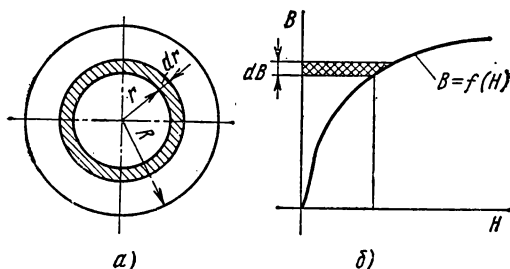


Рис. 4.6

Для катушек с неферромагнитным сердечником $\psi = Li$ и $d\psi = Ldi$. Поэтому

$$W_m = L \int_0^I idi = \frac{LI^2}{2}. \quad (4.26)$$

Здесь I — некоторое установившееся значение тока в цепи.

Пример 37а. По уединенному с постоянной μ цилиндрическому проводу радиусом R , длиной l протекает ток I (рис. 4.6, а). Вывести формулу для определения внутренней индуктивности провода, обусловленной потоко сцеплением в теле самого провода.

Решение. В соответствии с формулой (4.26) $L = \frac{2W_m}{I^2}$, где под W_m будем понимать магнитную энергию, запасенную в теле провода. В цилиндрическом пояске объемом $dV = 2\pi r l dr$ (заштрихован на рис. 4.6, а) запасена энергия $dW_m = \frac{HB}{2} dV$.

По закону полного тока напряженность поля H равна току $\frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$, охваченному окружностью радиусом r и деленному на длину окружности $2\pi r$. Поэтому $H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$. Индукция $B = \mu_a H$. Магнитная энергия

$$W_m = \int_0^R \frac{HB}{2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_a I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_a I^2 l}{16\pi}.$$

Отсюда

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_a l}{8\pi}.$$

§ 4.5. ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть на кольцевой сердечник, у которого отношение внутреннего радиуса к внешнему близко к единице *, равномерно намотано ω витков; l — длина средней линии сердечника. На основании закона полного тока $Hl = i\omega$ или $i = \frac{Hl}{\omega}$. В свою очередь $d\psi = \omega S dB$ и

$$W_m = \int_0^\psi i d\psi = \frac{l\omega S}{\omega} \int_0^B H dB = V \int_0^B H dB.$$

Разделив обе части равенства на объем сердечника V , получим плотность энергии магнитного поля:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \int_0^B H dB. \quad (4.27)$$

Если μ сердечника постоянно, то

$$B = \mu_0 \mu H \quad \text{и} \quad dB = \mu_0 \mu dH.$$

Следовательно, в каждой единице объема, занятого полем, запасена энергия магнитного поля

$$w_m = \mu_0 \mu \int_0^H H dH = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{HB}{2}. \quad (4.28)$$

Для ферромагнитного сердечника $\mu \neq \text{const}$. Поэтому при подсчете энергии единицы объема следует использовать формулу не (4.28), а (4.27). Произведению $H dB$ формулы (4.27) на рис. 4.6, б соответствует заштрихованная площадка. Весь же интеграл представляет собой площадь, ограниченную кривой $B = f(H)$, осью ординат и прямой $B = \text{const}$.

§ 4.6. ПОТЕРИ НА ГИСТЕРЕЗИС ЗА ОДИН ЦИКЛ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ

При периодическом намагничивании ферромагнитного материала в нем совершаются необратимые процессы, на которые расходуется энергия от намагничивающего источника. Потери в сердечнике состоят из потерь на гистерезис и на вихревые токи (потери на вихревые токи рассмотрены в § 9.4).

Физически потери на гистерезис обусловлены главным образом потерями от микроскопических вихревых токов при скачкообразных поворотах векторов намагниченности отдельных намагниченных областей (скачки Баркгаузена, известные из курса физики).

Площадь гистерезисной петли характеризует энергию, выделяющуюся в единице объема ферромагнитного вещества за один цикл перемангничивания.

* Благодаря этому можно с известным приближением считать, что напряженность поля H в теле сердечника во всех точках одна и та же.

Действительно, площадь гистерезисной петли равна $\oint H dB$ *. Чтобы убедиться в этом, представим площадь гистерезисной петли рис. 4.7 в виде суммы четырех площадей:

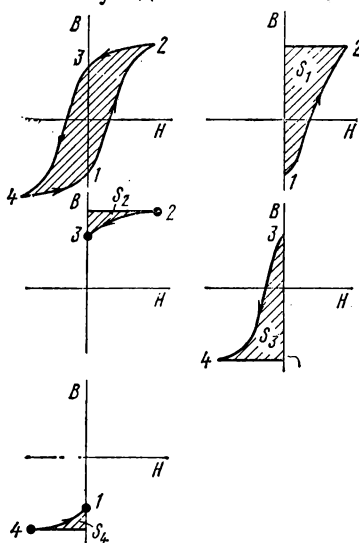


Рис. 4.7

$$\oint H dB = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Площадь S_1 соответствует движению от точки 1 до точки 2; так как на этом участке $H > 0$ и $dB > 0$, то произведение

$$H dB > 0 \text{ и } S_1 > 0.$$

Площадь S_2 характеризует движение от точки 2 до 3; так как в этом интервале $H > 0$ и $dB < 0$, то $S_2 < 0$.

Площадь S_3 — это движение от 3 до 4; $S_3 > 0$, так как $H < 0$ и $dB < 0$.

Площадь S_4 — движение от 4 до 1; $S_4 < 0$, так как $H < 0$ и $dB > 0$.

Если ферромагнитный сердечник подвергается периодическому намагничиванию (например, в цепях переменного тока), то для уменьшения потерь на гистерезис в нем он должен быть выполнен из магнитномягкого материала (§ 3.5).

§ 4.7. МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ ДВУХ МАГНИТНОВСЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Пусть имеются два неподвижных магнитно связанных контура, не изменяющих свои размеры и находящихся в неферромагнитной среде. Индуктивность первого контура L_1 , второго L_2 , взаимная индуктивность между контурами M . Подсчитаем магнитную энергию двух контуров для двух режимов, отличающихся только последовательностью установления токов i_1 и i_2 в контурах.

В первом режиме последовательность установления токов выберем следующую: сначала подключим первый контур к источнику э. д. с. при разомкнутом втором контуре, затем подключим второй контур к источнику э. д. с. и будем поддерживать ток первого контура постоянным.

Во втором режиме последовательность установления токов выберем следующую: подключим сначала к источнику э. д. с. второй контур при разомкнутом первом, а затем подключим первый, поддерживая постоянным ток второго контура.

Подсчитаем магнитную энергию контуров в первом режиме.

* Кругок на знаке интеграла свидетельствует о том, что $\oint H dB$ подсчитывается за полный цикл изменения B .

При росте тока i_1 в первом контуре от 0 до i_1 и разомкнутом втором контуре запасенная первым контуром магнитная энергия

$$\int_0^{i_1} i_1 d(L_1 i_1) = \frac{L_1 i_1^2}{2}.$$

При росте тока i_2 от 0 до i_2 и при $i_1 = \text{const}$ энергия запасается не только вторым, но и первым контуром. Энергия, запасаемая вторым контуром, $\int i_2 d\psi_2$. Но $\psi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1$ (положим, что имеет место согласное включение). Так как $i_1 = \text{const}$, то $d\psi_2 = L_2 di_2$ и

$$\int_0^{i_2} i_2 d\psi_2 = L_2 \int_0^{i_2} i_2 di_2 = \frac{L_2 i_2^2}{2}.$$

Рост тока i_2 вызывает изменение потокоцепления первого контура ψ_1 . Оно становится равным $\psi_1 = L_1 i_1 + M_{21} i_2$. Поэтому энергия, обусловленная потоком взаимной индукции,

$$\int_0^{i_2} i_1 M_{21} di_2 = M_{21} i_1 i_2.$$

Суммарная магнитная энергия двух магнитно связанных контуров при установлении токов в них по первому режиму

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{21} i_1 i_2.$$

Рассуждая совершенно аналогично, при установлении токов по второму режиму получим

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2.$$

Так как режимы отличаются только последовательностью установления токов, то магнитная энергия в этих режимах одинакова. Отсюда следует, во-первых, что

$$M_{21} = M_{12} = M, \quad (4.29)$$

и, во-вторых, что

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2. \quad (4.30)$$

Плюс перед слагаемым $M i_1 i_2$ соответствует согласному включению контуров, минус — встречному.

Пример 33. По обмотке w_1 примера 37 течет ток 0,5 а и по обмотке w_2 — ток 0,4 а. Определить магнитную энергию при согласном и при встречном направлениях потоков обмоток.

Решение. По формуле (4.9) определим индуктивность второй обмотки:

$$L_2 = 0,0327 \text{ гн.}$$

В соответствии с (4.30) при согласном направлении потоков

$$W_m = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2 = \frac{0,131 \cdot 0,5^2}{2} + \frac{0,0327 \cdot 0,4^2}{2} + 0,0655 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,032 \text{ Дж};$$

при встречном направлении потоков

$$W_m = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} - M i_1 i_2 = 0,00585 \text{ Дж}.$$

§ 4.8. ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Проделаем два опыта.

В первом из них изменяющийся во времени ток $i_1(t)$ пропустим по первой катушке (контуре) и измерим (подсчитаем) э. д. с. взаимной индукции, возникающую во второй катушке (контуре), магнитно связанной с первой. Эта э. д. с. будет равна

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Во втором опыте тот же ток (той же амплитуды и изменяющийся по тому же закону во времени, что и в первом опыте), назовем его $i_2(t)$, пропустим по второй катушке и измерим (подсчитаем) э. д. с. взаимной индукции, возникающую в первой катушке. Эта э. д. с. будет равна

$$e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}.$$

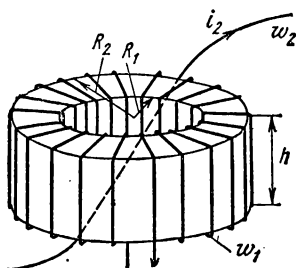


Рис. 4.8

По условию опыта, $i_1(t) = i_2(t)$, поэтому $e_{1M} = e_{2M}$, т. е. э. д. с. взаимной индукции в описанных опытах одинаковы. Это положение принято называть *принципом взаимности взаимной индукции*.

Так как $M_{12} = M_{21} = M$, то при определении M следует выбирать наиболее простой и удобный путь из двух возможных.

Пусть, например, через равномерно нанесенную на сердечник обмотку проходит произвольно расположенный внутри сердечника провод (рис. 4.8). Этот провод является частью одновиткового контура, полностью не показанного на рисунке. Требуется найти аналитическое выражение для M между обмоткой на сердечнике и одновитковым контуром. Это можно сделать двумя путями.

Первый путь: мысленно пропустим по первому контуру (обмотке w_1 сердечника) ток i_1 , найдем потокосцепление второго (одновиткового) контура ψ_{12} с потоком первого и определим

$$M = \frac{\psi_{12}}{i_1}.$$

Второй путь: мысленно пропустим по второму (одновитковому) контуру (обмотке $w_2 = 1$) ток i_2 , найдем потокосцепление первого контура ψ_{21} с потоком второго и определим

$$M = \frac{\psi_{21}}{i_2}.$$

В расчетном отношении эти пути не эквивалентны. Первый путь много проще второго. Объясняется это тем, что поток, создаваемый первым контуром, весь замыкается внутри сердечника и полностью сцепляется с одновитковым контуром, и потоко-сцепление Ψ_{12} можно легко найти. Найти же поток, создаваемый одновитковым контуром и сцепляющийся со вторым контуром, если провод расположен внутри сердечника произвольно, весьма затруднительно.

Поток сердечника

$$\Phi_1 = \frac{i_1 \mu_0 \mu w_1 h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{i_1 \mu_0 \mu w_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Потоко-сцепление

$$\Psi_{12} = w_2 \Phi_1 = 1 \cdot \Phi_1 = \Phi_1$$

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{\mu_0 \mu w_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.31)$$

Пример 39. Через сердечник примера 34 пропущен одиночный провод. Найти M между одиночным проводом и обмоткой w .

Решение. По формуле (4.31) [ср. ее с (4.22)] при $w_2 = 1$

$$M = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,41}{2\pi} = 0,131 \text{ мГн}.$$

Пример 40. По одиночному проводу примера 39 проходит ток $i_2 = 100 (1 - e^{-2t})$ а. Определить э. д. с., наводимую в обмотке w_1 .

Решение.

$$e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt} = -0,131 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 2e^{-2t} = -0,0262e^{-2t} \text{ в}.$$

§ 4.9. КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ

Под коэффициентом связи k двух магнитно-связанных контуров с индуктивностями L_1 и L_2 и взаимной индуктивностью M понимают отношение M * к $\sqrt{L_1 L_2}$:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (4.32)$$

Можно доказать, что k не может быть больше единицы. Для этого составим выражение для k^2 , и если выяснится, что $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1$, то и $k \leq 1$. Воспользовавшись обозначениями § 4.3, запишем

$$k^2 = \frac{MM}{L_1 L_2} = \frac{\frac{w_2 \Phi_{12}}{i_1} \cdot \frac{w_1 \Phi_{21}}{i_2}}{\frac{w_1 (\Phi_{12} + \Phi_{11})}{i_1} \cdot \frac{w_2 (\Phi_{21} + \Phi_{22})}{i_2}} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{(\Phi_{12} + \Phi_{11}) (\Phi_{21} + \Phi_{22})} < 1;$$

k^2 будет равно 1 только в случае, если весь поток, создаваемый первым контуром, будет сцепляться со вторым.

* Заметим, что M может быть больше L_1 (или L_2), но не может быть больше и L_1 и L_2 .

§ 4.10. МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ КОНТУРОВ С ТОКАМИ

Запишем общее выражение для магнитной энергии системы магнитно связанных контуров. С этой целью уравнение (4.30) перепишем следующим образом:

$$W_m = \frac{L_1 i_1^2}{2} \pm \frac{M i_1 i_2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm \frac{M i_1 i_2}{2} = \frac{(L_1 i_1 \pm M i_2) i_1}{2} + \frac{(L_2 i_2 \pm M i_1) i_2}{2} = \frac{i_1 \Psi_1}{2} + \frac{i_2 \Psi_2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 i_k \Psi_k.$$

Аналогичное выражение будет иметь место, если магнитно связанные не два, а n контуров:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \Psi_k, \quad (4.33)$$

где Ψ_k представляет собой полное потокоцепление k -контура.

§ 4.11. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Кроме явления электромагнитной индукции (см. § 4.1), важнейшим свойством магнитного поля является механическое взаимодействие его с электрическим током. Оно было обнаружено еще в 20-х годах прошлого столетия (опыты Эрстеда и Ампера). Эксперимент показывает, что магнитное поле индукции \vec{B} (рис. 4.9) взаимодействует с элементом тока $I d\vec{l}$ с силой

$$\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (4.34)$$

Эта сила перпендикулярна $d\vec{l}$ и \vec{B} . Если угол между $d\vec{l}$ и \vec{B} равен нулю, то векторное произведение $[d\vec{l} \vec{B}]$ также равно нулю и магнитное поле не оказывает механического воздействия на элемент тока $I d\vec{l}$. Сила максимальна, если \vec{B} и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны.

Механическое воздействие поля на ток объясняется стремлением силовых линий, искаженных внесением провода, выпрямиться.

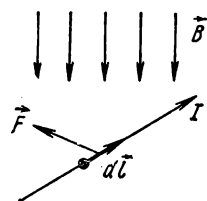


Рис. 4.9

На рис. 4.10 изображены: *a* — силовые линии равномерного магнитного поля до внесения в него провода с током; *б* — силовые линии уединенного провода с током; *в* — силовые линии результирующего поля. Слева от провода силовые линии собственного поля направлены встречно силовым линиям внешнего

равномерного поля, а справа — согласно с ним. Поэтому результирующее поле слева от провода разрежено, а справа сгущено. Силовые линии, стремясь выпрямиться, производят давление на провод справа налево.

Обратим внимание на то, что силовая линия, показанная пунктиром на рис. 4.10, в, является как бы граничной между силовыми линиями, расположенными справа и слева от провода. В точке с этой линии магнитная индукция равна нулю.

При взаимно перпендикулярном расположении магнитного поля и провода с током направление действия силы часто определяют по мнемоническому правилу, получившему название *правила левой руки*: если расположить левую руку таким образом, что силовые линии будут входить в ладонь, вытянутые пальцы направить по току, то отогнутый большой палец покажет направление действующей силы.

Взаимодействие поля с током имеет место независимо от причин возникновения маг-

нитного поля, в результате ли протекания макротоков в электрических контурах, или вследствие протекания микротоков в ферромагнитных материалах, или потока электронов в вакуумном приборе и т. п. Оно наблюдается как в постоянном, так и в изменяющемся во времени поле.

Механические силы, возникающие в магнитном поле, иногда называют электродинамическими силами, подчеркивая, что под действием этих сил в системе может возникнуть перемещение тел, т. е. динамический процесс.

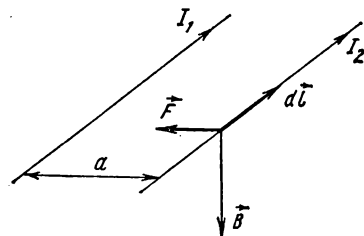


Рис. 4.11

Пример 41. На рис. 4.11 изображены два параллельных провода, расстояние между которыми $a = 10$ см. По первому проводу течет ток $I_1 = 1000$ а, по второму — $I_2 = 500$ а (направления токов показаны стрелками). Определить силу взаимодействия между проводами на длине 1 м.

Решение. Воспользуемся формулой (4.34). Учтем, что угол между элементом длины второго провода \vec{dl} и индукцией \vec{B} от левого провода равен 90° .

Поэтому модуль векторного произведения $[\vec{dl}\vec{B}]$ равен $dlB \sin 90^\circ = dlB$.

Магнитная индукция B , создаваемая первым проводом в точках, где расположен второй провод, по закону полного тока равна $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Сила

$$F = I_2 \int dl B = \frac{I_1 I_2 \mu_0 l}{2\pi a};$$

$$F = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2\pi \cdot 0,1} \approx 1 \text{ н.}$$

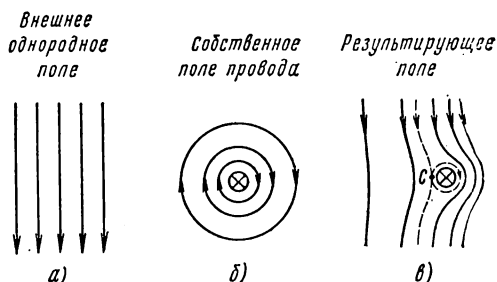


Рис. 4.10

Под действием силы провода стремятся сблизиться.

Принято говорить, что магнитное поле оказывает механическое воздействие на проводник с током, помещенный в это поле. Это требует некоторых уточнений. Магнитное поле механически воздействует на упорядоченно движущиеся в проводнике носители зарядов (силы Лоренца — см. § 4.1), а уже эти носители зарядов, сталкиваясь при своем упорядоченном движении с другими частицами вещества проводника, передают силу самому проводнику.

§ 4.12. ВЫРАЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИЛЫ В ВИДЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО КООРДИНАТЕ

Возьмем систему из n контуров с токами. Пусть один из контуров под действием механической силы F на него со стороны остальных контуров перемещается так, что координата x его изменяется на величину dx . Требуется выяснить, какая связь существует между силой F и изменением энергии магнитного поля системы dW_m .

Для какого-то k -контюра системы запишем уравнение [ср. с уравнением (4.23)]

$$e_k = i_k R_k + \frac{d\psi_k}{dt}, \quad (4.35)$$

где ψ_k — полное потокоцепление k -контюра. Оно зависит не только от тока i_k в k -контуре, но и от токов других контуров, магнитно связанных с k -контуром.

Умножим (4.35) на $i_k dt$:

$$e_k i_k dt = i_k^2 R_k dt + i_k d\psi_k.$$

Запишем аналогичные уравнения для остальных контуров и просуммируем их:

$$\sum_{k=1}^n e_k i_k dt = \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k. \quad (4.36)$$

Слагаемое $\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k$ представляет собой ту часть энергии, которую получают

все цепи от источников э. д. с. за вычетом тепловых потерь.

При перемещении какого-то контюра на расстояние dx изменяется магнитная энергия системы W_m на величину dW_m и совершается механическая работа Fdx , где F — составляющая силы, действующая по направлению x .

Из закона сохранения энергии следует, что энергия, доставляемая источниками э. д. с. за время dt , должна равняться энергии, выделяющейся за то же время в виде теплоты в сопротивлениях контюра, плюс энергия, которая затрачена на покрытие механической работы Fdx , плюс приращение энергии магнитного поля dW_m :

$$\sum_{k=1}^n e_k i_k dt = \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + F dx + dW_m. \quad (4.37)$$

При сопоставлении (4.36) и (4.37) получим

$$\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = F dx + dW_m. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) означает, что механическая работа и приращение энергии магнитного поля совершаются за счет той части энергии $\sum_{k=1}^n e_k i_k dt$ источников, которую последние отдают в цепи, за вычетом тепловых потерь. Из (4.38) получаем

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k - dW_m}{dx}. \quad (4.39)$$

Уравнение (4.39) является довольно общим. Из него вытекают два важных частных случая.

1. Пусть перемещение происходит таким образом, что потокоцепления контуров остаются неизменными. При этом $d\psi_k = 0$; $Fdx = -dW_m$ и

$$F = -\frac{dW_m}{dx}. \quad (4.40)$$

2. Пусть перемещение происходит так, что токи в контурах остаются неизменными ($i_k = \text{const}$). Это возможно, например, когда перемещение происходит настолько быстро, что токи не успевают измениться.

Из предыдущего [см. формулу (4.33)] следует, что

$$W_m = \frac{1}{2} \sum i_k \psi_k.$$

Следовательно,

$$dW_k = \frac{1}{2} d \sum i_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum i_k d\psi_k. \quad (4.41)$$

Подставим (4.41) в (4.39):

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k}{dx} = \frac{dW_m}{dx}. \quad (4.42)$$

Во втором частном случае выражение для механической силы отличается от (4.40) лишь знаком.

При $i_k = \text{const}$ доставляемая в цепи от источников э. д. с. энергия за вычетом тепловых потерь делится на две равные части. Одна часть идет на приращение энергии магнитного поля dW_m , другая — на механическую работу $F dx$. Уравнения (4.40) и (4.42) часто используют для нахождения механической силы. Чтобы найти силу F , надо либо составить аналитическое выражение для магнитной энергии системы и продифференцировать его по изменяющейся координате, либо опытным путем снять зависимость магнитной энергии от изменяющейся координаты и затем графически продифференцировать ее.

Если в поле двух катушек при изменении координаты x L_1 и L_2 остаются постоянными и меняется только M , то $F = I_1 I_2 \frac{dM}{dx}$.

§ 4.13. СИЛА ТЯГИ ЭЛЕКТРОМАГНИТА

Пусть якорь электромагнита на некоторое расстояние x удален от ярма (рис. 4.12). И якорь, и ярмо выполнены из магнитномягкого материала и ненасыщены. Обозначим площадь поперечного сечения *двух* воздушных зазоров через S . Подсчитаем энергию магнитного поля, запасенную в воздушном зазоре, пренебрегая выпучиванием силовых линий.

Магнитная энергия в воздушном зазоре будет равна произведению плотности энергии $\frac{BH}{2}$ на объем воздушного зазора (в. з) Sx , занятый магнитным полем:

$$W_{m. \text{ в. з. }} = \frac{BH}{2} Sx.$$

Так как и якорь, и ярмо выполнены из магнитномягкого материала и ненасыщены, напряженность поля в них в сотни и даже тысячи раз меньше, чем напряженность поля в воздушном зазоре при одной и той же магнитной индукции. Следовательно, магнитная энергия в якоре и ярме, если воздушный зазор не очень мал,

составляет лишь небольшую часть от магнитной энергии, запасенной в воздушном зазоре:

$$W_{\text{м}} = W_{\text{в.з}} + W_{\text{як. и ярма}} \approx W_{\text{в.з.}}$$

Для определения силы воспользуемся формулой (4.40), т. е. подсчитаем силу при условии неизменности магнитного потока:

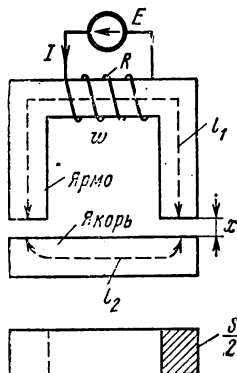


Рис. 4.12

$$F = \left| \frac{dW_{\text{м}}}{dx} \right| = \frac{BH}{2} S = \frac{B_2}{2\mu_0} S.$$

Подставим $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ гн/м и возьмем B в тл. Получим

$$F_{\text{н}} = 0,398 \cdot 10^6 \cdot B_{\text{тл}}^2 S_{\text{м}^2}. \quad (4.43)$$

Физически якорь и ярмо стремятся сблизиться вследствие возникновения механической силы в результате взаимодействия микротоков в якорь с микротоками в ярме.

Пример 42. Сопротивление R обмотки электромагнита ($\omega = 900$) (см. рис. 4.12) равно 13,8 ом.

Пренебрегая потоком рассеяния и выпучиванием магнитных линий в зазоре, определить величину э. д. с. E источника питания, при которой якорь электромагнита будет притягиваться к ярму с силой $F = 100 \text{ кг} = 981 \text{ н}$; $S = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см}^2$; $l_1 = 55 \text{ см}$; $x = 0,2 \text{ см}$; $l_2 = 15 \text{ см}$.

Якорь и ярмо выполнены из магнитопягкого материала, кривая намагничивания которого дана на рис. 3.9.

Решение. По формуле (4.43) находим

$$B = \sqrt{\frac{F}{0,398 \cdot 10^6 \cdot S}} = \sqrt{\frac{981}{0,398 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-4}}} = 0,785 \text{ тл.}$$

По закону полного тока, $\Sigma U_{\text{м}} = I\omega$:

$$\Sigma U_{\text{м}} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_{\text{тл}} \cdot 2x + (l_1 + l_2) H_c = 0,8 \cdot 0,785 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 0,7 \cdot 120 = 2589 \text{ а.}$$

Ток

$$I = \frac{\Sigma U_{\text{м}}}{\omega} = \frac{2589}{900} = 2,873 \text{ а.}$$

Э. д. с.

$$E = IR = 40 \text{ в.}$$

§ 4.14. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНЕРЦИИ. ПРАВИЛО ЛЕНЦА

В 1883 г. русский академик Э. Х. Ленц установил закон электромагнитной инерции, получивший название **закон а или п р а в и л а Л е н ц а**. Формулируется он следующим образом: *при всяком изменении магнитного потока, сцепляющегося с каким-либо проводящим контуром, в последнем возникают силы электрического и механического характера, стремящиеся сохранить постоянство магнитного потока.*

* Силу вычисляем по модулю.

Если вычислить силу по формуле (4.42) исходя из неизменности тока и считать $H_{\text{в.з}} 2x = I\omega$, то можно убедиться в том, что она будет обратно пропорциональна квадрату расстояния x :

$$F = \frac{(I\omega)^2 \mu_0 S}{8x^2}.$$

«Сила электрического характера» означает, что при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с замкнутым проводящим контуром, в этом контуре возникает индуцированная э. д. с., которая стремится вызвать в контуре ток, препятствующий изменению потокоцепления контура.

Механическая сила, действующая на контур, препятствует изменению линейных размеров контура или повороту контура.

Пример 43. Перпендикулярно равномерному и неизменному во времени магнитному полю (рис. 4.13) индукции $B = 1,5 \text{ тл}$ расположен прямой провод длиной $l = 0,5 \text{ м}$. Гибкими проводниками он соединен с нагрузкой R_n . Полное сопротивление замкнутого контура $R = 20 \text{ ом}$.

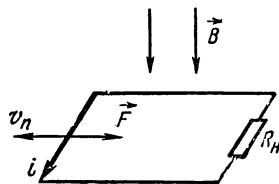


Рис. 4.13

Если провод будет неподвижен, то в нем не наведется э. д. с. и на него не будет действовать механическая сила.

Если же провод начнет двигаться, например, влево со скоростью $v_n = 10 \text{ м/сек}$, так что контур будет оставаться замкнутым, то в нем наведется э. д. с. [см. формулу (4.5)]

$$e = Blv_n = 1,5 \cdot 0,5 \cdot 10 = 7,5 \text{ в} \quad (a)$$

и по проводу пойдет ток

$$i = \frac{e}{R} = 0,375 \text{ а.} \quad (б)$$

При движении провода влево поток в контуре от внешнего магнитного поля возрастает. Индуцированный ток (направлен по часовой стрелке) вызывает магнитное поле, направленное встречно внешнему полю, и *препятствует* росту потока контура.

На провод действует механическая сила. Эта сила направлена противоположно скорости v_n и также *стремится сохранить* постоянство магнитного потока.

Формула (б) приближенна. Если учесть, что потокоцепление контура создано не только внешним магнитным полем индукции B , но и током i , протекающим по контуру, а также то, что с увеличением длины боковых сторон контура изменяется индуктивность L контура, то, по второму закону Кирхгофа,

$$Blv_n + L \frac{dl}{dt} + i \frac{dL}{dt} + iR = 0. \quad (в)$$

За положительное направление тока в формуле (в) принято направление против часовой стрелки, противоположное направлению для формулы (б). Формула (б) следует из (в), если второе и третье слагаемые формулы (в) по модулю много меньше первого и четвертого слагаемых.

§ 4.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА, СОЗДАННОГО В НЕКОТОРОМ КОНТУРЕ НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ ТЕЛОМ

Положим, что ферромагнитное тело (например, кусочек ферромагнитной пленки) высотой Δl , площадью поперечного сечения ΔS , намагниченностью \vec{J} ($\Delta \vec{S} \parallel \vec{J}$) расположен вблизи контура a (см. рис. 4.14, а). Требуется найти поток, создаваемый ферромагнитным телом и пронизывающий контур a .

В соответствии с § 3.24 заменим ферромагнитное тело одновитковой эквивалентной катушкой высотой Δl , площадью ΔS , по которой протекает ток $\delta \vec{I} = \vec{J} d\vec{l}$ (магнитный момент катушки равен магнитному моменту ферромагнитного тела), рис. 4.14, б ($\Delta \vec{l} = d\vec{l}$).

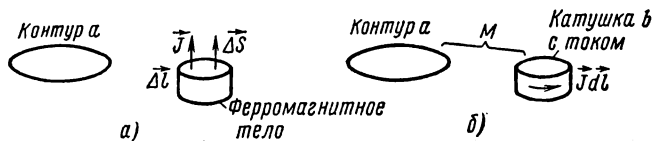


Рис. 4.14

Эта катушка с током создает в контуре a потокоосцепление, равное произведению тока катушки $\vec{J} d\vec{l}$ на взаимную индуктивность M между контуром a и эквивалентной катушкой b в условиях отсутствия ферромагнетиков:

$$\psi = \vec{J} d\vec{l} M.$$

M может быть найдено расчетным или экспериментальным путем.

Если намагниченность тела \vec{J} плавно изменяется по высоте, то тело следует разбить на участки $d\vec{l}_k$ со ступенчато изменяющейся \vec{J} , каждый k -участок тела заменить одновитковой катушкой K со средним по высоте этой катушки током $\vec{J}_k d\vec{l}_k$ и найти

$$\psi = \sum M_k \vec{J}_k d\vec{l}_k,$$

где M_k — взаимная индуктивность катушки K с контуром a .

Глава пятая

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

§ 5.1. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЕГО ВЕЛИЧИНЫ

Синусоидальный ток представляет собой ток, изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \psi \right) = I_m \sin (\omega t + \psi). \quad (5.1)$$

График его дан на рис. 5.1. Максимальное значение функции называют *амплитудой*. Амплитуду тока обозначают I_m ; *период* T — это время, за которое совершается одно полное колебание.

Частота равна числу колебаний в 1 сек:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5.2)$$

Измеряют f в сек^{-1} или герцах (гц). Угловую частоту

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (5.3)$$

измеряют в рад/сек или сек^{-1} .

Аргумент синуса, т. е. величину $(\omega t + \psi)$, называют *фазой*. Фаза характеризует состояние колебания (т. е. числовое значение) в данный момент времени t .

Любая синусоидально изменяющаяся функция определяется тремя величинами: амплитудой, угловой частотой и начальной фазой.

В СССР и в Западной Европе наибольшее распространение получили установки синусоидального тока частотой 50 гц , принятой в энергетике за стандартную. В США стандартной является частота 60 гц . Диапазон частот практически применяемых синусоидальных токов очень широк: от долей герца, например в геологоразведке, до миллиардов герц в радиотехнике.

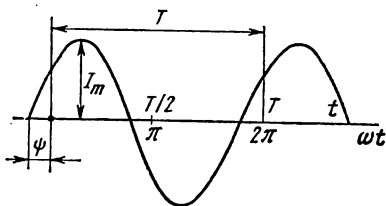


Рис. 5.1

Синусоидальные токи и э. д. с. сравнительно низких частот (приблизительно до нескольких килогерц) получают обычно с помощью синхронных генераторов (их изучают в курсе электрических машин). Синусоидальные токи и э. д. с. высоких частот получают с помощью ламповых или полупроводниковых генераторов (подробно рассматриваемых в курсе радиотехники и менее подробно в курсе ТОЭ). Принцип получения синусоидальной э. д. с. путем вращения витка

с постоянной угловой скоростью в равномерном магнитном поле рассматривался в примере 33 (при $\alpha = 0$).

Генератор синусоидальной э. д. с. на электрических схемах обозначают в виде кружка со знаком синусоиды \sim и нанесенной рядом с ней стрелкой, показывающей направление, принятое для э. д. с. за положительное.

§ 5.2. СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Под *средним значением* синусоидально изменяющейся величины понимают среднее значение ее за полпериода. Так, среднее значение тока

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} I_m, \quad (5.4)$$

т. е. среднее значение синусоидального тока составляет $\frac{2}{\pi} = 0,638$ от амплитудного. Аналогично

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} E_m; \quad U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m.$$

Очень широко применяют понятие действующего значения синусоидально изменяющейся величины (его называют также эффективным или среднеквадратичным). Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (5.5)$$

Следовательно, действующее значение синусоидального тока равно 0,707 от амплитуды. Аналогично

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Можно сопоставить тепловое действие синусоидального тока с тепловым действием постоянного тока $I_{\text{пост}}$, текущего то же время по тому же сопротивлению.

Количество теплоты, выделенное за один период синусоидальным током,

$$\int_0^T Ri^2 \, dt = RI_m^2 \frac{T}{2}.$$

Выделенная за то же время постоянным током теплота равна $RI_{\text{пост}}^2 T$. Приравняем их:

$$RI_m^2 \frac{T}{2} = RI_{\text{пост}}^2 T \quad \text{или} \quad I_{\text{пост}} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, *действующее значение* синусоидального тока I численно равно значению такого постоянного тока, который за время,

равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток.

Большинство измерительных приборов показывает действующее значение измеряемой величины*.

§ 5.3. КОЭФФИЦИЕНТ АМПЛИТУДЫ И КОЭФФИЦИЕНТ ФОРМЫ

Коэффициент амплитуды k_a — это отношение амплитуды периодически изменяющейся функции к ее действующему значению. Так, для синусоидального тока

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}. \quad (5.6)$$

Под коэффициентом формы k_ϕ понимают отношение действующего значения периодически изменяющейся функции к ее среднему за полпериода значению. Для синусоидального тока

$$k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11^{**}. \quad (5.7)$$

Иногда пользуются понятием коэффициента формы несинусоидальной функции, определенным следующим образом:

$$k'_\phi = \frac{I}{I_{cp} \text{ по модулю}},$$

где I_{cp} — среднее по модулю значение тока.

§ 5.4. ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН ВЕКТОРАМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. КОМПЛЕКСНАЯ АМПЛИТУДА. КОМПЛЕКС ДЕЙСТВУЮЩЕГО ЗНАЧЕНИЯ

На рис. 5.2 дана комплексная плоскость, на которой можно изобразить комплексные числа. Комплексное число имеет действительную (вещественную) и мнимую части. По оси абсцисс комплексной плоскости будем откладывать действительную часть комплексного числа, а по оси ординат — мнимую часть. На оси действительных значений ставим значок $+1$, а на оси мнимых значений — значок $+j$ ($j = \sqrt{-1}$).

Из курса математики известна формула Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (5.8)$$

Комплексное число $e^{j\alpha}$ изображают на комплексной плоскости вектором, численно равным единице и составляющим угол α с осью

* Действующее значение измеряют приборами электромагнитной, электродинамической и тепловой систем. Принцип действия измерительных приборов различных систем изучают в курсе электрических измерений.

** Для несинусоидальных периодических токов $k_a \neq \sqrt{2}$ и $k_\phi \neq 1,11$. Это отклонение косвенно свидетельствует о том, насколько несинусоидальный ток отличается от синусоидального.

вещественных значений (осью $+1$). Угол α отсчитываем против часовой стрелки от оси $+1$. Модуль функции $e^{j\alpha}$ равен единице. Действительно,

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

Проекция функции $e^{j\alpha}$ на ось $+1$ равна $\cos \alpha$, а на ось $+j$ равна $\sin \alpha$. Если вместо функции $e^{j\alpha}$ взять функцию $I_m e^{j\alpha}$, то

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos \alpha + j I_m \sin \alpha.$$

На комплексной плоскости эта функция, так же как и функция $e^{j\alpha}$, изобразится под углом α к оси $+1$, но величина вектора будет в I_m раз больше.

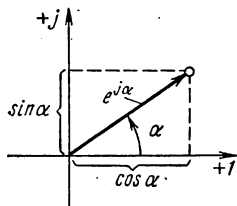


Рис. 5.2

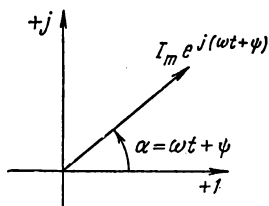


Рис. 5.3

Угол α в формуле (5.8) может быть любым. Положим, что $\alpha = \omega t + \psi$, т. е. что угол α изменяется прямо пропорционально времени. Тогда

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (5.9)$$

Слагаемое $I_m \cos(\omega t + \psi)$ представляет собой действительную часть (Re) выражения $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$:

$$I_m \cos(\omega t + \psi) = \text{Re } I_m e^{j(\omega t + \psi)}, \quad (5.10a)$$

а функция $I_m \sin(\omega t + \psi)$ есть коэффициент при мнимой части (Im) выражения $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$, т. е.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \text{Im } I_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (5.10b)$$

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток i [ср. формулы (5.1) и (5.10b)] можно представить как $\text{Im } I_m e^{j(\omega t + \psi)}$, или, что то же самое, как проекцию вращающегося вектора $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ на ось $+j$ (рис. 5.3).

Исторически сложилось так, что в радиотехнической литературе за основу обычно принимают не синусоиду, а косинусоиду и потому пользуются формулой (5.10a).

С целью единообразия принято на комплексной плоскости изображать векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени $\omega t = 0$. При этом вектор $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ равен

$$I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m, \quad (5.11)$$

где \dot{I}_m — комплексная величина; модуль ее равен I_m , а угол, под которым вектор \dot{I}_m проведен к оси $+1$ на комплексной плоскости, равен начальной фазе ψ .

Величину I_m называют *комплексной амплитудой* тока i . Комплексная амплитуда изображает ток i на комплексной плоскости для момента времени $\omega t = 0$.

Рассмотрим два числовых примера на переход от мгновенного значения тока к комплексной амплитуде и от комплексной амплитуды к мгновенному значению.

Пример 44. Ток $i = 8 \sin(\omega t + 20^\circ) a$. Записать выражение комплексной амплитуды этого тока.

В данном случае $I_m = 8 a$, $\psi = 20^\circ$. Следовательно, $I_m = 8e^{j20^\circ}$

Пример 45. Комплексная амплитуда тока $I_m = 25e^{-j30^\circ} a$. Записать выражение мгновенного значения этого тока.

Решение. Для перехода от комплексной амплитуды к мгновенному значению надо умножить I_m на $e^{j\omega t}$ и взять коэффициент при мнимой части от полученного произведения [см. формулу (5.105)]:

$$i = \operatorname{Im} 25e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} = \operatorname{Im} 25e^{j(\omega t - 30^\circ)} = 25 \sin(\omega t - 30^\circ).$$

Под *комплексом действующего значения тока*, или под *комплексом тока* (комплексным током), I понимают частное от деления комплексной амплитуды на $\sqrt{2}$:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = I e^{j\psi}. \quad (5.12)$$

Пример 46. Записать выражение комплекса действующего значения тока для примера 44: $I = \frac{8e^{j20^\circ}}{\sqrt{2}} = 5,67e^{j20^\circ} a$.

§ 5.5. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА

Положим, что необходимо сложить два тока (i_1 и i_2) с одинаковой частотой. Сумма их дает некоторый ток с такой же частотой:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2; \\ i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2); \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Требуется найти амплитуду I_m и начальную фазу ψ тока i . С этой целью ток i_1 изобразим на комплексной плоскости (рис. 5.4) вектором $I_{1m} = I_{1m}e^{j\psi_1}$, а ток i_2 — вектором $I_{2m} = I_{2m}e^{j\psi_2}$. Геометрическая сумма векторов I_{1m} и I_{2m} даст комплексную амплитуду суммарного тока $I_m = I_me^{j\psi}$. Амплитуда тока I_m будет определяться длиной суммарного вектора, а начальная фаза ψ — углом, образованным этим вектором и осью $+1$.

Для определения разности двух токов (или э. д. с., напряжений) надо на комплексной плоскости произвести не сложение, а вычитание соответствующих векторов.

Обратим внимание на то, что если бы векторы I_{1m} , I_{2m} и I_m , изображенные на рис. 5.4, стали вращаться вокруг начала координат

с угловой скоростью ω , то взаимное расположение векторов по отношению друг к другу осталось бы без изменений.

Векторной диаграммой называют совокупность векторов на комплексной плоскости, изображающих синусоидально изменяющиеся функции времени одной и той же частоты и построенных с соблюдением правильной ориентации их относительно друг друга по фазе. Пример векторной диаграммы дан на рис. 5.4.

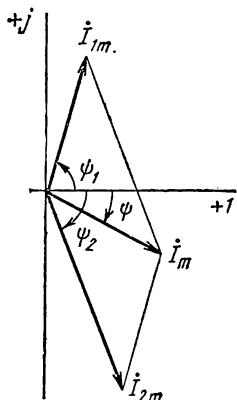


Рис. 5.4

§ 5.6. МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ

Протекание синусоидальных токов по участкам электрической цепи сопровождается потреблением энергии от источников. Скорость поступления энергии характеризуется мощностью. Под мгновенным значением мощности, или *мгновенной мощностью*, понимают произведение мгновенного значения напряжения u на участке цепи на мгновенное значение тока i , протекающего по этому участку:

$$p = ui, \quad (5.13)$$

где p — функция времени.

Перед тем как приступить к изучению основ расчета сложных цепей синусоидального тока, рассмотрим соотношения между токами и напряжениями в простейших цепях, векторные диаграммы для них и кривые мгновенных значений различных величин.

Составными элементами цепей синусоидального тока являются активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C .

Термин «сопротивление» для цепей синусоидального тока в отличие от цепей постоянного тока недостаточно полный, поскольку сопротивление переменному току оказывают не только те элементы цепи, в которых выделяется энергия в виде теплоты (их называют *активными сопротивлениями*), но и те элементы цепи, в которых энергия в виде теплоты не выделяется, но периодически запасается в электрическом или магнитном полях. Такие элементы цепи называют *реактивными*, а их сопротивления переменному току — *реактивными сопротивлениями*. Реактивным сопротивлением обладают индуктивности и емкости (подробнее см. § 5.8 и 5.9).

§ 5.7. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК В АКТИВНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

На рис. 5.5, *a* изображено активное сопротивление R , по которому течет ток $i = I_m \sin \omega t$. По закону Ома, напряжение

$$u = iR = RI_m \sin \omega t,$$

или

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (5.14)$$

где $U_m = RI_m$.

Комплекс тока I и совпадающий с ним по фазе комплекс напряжения U показаны на векторной диаграмме рис. 5.5, б.

На рис. 5.5, в даны кривые мгновенных значений тока i , напряжения u и мощности

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую $\frac{U_m I_m}{2}$ и составляющую $\frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t$, изменяющуюся с частотой 2ω . Потребляемая от источника питания за время dt энергия равна $p dt$.

§ 5.8. ИНДУКТИВНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Практически любая обмотка (катушка) обладает некоторой индуктивностью L и активным сопротивлением R . На схеме катушку можно представить в виде последовательно соединенных индуктивности L и активного сопротивления R .

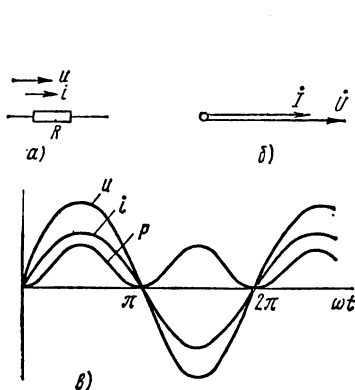


Рис. 5.5

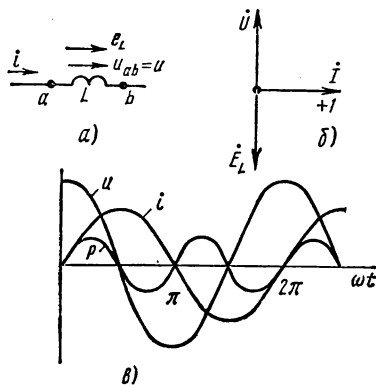


Рис. 5.6

Выделим из схемы одну индуктивность L (без активного сопротивления) — рис. 5.6, а. Если через L течет ток $i = I_m \sin \omega t$, то в катушке наводится э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin (\omega t - 90^\circ).$$

Положительное направление отсчета для э. д. с. e_L на рис. 5.6, а обозначено стрелкой, совпадающей с положительным направлением отсчета тока i .

Найдем разность потенциала между точками a и b .

При перемещении от точки b к точке a идем навстречу э. д. с. e_L , поэтому $\varphi_a = \varphi_b - e_L$, следовательно, $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -e_L = L \frac{di}{dt}$.

* Из формулы $u_L = L \frac{di}{dt}$ следует, что $i = \Gamma \int u_L dt$, где $\Gamma = \frac{1}{L}$ — инверсная индуктивность.

Положительное направление напряжения u_{ab} совпадает с положительным направлением тока.

В дальнейшем индексы a и b у напряжения на индуктивности (падения напряжения на индуктивности) ставить не будем:

$$u_{ab} = u = -e_L. \quad (5.15)$$

Следовательно,

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ); \quad (5.16)$$

$$U_m = \omega L I_m.$$

Произведение ωL обозначают X_L и называют *индуктивным сопротивлением*:

$$X_L = \omega L; \quad (5.17)$$

размерность его $[X_L] = [\omega][L] = \text{сек}^{-1} \cdot \text{ом} \cdot \text{сек} = \text{ом}$.

Таким образом, индуктивность оказывает переменному току сопротивление $X_L = \omega L$. Оно прямо пропорционально частоте. Кроме того, напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90° [см. формулу (5.16)] — на рис. 5.6, б вектор напряжения \vec{U} опережает вектор тока \vec{I} на 90° . Комплекс э. д. с. самоиндукции \vec{E}_L находится в противофазе с комплексом напряжения \vec{U} .

Графики мгновенных значений i , u , p изображены на рис. 5.6, в. Мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \cos \omega t I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t. \quad (5.18)$$

проходит через нулевое значение, когда через нуль проходит либо u , либо i . За первую четверть периода, когда u и i положительны, p также положительна. Площадь, ограниченная кривой p и осью абсцисс за это время, представляет собой энергию, которая взята от источника питания на создание энергии магнитного поля в индуктивности. Во вторую четверть периода, когда ток в цепи уменьшается от максимума до нуля, энергия магнитного поля отдается обратно источнику питания, при этом мгновенная мощность отрицательна. За третью четверть периода у источника снова забирается энергия, за четвертую отдается и т. д., т. е. энергия периодически то забирается индуктивностью от источника, то отдается ему обратно.

§ 5.9. КОНДЕНСАТОР В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Если приложенное к конденсатору напряжение во времени не меняется, то заряд $q = Ci$ на одной его обкладке и заряд $-q = -Ci$ на другой (C — емкость конденсатора *) неизменны и ток через конденсатор не проходит ($i = \frac{dq}{dt} = 0$). Если же напряжение на конденсаторе меняется во времени, например по синусоидальному закону (рис. 5.7, а)

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (5.19)$$

* Емкость как элемент схемы замещения реальной цепи дает возможность учитывать при расчете явление зарядки конденсатора и накопление им энергии (о емкости см. также § 15.29).

то по синусоидальному закону будет меняться и заряд q конденсатора: $q = Cu = CU_m \sin \omega t$, и конденсатор будет периодически перезаряжаться. Периодическая перезарядка конденсатора сопровождается протеканием через него зарядного тока

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (CU_m \sin \omega t) = \omega CU_m \cos \omega t = \omega CU_m \sin (\omega t + 90^\circ). \quad (5.19')$$

Положительное направление тока через конденсатор на рис. 5.7, а совпадает с положительным направлением напряжения. Из сопоставления (5.19) и (5.19') видно, что ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на конденсаторе на 90° . Поэтому на векторной диаграмме рис. 5.7, б вектор тока I_m опережает вектор напряжения U_m на 90° . Амплитуда тока I_m равна амплитуде напряжения U_m , деленной на емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (5.20)$$

Действительно,

$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{X_C}. \quad (5.21)$$

Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте и измеряется в омах. Графики мгновенных значений u , i , p изображены на рис. 5.7, в. Мгновенная мощность

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t. \quad (5.22)$$

За первую четверть периода конденсатор потребляет от источника питания энергию, которая идет на создание электрического поля в конденсаторе. Во вторую четверть периода напряжение на конденсаторе уменьшается от максимума до нуля, и запасенная в электрическом поле энергия отдается источнику (мгновенная мощность отрицательна). За третью четверть периода энергия снова запасается, за четвертую отдается и т. д.

Если проинтегрировать по времени обе части равенства

$$i = C \frac{du}{dt}, \quad (5.23)$$

то получим

$$u = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (5.24)$$

Равенство (5.24) позволяет определить напряжение на конденсаторе через ток по конденсатору.

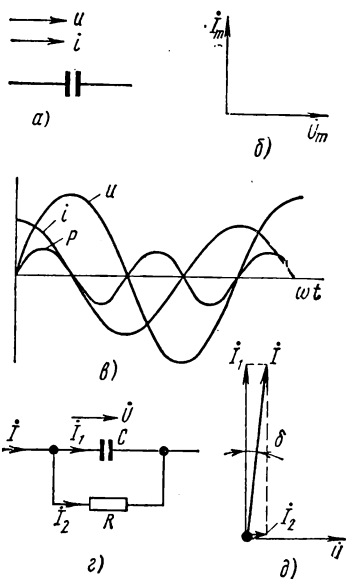


Рис. 5.7

При изложении вопроса о прохождении синусоидального тока через конденсатор предполагалось, что диэлектрик, разделяющий пластины конденсатора, является идеальным и в нем нет потерь энергии. Однако при приложении синусоидального напряжения к пластинам конденсатора, разделенным твердым или жидким диэлектриком, в последних всегда имеются некоторые потери энергии, обусловленные вязким трением при повороте дипольных молекул, а также несовершенством диэлектрика (наличием у него небольшой проводимости). Эти потери относительно малы и ими часто можно пренебречь. Если требуется учесть их в расчете, то конденсатор заменяют схемой замещения (рис. 5.7, е). В этой схеме параллельно емкости C присоединено активное сопротивление R , потери энергии в котором имитируют потери энергии в реальном диэлектрике.

Ток \dot{I} через конденсатор равен геометрической сумме двух токов: тока \dot{I}_1 через емкость, на 90° опережающего напряжение \dot{U} на конденсаторе (рис. 5.7, д), и относительно малого по величине тока \dot{I}_2 через активное сопротивление R , совпадающего по фазе с напряжением \dot{U} .

Таким образом, ток через конденсатор с неидеальным диэлектриком опережает напряжение на угол, немного меньший 90° . Угол δ , который образует ток \dot{I} с током \dot{I}_1 , принято называть *углом потерь*. Он зависит от сорта диэлектрика и частоты и равняется в лучшем случае нескольким секундам, в худшем — нескольким градусам. Величина $\operatorname{tg} \delta$ дается в таблицах (см. стр. 732), характеризующих свойства различных твердых и жидких диэлектриков. Величину $Q_C = (\operatorname{tg} \delta)^{-1}$ называют *добротностью конденсатора*.

§ 5.10. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА j И НА $-j$

Пусть есть некоторый вектор $\dot{A} = A e^{j\varphi_a}$ (рис. 5.8). Умножение его на j дает вектор, по модулю равный A , но повернутый в сторону опережения (против часовой стрелки) по отношению к исходному вектору \dot{A} на 90° . Умножение \dot{A} на $-j$ поворачивает вектор \dot{A} на 90° в сторону отставания (по часовой стрелке) также без изменения его модуля.

Чтобы убедиться в том, представим векторы j и $-j$ в показательной форме:

$$j = 1 \cdot e^{j90^\circ} = e^{j90^\circ}; \quad (5.25)$$

$$-j = 1 \cdot e^{-j90^\circ} = e^{-j90^\circ}. \quad (5.26)$$

Тогда

$$\dot{A}j = A e^{j\varphi_a} e^{j90^\circ} = A e^{j(\varphi_a + 90^\circ)}; \quad (5.27)$$

$$-\dot{A}j = A e^{j\varphi_a} e^{-j90^\circ} = A e^{j(\varphi_a - 90^\circ)}. \quad (5.28)$$

Из (5.27) следует, что вектор $j\dot{A}$, по модулю равный A , составляет с осью $+1$ комплексной плоскости угол $\varphi_a + 90^\circ$, т. е. повернут против часовой стрелки на 90° по отношению к вектору \dot{A} .

Согласно (5.28) умножение вектора \dot{A} на $-j$ дает вектор, по модулю равный A , но повернутый по отношению к нему на 90° по часовой стрелке.

§ 5.11. ОСНОВЫ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Очень широкое распространение на практике получил символический, или комплексный, метод расчета цепей синусоидального тока.

Сущность символического метода расчета состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями [см., например, уравнение (5.29)], к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и э. д. с. Этот переход основан на том, что в любом уравнении, составленном по законам Кирхгофа для установившегося процесса, мгновенное значение тока i заменяют комплексной амплитудой тока \dot{I}_m ; мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении $R = Ri$ — комплексом $R\dot{I}_m$, по фазе совпадающим с током \dot{I}_m ; мгновенное значение напряжения на индуктивности $u_L = L \frac{di}{dt}$ — комплексом $\dot{I}_m j \omega L$, опережающим ток на 90° ; мгновенное значение напряжения на емкости $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$ — комплексом $\dot{I}_m \left(\frac{-j}{\omega C} \right)$, отстающим от тока на 90° ; мгновенное значение э. д. с. e — комплексом \dot{E}_m . Справедливость замены $u_L = L \frac{di}{dt}$ на $\dot{I}_m j \omega L$ следует из § 5.7 и 5.8.

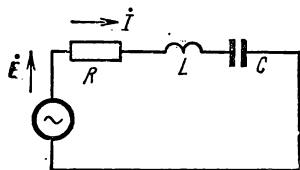


Рис. 5.9

В § 5.8 было показано, что амплитуда напряжения на индуктивности равна произведению амплитуды тока на $X_L = \omega L$. Множитель j свидетельствует о том, что вектор напряжения на индуктивности опережает вектор тока на 90° .

Аналогично из § 5.9 следует, что амплитуда напряжения на емкости равна амплитуде тока, умноженной на $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Отставание напряжения на емкости от протекающего по ней тока на 90° объясняет наличие множителя $-j$.

Например, для схемы рис. 5.9 уравнение для мгновенных значений можно записать так:

$$u_R + u_L + u_C = e$$

или

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e. \quad (5.29)$$

Запишем его в комплексной форме:

$$\dot{I}_m R + \dot{I}_m j \omega L + \dot{I}_m \left(\frac{-j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m.$$

Вынесем \dot{I}_m за скобку:

$$\dot{I}_m \left(R + j \omega L - \frac{j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m. \quad (5.30)$$

Следовательно, для схемы рис. 5.9

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j \omega L - \frac{j}{\omega C}}. \quad (5.31)$$

Это уравнение позволяет найти комплексную амплитуду тока \dot{I}_m через комплексную амплитуду э. д. с. \dot{E}_m и сопротивления цепи R , ωL и $\frac{1}{\omega C}$.

Метод называют *символическим* потому, что токи и напряжения заменяют их комплексными изображениями или символами.

Так, $R\dot{I}_m$ — это изображение или символ падения напряжения iR ; $j\omega L\dot{I}_m$ — изображение или символ падения напряжения на индуктивности $u_L = L \frac{di}{dt}$; $-\frac{j}{\omega C}\dot{I}_m$ — изображение падения напряжения на конденсаторе $\frac{1}{C} \int i dt$.

§ 5.12. КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Множитель $R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$ в уравнении (5.30) представляет собой комплекс, имеет размерность сопротивления и обозначается через Z ; его называют *комплексным сопротивлением*:

$$Z = ze^{j\varphi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \quad (5.32)$$

Как и всякий комплекс, Z можно записать в показательной форме. Модуль комплексного сопротивления принято обозначать через z . Точку над Z не ставят, потому что принято ставить ее только над такими комплексными величинами, которые являются синусоидальными функциями времени.

Уравнение (5.30) можно записать так: $\dot{I}_m Z = \dot{E}_m$. Разделим обе его части на $\sqrt{2}$ и перейдем от комплексных амплитуд \dot{I}_m и \dot{E}_m к комплексам действующих значений I и E :

$$I = \frac{E}{Z}. \quad (5.33)$$

Уравнение (5.33) представляет собой *закон Ома для цепи синусоидального тока*.

В общем случае Z имеет некоторую действительную часть и некоторую мнимую часть jX :

$$Z = R + jX, \quad (5.34)$$

где R — активное сопротивление;

X — реактивное сопротивление.

Для схемы рис. 5.9 реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

§ 5.13. КОМПЛЕКСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Под комплексной проводимостью Y понимают величину, обратную комплексному сопротивлению Z :

$$Y = \frac{1}{Z} = g - jb = ye^{-j\varphi}. \quad (5.35)$$

Измеряют комплексную проводимость в ом^{-1} или сименсах (*сим*). Действительную часть ее обозначают через g , мнимую — через b . Так как

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb,$$

то

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{R}{R^2 + X^2}; & b &= \frac{X}{R^2 + X^2}; \\ y &= \sqrt{g^2 + b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Если X положительно, то и b положительно, при X отрицательном b также отрицательно.

При использовании комплексной проводимости закон Ома (5.33) записывают так:

$$\left. \begin{aligned} I &= \dot{U} Y, \\ I &= \dot{U} g - j \dot{U} b = I_a + I_r, \end{aligned} \right\} \quad (5.33')$$

где I_a — активная составляющая тока;

I_r — реактивная составляющая тока;

\dot{U} — напряжение на участке цепи, сопротивление которого равно Z .

§ 5.14. ТРЕУГОЛЬНИК СОПРОТИВЛЕНИЙ И ТРЕУГОЛЬНИК ПРОВОДИМОСТЕЙ

Из (5.34) следует, что модуль комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (5.37)$$

Значит, z можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника (рис. 5.10) — треугольника сопротивлений, один катет которого равен R , другой X :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}. \quad (5.38)$$

Аналогичным образом модуль комплексной проводимости в соответствии с (5.36) $y = \sqrt{g^2 + b^2}$. Следовательно, y есть гипотенуза

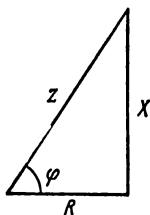


Рис. 5.10

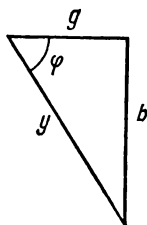


Рис. 5.11

прямоугольного треугольника (рис. 5.11), катетами которого являются активная g и реактивная b проводимости:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}. \quad (5.39)$$

Треугольник сопротивлений дает графическую интерпретацию связи между модулем полного сопротивления z и активным и реактивным сопротивлениями цепи; треугольник проводимости — интерпретацию связи между модулем полной проводимости y и ее активной и реактивной составляющими.

§ 5.15. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙКИ ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСА К ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ДЛЯ ОБРАТНОГО ПЕРЕХОДА

При расчете цепей переменного тока приходится иметь дело с комплексными числами: сопротивление участка цепи или цепи в целом — это комплекс; проводимость — комплекс; ток, напряжение, э. д. с. — комплексы. Для нахождения тока по закону Ома нужно комплекс э. д. с. разделить на комплекс сопротивления.

Из курса математики известно, что комплексное число можно представить в трех формах записи: алгебраической $a + jb$, показательной $ce^{j\varphi}$ и тригонометрической $c \cos \varphi + jc \sin \varphi$.

Сложение двух и большего числа комплексов удобнее производить, пользуясь алгебраической формой записи. При этом порознь складываются их действительные и мнимые части:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) + (a_3 - jb_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + j(b_1 + b_2 - b_3).$$

Деление и умножение комплексных чисел целесообразнее производить, пользуясь показательной формой записи. Пусть, например, надо разделить комплекс $c_1 e^{j\varphi_1}$ на комплекс $c_2 e^{j\varphi_2}$. В результате деления будет получен комплекс

$$c_3 e^{j\varphi_3} = \frac{c_1 e^{j\varphi_1}}{c_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Модуль результирующего комплекса c_3 равен частному $\frac{c_1}{c_2}$, а аргумент $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$.

При умножении двух комплексов $c_1 e^{j\varphi_1}$ и $c_2 e^{j\varphi_2}$ результирующий комплекс

$$c_4 e^{j\varphi_4} = c_1 e^{j\varphi_1} c_2 e^{j\varphi_2} = c_1 c_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

При расчетах электрических цепей часто возникает необходимость в переходе от алгебраической формы записи комплекса к показательной или в обратном переходе.

Наиболее удобно это сделать с помощью логарифмической линейки.

Пусть задано комплексное число $a + jb$. Из предыдущего (см. § 5.11 и 5.12) ясно, что a и b есть катеты прямоугольного треугольника, а гипотенуза его $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Частное от деления меньшего катета на больший катет дает тангенс меньшего острого угла прямоугольного треугольника, а деление меньшего катета на синус меньшего угла дает гипотенузу треугольника или модуль комплекса. Это и положено в основу определения модуля и аргумента комплекса по его алгебраической форме $a + jb$ с помощью логарифмической линейки. Движок линейки поворачиваем обратной стороной, так что на лицевой части

линейки будет сторона движка, на которой написано «синус» и «тангенс».

Последовательность операций нахождения аргумента и модуля следующая:

1) значение меньшего катета откладываем на основной нижней шкале линейки и против него ставим риску визира;

2) значение большего катета откладываем также по основной шкале и против него ставим конец движка; так производится деление меньшего катета на больший;

3) по шкале тангенсов против риски визира отсчитываем величину наименьшего угла прямоугольного треугольника;

4) не сдвигая визира, перемещаем движок так, чтобы против риски визира пришелся только что найденный угол на шкале «синус»; так осуществляется деление меньшего катета на синус меньшего угла;

5) модуль комплекса (гипотенуза прямоугольного треугольника) отсчитывается против конца шкалы движка по основной нижней шкале линейки.

Переход от показательной формы к алгебраической совершается в обратной последовательности. Чтобы не совершить ошибку при записи показательной формы комплекса, рекомендуется сначала качественно изобразить заданный в алгебраической форме комплекс на комплексной плоскости. Это построение позволит правильно выразить угол между осью $+1$ и вектором через угол, найденный по линейке. Углы против часовой стрелки от оси $+1$ считаются положительными, по часовой стрелке — отрицательными.

Пример 47. Перевести в показательную форму следующие комплексы: а) $3 + 2j$; б) $2 + 3j$; в) $4 - 5j$; г) $-6 - 2j$; д) $-0,2 + 0,4j$; е) $10 - j0,8$.

Решение.

а) Ставим визир против цифры 2 на нижней шкале линейки и конец движка против цифры 3. По шкале тангенса находим угол $33^\circ 40'$. Передвигаем движок так, чтобы против риски визира на шкале синусов пришелся угол $33^\circ 40'$. Отсчет по нижней шкале против конца шкалы движка дает модуль 3,6. Вектор $3 + 2j$ качественно изображен на рис. 5.12, а. Из рисунка видно, что угол между осью $+1$ и вектором равен $33^\circ 40'$. Поэтому

$$3 + 2j = 3,6e^{j33^\circ 40'}.$$

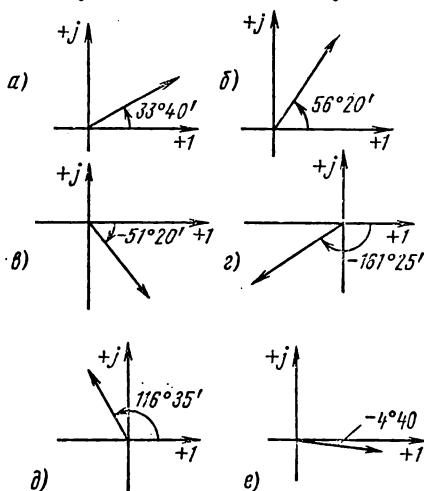


Рис. 5.12

б) По линейке находим угол $33^\circ 40'$ и модуль 3,6. Из диаграммы рис. 5.12, б видно, что угол между осью $+1$ и вектором равен $90^\circ - 33^\circ 40' = 56^\circ 20'$. Следовательно,

$$2 + 3j = 3,6e^{j56^\circ 20'}.$$

в) Линейка дает угол $38^\circ 40'$ и модуль 6,4. Из диаграммы рис. 5.12, в видно, что вектор находится в четвертом квадранте. Угол между осью $+1$ и вектором равен $-51^\circ 20'$. Таким образом,

$$4 - 5j = 6,4e^{-j51^\circ 20'}.$$

г) По линейке определим угол $18^\circ 35'$ и модуль 6,32. Из диаграммы рис. 5.12, г видно, что угол между осью $+1$ и вектором может быть выражен двояко: либо как $-(180^\circ - 18^\circ 35') = -161^\circ 25'$, либо как $+(180^\circ + 18^\circ 35') = 198^\circ 35'$. Поэтому

$$-6 - 2j = 6,32e^{-j161^\circ 25'} = 6,32e^{j198^\circ 35'}.$$

д) Линейка дает угол $26^\circ 35'$ и модуль 0,448. Вектор находится во втором квадранте (рис. 5.12, д). Следовательно,

$$-0,2 + j0,4 = 0,448e^{j116^\circ 35'}.$$

е) Этот случай принципиально отличается от рассмотренных тем, что составляющие комплекса (катеты прямоугольного треугольника) по абсолютной величине различаются более чем на порядок. Причем гипотенуза прямоугольного треугольника практически равна большему катету, а угол определяется по *средней* шкале движка. Линейка дает угол $4^\circ 40'$, который находится в четвертом квадранте (рис. 5.12, е). Поэтому

$$10 - j0,8 \approx 10e^{-j4^\circ 40'}.$$

§ 5.16. ЗАКОНЫ КИРХГОФА В СИМВОЛИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю, т. е.

$$\sum i_k = 0. \quad (5.40')$$

Подставив вместо i_k в (5.40') $I_k e^{j\omega t}$ и вынеся $e^{j\omega t}$ за скобку, получим $e^{j\omega t} \sum I_k = 0$. Так как $e^{j\omega t}$ не равно нулю при любом t , то

$$\sum I_k = 0. \quad (5.40)$$

Уравнение (5.40) представляет собой первый закон Кирхгофа в символической форме записи.

Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи синусоидального тока можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений токов, напряжений и э. д. с.

Пусть замкнутый контур содержит n ветвей и каждая k -ветвь в общем случае включает в себя э. д. с. e_k , активное сопротивление R_k , индуктивность L_k и емкость C_k , по которым протекает ток i_k . Тогда

по второму закону Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n \left(i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k. \quad (5.41')$$

Но каждое слагаемое левой части уравнения в соответствии с § 5.12 можно заменить на $I_k Z_k$, а каждое слагаемое правой части — на \dot{E}_k . Поэтому уравнение (5.41') переходит в следующее:

$$\sum_{k=1}^n I_k Z_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k. \quad (5.41)$$

Уравнение (5.41) представляет собой второй закон Кирхгофа в символической форме записи.

§ 5.17. ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА МЕТОДОВ, РАССМОТРЕННЫХ В ГЛАВЕ «ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА»

Для анализа и расчета электрических цепей постоянного тока разработан ряд методов и приемов, облегчающих решение по сравнению с решением системы уравнений при непосредственном использовании законов Кирхгофа. Из гл. I известно, что к числу таких методов относятся метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора и т. д. Известно также, что окончательные расчетные формулы этих методов получают в результате выводов, в основу которых положены первый и второй законы Кирхгофа.

Поскольку первый и второй законы Кирхгофа справедливы и для цепей синусоидального тока, то можно было бы записать уравнения для мгновенных значений величин цепей синусоидального тока, перейти от них к уравнениям в комплексах и затем повторить вывод всех формул гл. I для цепей синусоидального тока. Но проделывать выводы заново нет необходимости.

В том случае, когда отдельные ветви электрической цепи синусоидального тока не связаны между собой магнитно, все расчетные формулы гл. I пригодны и для расчета цепей, если в этих формулах вместо постоянного тока I подставить комплекс тока \dot{I} , вместо проводимости g — комплексную проводимость Y , вместо сопротивления R — комплексное сопротивление Z и вместо постоянной э. д. с. E — комплексную э. д. с. \dot{E} .

Если же отдельные ветви электрической цепи синусоидального тока связаны друг с другом магнитно — это имеет место при наличии взаимной индукции, то падение напряжения на каком-либо участке цепи зависит не только от тока данной ветви, но и от токов тех ветвей, с которыми данная ветвь связана магнитно. Расчет электрических цепей синусоидального тока при наличии в них магнитносвязанных ветвей приобретает ряд особенностей, которые не могут быть учтены, если в формулах гл. I непосредственно заменить E на \dot{E} , R на Z и g на Y . (Особенности расчета магнитносвязанных цепей рассмотрены в § 5.34.)

§ 5.18. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Токи и напряжения на различных участках электрической цепи синусоидального тока, как правило, по фазе не совпадают. Наглядное представление о фазовом расположении различных векторов дает векторная диаграмма токов и напряжений. Аналитические расчеты электрических цепей синусоидального тока рекомендуется сопровождать построением векторных диаграмм,

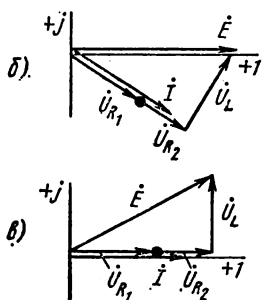
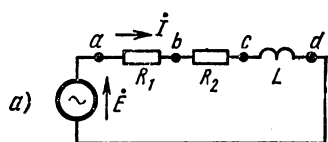


Рис. 5.13

чтобы иметь возможность качественно контролировать эти расчеты.

Качественный контроль заключается в сравнении направлений различных векторов на комплексной плоскости, которые получают при аналитическом расчете, с направлением этих векторов исходя из физических соображений.

Например, на векторной диаграмме напряжение на индуктивности \dot{U}_L должно опережать протекающий через нее ток на 90° , а напряжение на емкости \dot{U}_C должно отставать от протекающего через нее тока на 90° .

Если аналитический расчет дает результаты, не совпадающие с такими очевидными положениями, то, следовательно, в него вкралась ошибка. Кроме того,

векторную диаграмму часто используют и как средство расчета, например в методе пропорциональных величин.

Пример 48. В схеме рис. 5.13, а заданы э. д. с. $e = 141 \sin \omega t$ в и параметры схемы: $R_1 = 3 \text{ ом}$; $R_2 = 2 \text{ ом}$; $L = 0,00955 \text{ гн}$. Угловая частота $\omega = 314 \text{ сек}^{-1}$. Определить ток и напряжение на элементах цепи.

Решение. Запишем уравнение для мгновенных значений:

$$i(R_1 + R_2) + L \frac{di}{dt} = e.$$

Перейдем от него к уравнению в комплексах

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L \dot{I} = \dot{E}$$

или

$$\dot{I}Z = \dot{E},$$

где

$$Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 3 + 2 + j314 \cdot 0,00955 = 5 + 3j = 5,82e^{j31^\circ}.$$

Комплекс действующего значения э. д. с.

$$\dot{E} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ в.}$$

Находим

$$I = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{100}{5,8e^{j31^\circ}} = 17,2e^{-j31^\circ} \text{ а.}$$

Напряжения на сопротивлении R_1

$$\dot{U}_{R_1} = \dot{U}_{ab} = IR_1 = 51,6e^{-j31^\circ} \text{ в;}$$

на сопротивлении R_2

$$\dot{U}_{R_2} = \dot{U}_{bc} = IR_2 = 34,4e^{-j31^\circ} \text{ в;}$$

на индуктивности

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L I = 3j \cdot 17,2e^{-j31^\circ} = 51,6e^{j59^\circ} \text{ в.}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 5.13, б. Вектор \dot{E} направлен по оси $+1$. Ток отстает от него на 31° .

Пример 49. Решить задачу примера 48 методом пропорциональных величин.

Решение. Зададимся током в цепи в 1 а и направим его на векторной диаграмме рис. 5.13, в по оси $+1$ ($I = 1$). Напряжение на активном сопротивлении R_1 будет совпадать по фазе с током и численно равно $1 \cdot 3 = 3 \text{ в}$. Напряжение на R_2 также будет совпадать с током и равно 2 в . Напряжение на индуктивности равно 3 в и опережает ток на 90° . Из прямоугольного треугольника следует, что при токе в цепи 1 а на входе должна быть э. д. с., равная

$$\sqrt{5^2 + 3^2} = 5,82 \text{ в.}$$

Так как на входе действует э. д. с. в $\frac{100}{5,82} = 17,2$ раза больше, то все токи и на-

пряжения должны быть умножены на коэффициент 17,2. На рис. 5.13, в все векторы повернуты на 31° против часовой стрелки по сравнению с соответствующими векторами на рис. 5.13, б. Ясно, что взаимное расположение векторов на диаграмме при этом не изменилось.

Пример 50. В цепи рис. 5.14, а включены последовательно активное сопротивление и емкость; $R = 4 \text{ ом}$; угловая частота $\omega = 10^5 \text{ сек}^{-1}$. Определить величину емкости C , если при э. д. с. $E = 10 \text{ мв}$ ток в цепи 2 ма .

Решение. Комплексное сопротивление цепи

$$Z = R - \frac{j}{\omega C};$$

его модуль

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

По закону Ома, $I = \frac{E}{z}$. Отсюда

$$z = \frac{E}{I} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ ом.}$$

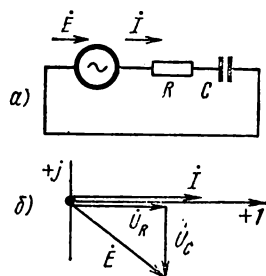


Рис. 5.14

Следовательно,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ ом}$$

и

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^5 \cdot 3} = 3,33 \text{ мкф.}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 5.14, б.

Пример 51. На участке ab разветвленной цепи рис. 5.15, а параллельно включены индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$ и активное сопротивление R , численно равное X_L . Показание амперметра A_2 равно $5a$. Определить показание амперметра A_3 , полагая сопротивления амперметров настолько малыми, что их можно не учитывать.

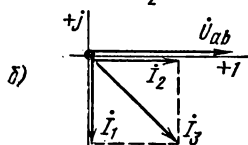
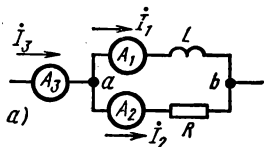


Рис. 5.15

Решение. На рис. 5.15, б качественно построим векторную диаграмму. Напряжение \dot{U}_{ab} совпадает по фазе с током I_2 . Ток I_1 отстает от тока I_2 на 90° и равен ему по величине. Ток в неразветвленной части схемы $I_3 = I_1 + I_2$. Модуль тока I_3 равен $5\sqrt{2} = 7,05a$. Амперметр A_3 покажет $7,05a$.

Пример 52а. Построить векторную диаграмму токов и напряжений для схемы рис. 5.16, а, если ток $I_1 = 1a$, $R_1 = 10 \text{ ом}$; $\omega L = 10 \text{ ом}$; $\frac{1}{\omega C} = 14,1 \text{ ом}$; $\omega L_3 = 20 \text{ ом}$ и $R_3 = 2,5 \text{ ом}$.

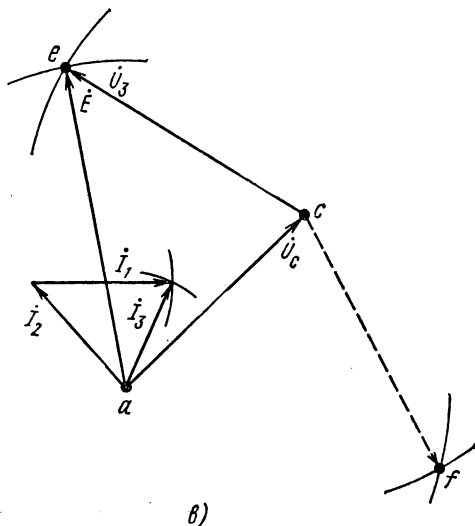
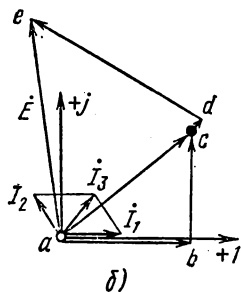
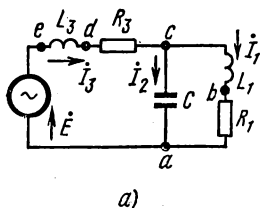


Рис. 5.16

Решение. Обозначим токи и выберем положительные направления для них в соответствии с рис. 5.16, а. Выберем масштаб для

токов $m_I = 0,5 \text{ а/см}$ и для напряжений $m_U = 4 \text{ в/см}$. Ток I_1 направим по оси $+1$ (рис. 5.16, б). Падение напряжения \dot{U}_{R_1} численно равно 10 в и по фазе совпадает с током I_1 . Падение напряжения в индуктивном сопротивлении ωL_1 также равно 10 в , но опережает ток I_1 на 90° . Геометрическая сумма $\dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1}$ по модулю равна $10\sqrt{2} = 14,1 \text{ в}$. Емкостный ток I_2 опережает это напряжение на 90° . Модуль тока

$$I_2 = \frac{14,1}{14,1} = 1 \text{ а.}$$

Ток в неразветвленной части цепи равен геометрической сумме токов $I_3 = I_1 + I_2$. Модуль его равен $0,8 \text{ а}$ (найден графически). Падение напряжения на сопротивлении R_3 равно 2 в и совпадает по фазе с током. Падение напряжения на индуктивности L_3 опережает ток I_3 на 90° и численно равно $0,8 \cdot 20 = 16 \text{ в}$. Напряжение на входе схемы равно э. д. с. и составляет около $18,3 \text{ в}$.

Пример 526. Решим задачу, обратную рассмотренной в примере 52а.

Пусть в схеме рис. 5.16, а опытным путем были найдены значения токов I_1 , I_2 и I_3 (в ветви схемы включили амперметры и записали их показания): $I_1 = 1 \text{ а}$; $I_2 = 1 \text{ а}$, $I_3 \approx 0,8 \text{ а}$ и опытным путем были определены три напряжения: напряжение на входе схемы, равное э. д. с. $E = 18,3 \text{ в}$, напряжение на емкости $U_C = 14,1 \text{ в}$ (оно же напряжение на первой ветви) и напряжение U_3 на третьей ветви (на R_3 и L_3) $U_3 = 16 \text{ в}$. Напряжения были опеределены путем подключения вольтметра поочередно к зажимам a и e , a и c , e и c .

Требуется по опытным данным (по значениям трех токов и трех напряжений) построить векторную диаграмму.

Р е ш е н и е. На рис. 5.16, в отложим вектор \dot{U}_C , равный $14,1 \text{ в}$. Для сопоставления с рис. 5.16, б расположим его на диаграмме так же, как он расположен на рис. 5.16, б.

Изобразим на диаграмме ток I_2 . Он на 90° опережает напряжение \dot{U}_C и по модулю равен 1 а . После этого можно построить на диаграмме токи I_1 и I_3 , воспользовавшись тем, что три тока (I_1 , I_2 и I_3) образуют замкнутый треугольник (см. рис. 5.16, б).

Для построения треугольника по трем сторонам (т. е. фактически для определения третьей вершины его) из конца тока (из одной вершины треугольника) проводим дугу радиусом, равным току I_1 , а из начала тока I_2 (т. е. из второй вершины треугольника) проводим дугу радиусом, равным току I_3 .

Точка пересечения этих дуг дает искомую третью вершину треугольника, т. е. точку, в которой оканчиваются векторы токов I_3 и I_1 . После того как на диаграмме определено положение тока I_3 , можно изобразить на ней векторы напряжения \dot{U}_3 и э. д. с. \dot{E} .

Напряжения \dot{U}_C , \dot{U}_3 и э. д. с. \dot{E} также образуют замкнутый треугольник. Для построения его поступаем, как и при построении треугольника токов.

Из конца вектора \dot{U}_C проводим дугу радиусом, равным U_3 , а из начала вектора \dot{U}_C — дугу радиусом, равным E . Дуги пересекаются в двух точках: e и f .

Так как напряжение \dot{U}_3 представляет собой падение напряжения от тока I_3 на последовательно соединенных R_3 и L_3 , то оно по фазе должно опережать ток I_3 , а не отставать от него.

Поэтому из двух точек (e и f) выбираем точку e (если бы выбрали точку f , то в этом случае напряжение \dot{U}_3 — см. пункт на рис. 5.16, e — отставало бы от тока I_3 , а не опережало его).

В заключение отметим, что в треугольнике токов дуги тоже пересекаются в двух точках, но вторая (лишняя) точка на рис. 5.16, e не показана.

§ 5.19. ИЗОБРАЖЕНИЕ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Потенциалы цепи переменного тока являются комплексными числами. На комплексной плоскости комплексное число можно изображать либо точкой, координаты которой равны действительной и мнимой частям комплексного потенциала, либо вектором, направленным от начала координат к данной точке плоскости.

На рис. 5.17 представлены два вектора, изображающие собой комплексные потенциалы:

$$\dot{\varphi}_a = -2 + 5j \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_b = 4 + j.$$

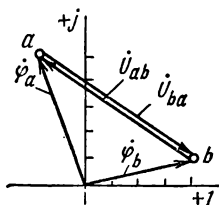


Рис. 5.17

По определению, разность потенциалов $\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = -6 + 4j$; \dot{U}_{ab} изобразится вектором, направленным от b к a . Первый индекс у напряжения (в нашем примере индекс a) указывает, к какой точке следует направить стрелку вектора напряжения. Естественно, что

$$\dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab}.$$

§ 5.20. ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ ДИАГРАММА

Каждая точка электрической схемы, в которой соединяются сопротивления, имеет свое значение комплексного потенциала.

Совокупность точек комплексной плоскости, изображающих комплексные потенциалы одноименных точек электрической схемы, называют *топографической диаграммой*.

Термин «топографическая» объясняется тем, что диаграмма напоминает топографическую карту местности, где каждой точке местности отвечает определенная точка. Расстояние между двумя точками на местности можно определить, измерив расстояние между одноименными точками на карте.

Аналогичные измерения можно проводить и на топографической диаграмме. Напряжение между любыми двумя точками электрической схемы, например между точками a и b , по величине и направлению определяется вектором, проведенным на топографической диаграмме от точки b к точке a .

При построении топографической диаграммы, как и потенциальной (см. § 1.10), потенциал любой одной точки схемы может быть принят

равным нулю. На диаграмме эту точку помещают в начало координат. Тогда положение остальных точек схемы на диаграмме будет определяться параметрами цепи, э. д. с. и токами ветвей. Рассмотрим пример на построение топографической диаграммы.

Пример 53. По данным примера 52а построить топографическую диаграмму для схемы рис. 5.16, а.

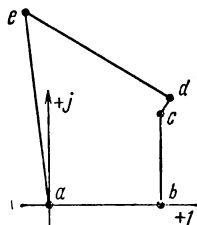


Рис. 5.18

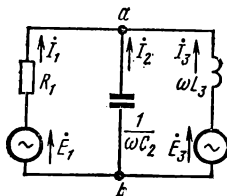


Рис. 5.19

Решение. Обозначим буквами a, b, c, \dots точки схемы рис. 5.16, а, которые хотим отобразить на топографической диаграмме. Примем потенциал точки a равным нулю:

$$\dot{\varphi}_a = 0.$$

Выразим потенциал точки b через потенциал точки a :

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_a + \dot{I}_1 R_1 = \dot{\varphi}_a + 10.$$

Плюс перед слагаемым $\dot{I}_1 R_1$ обусловлен тем, что при переходе от точки a к точке b перемещаемся навстречу току \dot{I}_1 (при этом потенциал увеличивается на величину $\dot{I}_1 R_1$). Точка b на диаграмме будет иметь координату по оси абсцисс $+10$. Аналогично,

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_b + \dot{I}_1 j \omega L_1 = 10 + j10;$$

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_c + \dot{I}_3 R_3;$$

$$\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_a + \dot{I}_3 j \omega L_3.$$

Совокупность точек a, b, c, d, e на комплексной плоскости рис. 5.18 и представляет топографическую диаграмму для схемы рис. 5.16, а. По ней удобно определять напряжение между любыми двумя точками схемы и сдвиг по фазе этого напряжения по отношению к любому другому напряжению*.

Рассмотрим примеры использования метода узловых потенциалов и метода контурных токов.

Пример 54. Найти токи в схеме рис. 5.19 методом двух узлов. Положительные направления э. д. с. указаны на схеме стрелками;

$$e_1 = 120 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ в; } e_3 = 100 \sqrt{2} \cos (\omega t - 120^\circ) \text{ в;}$$

$$R = 2 \text{ ом; } \frac{1}{\omega C_2} = 10 \text{ ом; } \omega L_3 = 5 \text{ ом.}$$

* Следует иметь в виду, что *никакого графического подобия* между топографической диаграммой и электрической схемой, для которой она построена, как правило, нет.

Р е ш е н и е. Запишем э. д. с. в комплексной форме:

$$\dot{E}_1 = 120, \quad \dot{E}_3 = 100e^{-j30^\circ}.$$

Выберем положительные направления для токов в ветвях к узлу *a*.
Определим проводимости ветвей:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ см}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{-10j} = 0,1j \text{ см};$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{5j} = -0,2j \text{ см}.$$

Напряжение между узлами *a* и *b* [ср. с формулой (1.20)]

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{120 \cdot 0,5 + 100e^{-j30^\circ} \cdot 0,2e^{-j90^\circ}}{0,5 + 0,1j - 0,2j} = 104e^{-j8^\circ} \text{ в}.$$

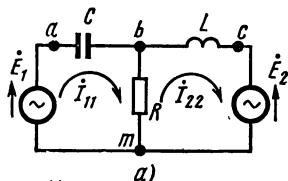
Ток

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{Z_1} = \frac{120 - 104e^{-j8^\circ}}{2} = 8,5 + j7,25 = 11,17e^{j40^\circ 25'} \text{ а};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{-104e^{-j8^\circ}}{-10e^{j90^\circ}} = 10,4e^{-j98^\circ} \text{ а};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_3 - \dot{U}_{ab}}{Z_3} = \frac{100e^{-j30^\circ} - 104e^{-j8^\circ}}{5j} = \\ &= \frac{100(\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ) - 104(\cos 8^\circ - j \sin 8^\circ)}{5j} = \\ &= \frac{-16,2 - 35,5j}{5j} = \frac{39,1e^{j245^\circ 30'}}{5e^{j90^\circ}} = 7,82e^{j155^\circ 30'} \text{ а}. \end{aligned}$$

Пример 55. Найти токи в схеме рис. 5.20, *a* методом контурных токов и построить топографическую диаграмму:



$$\dot{E}_1 = 100 \text{ в}; \quad \dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ} \text{ в};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 2 \text{ ом}; \quad R = \omega L = 5 \text{ ом}.$$

Р е ш е н и е. Выберем направления контурных токов \dot{I}_{11} и \dot{I}_{22} по часовой стрелке. Запишем в общем виде уравнение для контурных токов [ср. с уравнениями (1.4')]:

$$\dot{I}_{11}Z_{11} + \dot{I}_{22}Z_{12} = \dot{E}_{11};$$

$$\dot{I}_{11}Z_{21} + \dot{I}_{22}Z_{22} = \dot{E}_{22}.$$

Здесь Z_{11} — собственное сопротивление первого контура,

$$Z_{11} = R - \frac{j}{\omega C} = 5 - 2j;$$

Z_{22} — собственное сопротивление второго контура,

$$Z_{22} = R + j\omega L = 5 + 5j;$$

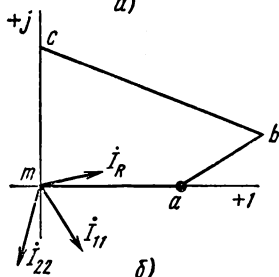


Рис. 5.20

$Z_{12} = Z_{21}$ — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус

$$Z_{12} = -R = -5;$$

\dot{E}_{11} — алгебраическая сумма э. д. с. первого контура,

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 = 100;$$

\dot{E}_{22} — алгебраическая сумма э. д. с. второго контура,

$$\dot{E}_{22} = -\dot{E}_2 = -100j.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{11}(5-2j) - 5I_{22} &= 100; \\ -5I_{11} + I_{22}(5+j5) &= -100j. \end{aligned}$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (5-2j) & -5 \\ -5 & (5-5j) \end{vmatrix} = 10 + 15j = 18e^{j56^\circ 20'};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -5 \\ -100j & (5+5j) \end{vmatrix} = 500;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (5-2j) & 100 \\ -5 & -100j \end{vmatrix} = 300 - 500j = 582e^{-j59^\circ};$$

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{500}{18e^{j56^\circ 20'}} = 27,8e^{-j56^\circ 20'} \text{ а};$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{582e^{-j59^\circ}}{18e^{j56^\circ 20'}} = 32,3e^{-j115^\circ 20'} \text{ а}.$$

Ток в сопротивлении R (направлен от точки b к точке m)

$$I_{11} - I_{22} = 30e^{j11^\circ 43'} \text{ а}.$$

Топографическая диаграмма изображена на рис. 5.20, б.

§ 5.21. АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ

Под *активной мощностью* P понимают среднее значение мгновенной мощности p за период T :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt. \quad (5.42)$$

Если ток $i = I_m \sin \omega t$, напряжение на участке цепи $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$, то

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m U_m \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) \, dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (5.43)$$

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени * в виде теплоты на участке цепи в сопротивлении R . Действительно, произведение $U \cos \varphi = IR$; следовательно,

$$P = U \cos \varphi I = I^2 R. \quad (5.44)$$

Активную мощность измеряют в ваттах (вт).

Под *реактивной мощностью* Q понимают произведение напряжения U на участке цепи на ток I по этому участку и на синус угла φ между напряжением U и током I :

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (5.45)$$

Реактивную мощность принято измерять в вольтамперах реактивных (вар). Если $\sin \varphi > 0$, то и $Q > 0$, если $\sin \varphi < 0$, то $Q < 0$.

Рассмотрим, что представляет собой физически реактивная мощность. С этой целью возьмем участок цепи, на котором последовательно соединены R , L и C . Пусть по нему протекает ток $i = I_m \sin \omega t$. Запишем выражение для мгновенного значения суммы энергий магнитного и электрического полей цепи:

$$\begin{aligned} W_{\text{м.э}} &= W_{\text{м}} + W_{\text{э}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{CI_m^2}{2(\omega C)^2} \cos^2 \omega t = \\ &= \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) + \frac{I^2}{2\omega^2 C} (1 + \cos 2\omega t). \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что $W_{\text{м.э}}$ имеет постоянную составляющую $W_{\text{м.э}_0}$, неизменную во времени, и переменную составляющую $w_{\text{м.э}}$, изменяющуюся с двойной угловой частотой:

$$W_{\text{м.э}} = W_{\text{м.э}_0} - w_{\text{м.э}};$$

$$W_{\text{м.э}_0} = \frac{LI^2}{2} + \frac{I^2}{2\omega^2 C} \quad \text{и} \quad w_{\text{м.э}} = \left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2\omega^2 C} \right) \cos 2\omega t.$$

На создание постоянной составляющей $W_{\text{м.э}_0}$ была затрачена энергия в процессе становления данного периодического режима. В дальнейшем при периодическом процессе энергии $W_{\text{м.э}_0}$ остается неизменной и, следовательно, от источника питания не требуется энергии на ее создание.

Среднее значение энергии $w_{\text{м.э}}$, поступающей от источника за интервал времени от $-\frac{T}{8}$ до $+\frac{T}{8}$,

$$\begin{aligned} W_{\text{м.э}_\text{ср}} &= \frac{4}{T} \int_{t=-\frac{T}{8}}^{t=\frac{T}{8}} w_{\text{м.э}} dt = \frac{2}{\pi} \left(LI^2 - \frac{I^2}{\omega^2 C} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi \omega} I^2 (X_L - X_C) = \frac{2}{\pi \omega} UI \sin \varphi = \frac{2}{\pi \omega} Q. \end{aligned} \quad (5.46)$$

* Предполагается, что в 1 сек укладывается целое число периодов T .

Таким образом, реактивная мощность Q пропорциональна среднему за четверть периода значению энергии, которая отдается источником питания на создание переменной составляющей электрического и магнитного поля индуктивности и емкости.

За один период переменного тока энергия $W_{м.э.р}$ дважды отдается генератором в цепь и дважды он получает ее обратно, т. е. реактивная мощность является энергией, которой *обмениваются* генератор и приемник.

Полная (кажущаяся) мощность

$$S = UI. \quad (5.47)$$

Ее измеряют в вольтамперах (ва).

Между P , Q и S существует соотношение

$$P^2 + Q^2 = S^2. \quad (5.48)$$

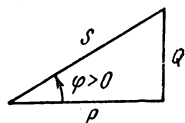


Рис. 5.21

Графически эту связь можно представить в виде прямоугольного треугольника (рис. 5.21) — *треугольника мощности*, у которого имеются катет, равный P , катет, равный Q , и гипотенуза S .

На щитке любого источника электрической энергии переменного тока (генератора, трансформатора и т. д.) указывается величина S . Она характеризует ту мощность, которую этот источник *может* отдавать потребителю, *если* последний будет работать при $\cos \varphi = 1$ (т. е. будет представлять чисто активное сопротивление).

§ 5.22. ВЫРАЖЕНИЕ МОЩНОСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Пусть задан некоторый комплекс

$$A = Ae^{j\varphi_A} = A \cos \varphi_A + jA \sin \varphi_A.$$

Под комплексом \dot{A}^* , сопряженным с комплексом \dot{A} , будем понимать

$$\dot{A}^* = Ae^{-j\varphi_A} = A \cos \varphi_A - jA \sin \varphi_A.$$

Рассмотрим простой прием определения активной и реактивной мощностей через комплекс напряжения и сопряженный комплекс тока. Напряжение на некотором участке цепи обозначим через $\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}$, ток по этому участку $\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Угол между напряжением и током $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Умножим комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока $\dot{I}^* = Ie^{-j\varphi_i}$ и обозначим полученный комплекс через \tilde{S} :

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \quad (5.49)$$

Значок \sim (тильда) над S означает комплекс (а не сопряженный комплекс) полной мощности, составленный при участии сопряженного комплекса тока \dot{I}^* .

Таким образом, активная мощность P есть действительная часть (Re), а реактивная мощность Q — мнимая часть (Im) произведения $\dot{U}\dot{I}^*$:

$$\left. \begin{aligned} P &= \operatorname{Re} \dot{U}\dot{I}^*; \\ Q &= \operatorname{Im} \dot{U}\dot{I}^*. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Пример 56. Определить активную, реактивную и полную мощности по данным примера 48.

Решение. Напряжение на входе всей схемы равно э. д. с.:

$$\dot{U} = \dot{E} = 100 \text{ в.}$$

Ток в цепи $I = 17,2 e^{-j31^\circ} \text{ а.}$

Сопряженный комплекс тока $\dot{I}^* = 17,2 e^{j31^\circ} \text{ а.}$

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{U}\dot{I}^* = 100 \cdot 17,2 e^{j31^\circ} = 1720 \cos 31^\circ + j1720 \sin 31^\circ = \\ &= 1475 + j886; \quad \operatorname{Re} \dot{U}\dot{I}^* = 1475; \quad \operatorname{Im} \dot{U}\dot{I}^* = 886. \end{aligned}$$

Следовательно, активная мощность $P = 1475 \text{ вт}$, реактивная $Q = 886 \text{ вар}$ и полная $S = 1720 \text{ ва}$.

§ 5.23. ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ ВАТТМЕТРОМ

Измерение мощности производят обычно с помощью ваттметра электродинамической системы, в котором имеются две катушки — неподвижная и подвижная.

Подвижная катушка, выполненная из очень тонкого провода, имеет практически чисто активное сопротивление и называется в дальнейшем параллельной обмоткой. Ее включают параллельно участку цепи, подобно вольтметру. Жестко скрепленная со стрелкой (указателем), она может вращаться в магнитном поле, создаваемом неподвижной катушкой.

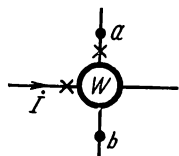


Рис. 5.22

Неподвижная катушка, выполненная из довольно толстого провода, имеет очень малое сопротивление и называется в дальнейшем последовательной обмоткой. Она включается в цепь последовательно, подобно амперметру.

На электрической схеме ваттметр изображают, как показано на рис. 5.22. Одна пара концов (на рисунке обычно расположена горизонтально) принадлежит последовательной обмотке, другая пара концов (на рисунке обычно расположена вертикально) — параллельной. На концах одноименных зажимов обмоток (например, у начала обмоток) принято ставить звездочки.

Вращающий момент ваттметра, а следовательно, и показание его пропорциональны скалярному произведению напряжения \bar{U}_{ab} на параллельной обмотке на ток \bar{I} , протекающий по последовательной обмотке.

Напряжение на параллельной обмотке берется равным разности потенциалов между концом ее, имеющим звездочку (точка a), и вторым концом ее, не имеющим звездочки (точка b). Ток i входит в конец последовательной обмотки, имеющий звездочку.

При записи скалярного произведения, выражающего показание ваттметра, над векторами напряжения и тока ставят черточки. Так, показание ваттметра (см. рис 5. 22) определяется скалярным произведением $\bar{U}_{ab}\bar{I} = U_{ab}I \cos(\dot{U}_{ab} \wedge \dot{I})$. Как правило, ваттметр включают в схему так, что измеряемое им скалярное произведение напряжения на ток оказывается активной мощностью.

Цена деления ваттметра определяется как частное от деления произведения номинального напряжения на номинальный ток (они указываются на лицевой стороне прибора) на число делений шкалы.

Пример 57. Номинальное напряжение ваттметра 120 в. Номинальный ток 5 а. Шкала имеет 150 делений. Определить цену деления ваттметра.

Решение. Цена деления равна $\frac{120 \cdot 5}{150} = 4 \text{ вт/дел.}$

§ 5.24. ДВУХПОЛЮСНИК В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

На схеме рис. 5.23 изображен пассивный двухполюсник, подключенный к источнику э. д. с. Входное сопротивление двухполюсника

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{E}}{\dot{i}}.$$

В общем случае

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = ze^{j\varphi}.$$

Если $X_{\text{вх}} > 0$, то входное сопротивление имеет индуктивный характер, при $X_{\text{вх}} < 0$ — емкостный и при $X_{\text{вх}} = 0$ — чисто активный.

Входная проводимость $Y_{\text{вх}}$ представляет собой величину, обратную входному сопротивлению:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}}.$$

Входное сопротивление можно определить либо расчетным путем, если известна схема внутренних соединений двухполюсника и значения сопротивлений, либо опытным путем.

При опытным определении входного сопротивления двухполюсника собирают схему (рис. 5.24, а). В ней амперметр измеряет ток I , вольтметр — напряжение $U_{ab} = U$ на входе двухполюсника. Ваттметр измеряет скалярное произведение напряжения \dot{U}_{ab} на ток \dot{I} , которое равно активной мощности $P = UI \cos \varphi$. Модуль входного сопротивления $z = \frac{U}{I}$. При делении P на произведение UI получаем косинус угла

между напряжением и током: $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$.

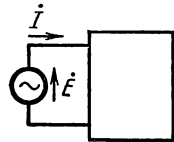


Рис. 5.23

По косинусу угла находят $\sin \varphi$ и затем определяют

$$R_{\text{вх}} = z \cos \varphi \quad \text{и} \quad X_{\text{вх}} = z \sin \varphi.$$

Так как косинус есть функция четная, т. е. $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, то измерения для определения входного сопротивления необходимо дополнить еще одним опытом, который позволил бы путем сопоставления показаний амперметра в двух опытах определить знак угла φ .

Для определения знака угла φ параллельно исследуемому двухполюснику путем замыкания ключа K подключают небольшую емкость C (см. рис. 5.24, а).

Если показания амперметра при замыкании ключа K станут меньше, чем они были при разомкнутом ключе, то угол φ положителен и входное сопротивление $Z = ze^{j\varphi}$ имеет индуктивный характер (этому случаю отвечает векторная диаграмма рис. 5.24, б).

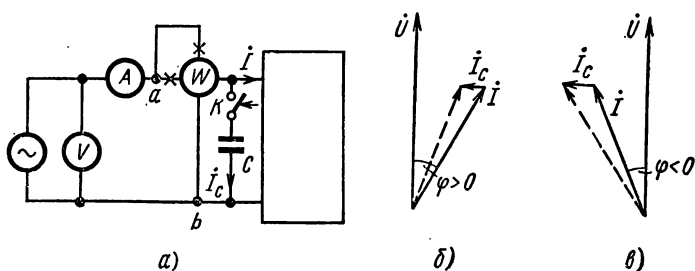


Рис. 5.24

Если показания амперметра при замыкании ключа станут больше, то φ отрицательно и входное сопротивление имеет емкостный характер (векторная диаграмма рис. 5.24, в).

На диаграмме рис. 5.24, б и в обозначено: I — ток через двухполюсник, I_C — ток через емкость, который на 90° опережает напряжение U на входе двухполюсника. Пунктиром изображен ток через амперметр при замкнутом ключе. Сопоставление пунктиром изображенного тока с током I и подтверждает приведенное ранее заключение.

Пример 58. Измерения по схеме рис. 5.24, а дали: $U = 120$ в; $I = 5$ а; $P = 400$ вт.

Замыкание ключа K приводило к уменьшению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

Решение. Модуль входного сопротивления

$$z = \frac{U}{I} = 24 \text{ ом};$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{400}{120 \cdot 5} = 0,666; \quad \sin \varphi = 0,745;$$

$$R_{\text{вх}} = z \cos \varphi = 24 \cdot 0,666 = 16 \text{ ом};$$

$$X_{\text{вх}} = z \sin \varphi = 24 \cdot 0,745 = 17,9 \text{ ом}.$$

Комплекс входного сопротивления

$$Z_{\text{вх}} = (16 + j17,9) \text{ ом}.$$

§ 5.25. РЕЗОНАНСНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ДВУХПОЛЮСНИКА

Пусть двухполюсник содержит одну или несколько индуктивностей и одну или несколько емкостей. Под *резонансным режимом* (или режимами) работы такого двухполюсника понимают режим (или режимы), при котором входное сопротивление двухполюсника является чисто активным *.

По отношению к внешней цепи двухполюсник в резонансном режиме ведет себя как активное сопротивление, поэтому ток и напряжение на входе двухполюсника совпадают по фазе.

Реактивная мощность двухполюсника при этом равна нулю.

Различают две основные разновидности резонансных режимов: резонанс токов и резонанс напряжений.

§ 5.26. РЕЗОНАНС ТОКОВ

Явление резонанса в схеме рис. 5.25, а, образованной двумя параллельными ветвями с разнохарактерными реактивными сопротивлениями, называют *резонансом токов*.

Пусть первая ветвь имеет активное сопротивление R_1 и индуктивное ωL , а вторая ветвь — активное R_2 и емкостное $\frac{1}{\omega C}$.

Ток I_1 первой ветви отстает от напряжения $\dot{U} = \dot{U}_{ab}$ (рис. 5.25, б) и может быть записан так:

$$I_1 = \dot{U} Y_1 = \dot{U} (g_1 - jb_1).$$

Ток I_2 второй ветви опережает напряжение:

$$I_2 = \dot{U} Y_2 = \dot{U} (g_2 + jb_2).$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = I_1 + I_2 = \dot{U} (g_1 + g_2) - j\dot{U} (b_1 + b_2).$$

По определению резонансного режима, ток I должен совпадать по фазе с напряжением \dot{U} . Это будет при условии, что сумма реактивных проводимостей ветвей равна нулю:

$$b_1 + b_2 = 0.$$

В соответствии с (5.36)

$$b_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{и} \quad b_2 = -\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

* Следовательно, для определения условий наступления резонанса надо приравнять нулю мнимую часть комплекса входного сопротивления двухполюсника. Такой способ справедлив, если не пренебрегать активными сопротивлениями индуктивных катушек.

Следовательно, условие наступления режима резонанса токов в схеме рис. 5.25, а можно записать так:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{1}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \quad (5.51)$$

На рис. 5.25, б изображена векторная диаграмма для резонансного режима. Из (5.51) следует, что, если $R_2 = 0$, резонанс наступит при условии

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \omega C. \quad (5.51')$$

В еще более частном случае, когда $R_2 = 0$ и $R_1 \ll \omega L$, резонанс наступит при

$$\omega^2 LC \approx 1. \quad (5.51'')$$

Резонанса можно достичь путем изменения ω , L , C или путем изменения R_1 и R_2 . Ток в неразветвленной части схемы по величине может быть меньше, чем токи в ветвях схемы. При $R_2 = 0$ и $R_1 \approx 0$ ток I может оказаться ничтожно малым по сравнению с токами I_1 и I_2 .

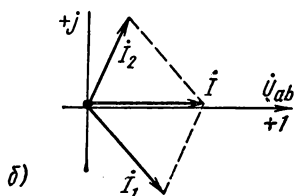
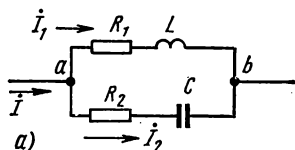


Рис. 5.25

В идеализированном, практически не выполняемом режиме работы, когда $R_1 = R_2 = 0$, ток в неразветвленной части схемы 5.25, а равен нулю и входное сопротивление схемы равно бесконечности.

Обратим внимание на следующее. В формулу (5.51) входит пять величин (L , C , R_1 , R_2 , ω). Если определять из нее L или C , то может оказаться, что для искомой величины будут получены одно или два действительных значения либо мнимое значение.

Получение двух действительных значений для L и C свидетельствует о том, что при неизменных четырех параметрах благодаря изменению пятого параметра можно получить два резонансных режима (пояснения к возникновению двух резонансных режимов при изменении одного параметра и неизменных остальных даются в примере 70).

Получение мнимых значений L или C свидетельствует о том, что при данных сочетаниях параметров резонанс невозможен.

Определим ω из (5.51):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}, \quad (a)$$

где ω_0 — резонансная частота в контуре без потерь (при $R_1 = R_2 = 0$).

Поскольку угловая частота действительна и положительна, то числитель и знаменатель формулы (а) должны быть с одинаковыми знаками. Это имеет место при:

$$а) \frac{L}{C} > R_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{L}{C} > R_2^2;$$

$$б) \frac{L}{C} < R_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{L}{C} < R_2^2.$$

При $R_1 = R_2$ частота $\omega = \omega_0$. При $\frac{L}{C} = R_1^2 = R_2^2$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{0}{0}}, \quad (б)$$

т. е. ω в случае (б) получается величиной неопределенной. Физически это означает, что резонанс может возникать при любой частоте. Сопротивление параллельного контура при этом чисто активное, равно R .

Пример 59. В схеме рис. 5.25, а: $R_1 = 30 \text{ ом}$; $\omega L = 40 \text{ ом}$; $R_2 = 0$; $\omega = 10^3 \text{ сек}^{-1}$. При какой емкости в схеме будет резонанс токов?

Решение. По формуле (5.51)

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{\omega L} = \frac{30^2 + 40^2}{40} = 62,5 \text{ ом};$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^3 \cdot 62,5} = 16 \text{ мкф}.$$

§ 5.27. КОМПЕНСАЦИЯ СДВИГА ФАЗ

Входное сопротивление большинства потребителей электрической энергии имеет индуктивный характер. Для того чтобы уменьшить потребляемый ими ток за счет снижения его реактивной составляющей и тем снизить потери энергии в генераторе и подводящих проводах, параллельно приемнику энергии включают батарею конденсаторов.

Уменьшение угла сдвига фаз между напряжением на приемнике и током, потребляемым от генератора, называют *компенсацией сдвига фаз*.

Компенсация сдвига фаз особенно существенна для энергоемких потребителей, например крупных заводов. Осуществляется она в месте ввода линии питания в распределительном устройстве. Экономически выгодно подключать конденсаторы на возможно более высокое напряжение (ток через конденсаторы равен $I_C = U\omega C$). Угол сдвига фаз между напряжением и током, потребляемым от источника питания, обычно доводят до величины, при которой $\cos \varphi = 0,9 \div 0,95$.

§ 5.28. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Резонанс в схеме последовательного соединения R , L , C (рис. 5.26, а) называют *резонансом напряжений*.

При резонансе ток в цепи должен совпадать по фазе с э. д. с. \dot{E} . Это возможно, если входное сопротивление схемы

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

будет чисто активным. Условие наступления резонанса в схеме рис. 5.26, а

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (5.52)$$

где ω_0 — резонансная частота.

При этом $I = \frac{E}{R}$. Напряжение на индуктивности при резонансе равно напряжению на емкости:

$$U_L = U_C = \omega_0 L I = \frac{\omega_0 L}{R} E.$$

Отношение

$$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = Q \quad (5.53)$$

называют *добротностью* резонансного контура. Добротность показывает, во сколько раз напряжение на индуктивности (или на емкости) превышает напряжение на входе схемы в резонансном режиме. Практически в радиотехнических устройствах Q может достигать до 300 и даже больше. Векторная диаграмма для режима резонанса изображена на рис. 5.26, б.

Характеристическим сопротивлением ρ для схемы рис. 5.26, а называют отношение напряжения на L или C в режиме резонанса к току в этом режиме $\rho = QR$.

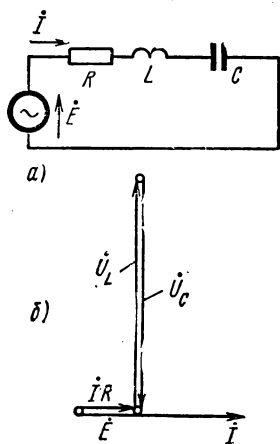


Рис. 5.26

§ 5.29. ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СХЕМЫ РИС. 5.26, а ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЧАСТОТЫ И ИНДУКТИВНОСТИ

Пусть в схеме рис. 5.26, а параметры R , L , C и величина э. д. с. E постоянны, но меняется частота ω . Обсудим характер изменения тока I и напряжений U_L и U_C в функции от ω .

Ток в цепи

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

При изменении ω меняется реактивное сопротивление цепи $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$: при $\omega \rightarrow 0$ сопротивление $X \rightarrow -\infty$ и ток $I \rightarrow 0$; при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ сопротивление $X = 0$ и ток $I = \frac{E}{R}$; при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление $X \rightarrow \infty$ и ток $I \rightarrow 0$.

* Стрелка \rightarrow заменяет слово «стремящийся» или соответственно «стремится».

Напряжение на индуктивности

$$U_L = \omega LI = E \frac{Q \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ напряжение $U_L = 0$; при $\omega \rightarrow \infty$ напряжение $U_L \rightarrow E$ (рис. 5.27, а). Не приведенный здесь подробный анализ показывает,

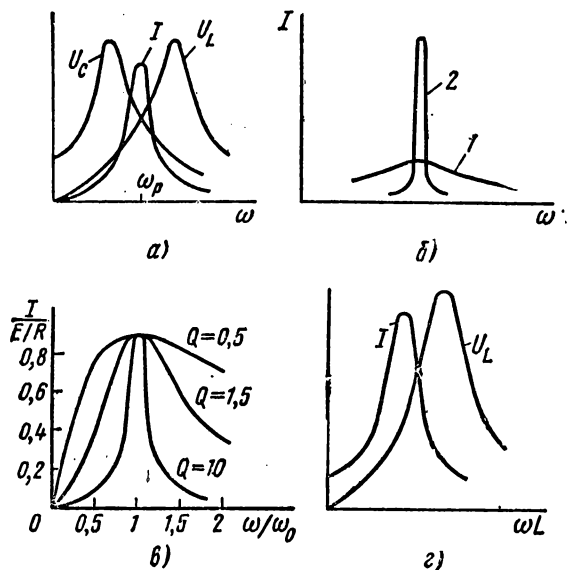


Рис. 5.27

что при $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ кривая U_L (и кривая U_C) проходит через максимум, при $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ кривая U_L монотонно стремится к E .

Напряжение на емкости $U_C = I \frac{1}{\omega C}$ при $\omega \rightarrow 0$ стремится к E , при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к 0.

Из рис. 5.27, а видно, что максимумы напряжений на индуктивности U_L и емкости U_C имеют место при частотах, не равных резонансной частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: максимум U_L имеет место при частоте ω_L , большей,

чем ω_0 , а максимум U_C — при частоте ω_C , меньшей ω_0 ($\omega_L =$
 $= \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 C}{L}}}; \quad \omega_C = \frac{\omega_0^2}{\omega_L}$).

На рис. 5.27, б изображены две кривые, характеризующие зависимость $I = f(\omega)$ для цепи с неизменными L , C и E при двух различных значениях R . Для кривой 2 сопротивление R меньше (а добротность Q больше), чем для кривой 1.

Обычно кривые рис. 5.27, б изображают в относительных единицах, откладывая ток в долях от тока при резонансе, а частоту — в долях от резонансной частоты. Графики тока в относительных единицах изображены на рис. 5.27, в. Они построены по формуле

$$\frac{I}{E/R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Чем меньше активное сопротивление резонансного контура при неизменных остальных параметрах схемы, т. е. чем больше добротность контура Q , тем более острой (пикообразной) становится форма кривой $I = f(\omega)$.

Если в схеме 5.26, а менять не частоту, а индуктивность L , то зависимости I , U_L в функции от $X_L = \omega L$ ($\omega = \text{const}$) будут в виде кривых рис. 5.27, з.

Так как $U_C = \frac{1}{\omega C} I$, а $\frac{1}{\omega C} = \text{const}$, то кривая $U_C = f(\omega L)$ качественно имеет такой же вид, что и кривая $I = f(\omega L)$.

Пример 60. В схеме рис. 5.26, а: $R = 10 \text{ ом}$; $L = 1 \text{ гн}$; $C = 1 \text{ мкф}$.

Определить резонансную частоту ω_0 , добротность Q , а также напряжение на емкости U_C , если на вход схемы будет подано напряжение 10 мв при резонансной частоте.

Решение. Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 10^3 \text{ сек}^{-1}.$$

$$\text{Добротность } Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10^3 \cdot 1}{10} = 100.$$

$$\text{Ток в цепи } I = \frac{E}{R} = \frac{0,01}{10} = 1 \text{ ма}.$$

$$\text{Напряжение на емкости } U_C = QE = 100 \cdot 0,01 = 1 \text{ в}.$$

§ 5.30. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДВУХПОЛЮСНИКА

Входное сопротивление двухполюсника и входная проводимость его есть функции частоты. Зависимости действительной и мнимой частей входного сопротивления или входной проводимости двухполюсника от частоты называют *частотными характеристиками двухполюсника*.

Частотные характеристики получили широкое распространение в радиотехнике, связи и автоматике. Их либо рассчитывают, если известна схема внутренних соединений двухполюсника и значения активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей в ней, либо снимают опытным путем.

При снятии частотных характеристик опытным путем на вход схемы подают напряжение, частота которого может меняться в широких пределах, и по результатам измерений подсчитывают действительную и мнимую части входного сопротивления.

В схему двухполюсника могут входить последовательно и параллельно соединенные индуктивности, емкости и активные сопротивления. Наибольший интерес представляют частотные характеристики двухполюсников, составленных только из индуктивностей и емкостей. Если частота источника питания двухполюсника высока, то индуктивные сопротивления катушек индуктивности оказываются много больше собственных активных сопротивлений катушек и для упрощения построения частотных характеристик последними часто пренебрегают. Для такой идеализированной упрощенной схемы, где имеются только индуктивности и емкости, построение частотных характеристик схемы значительно упрощается.

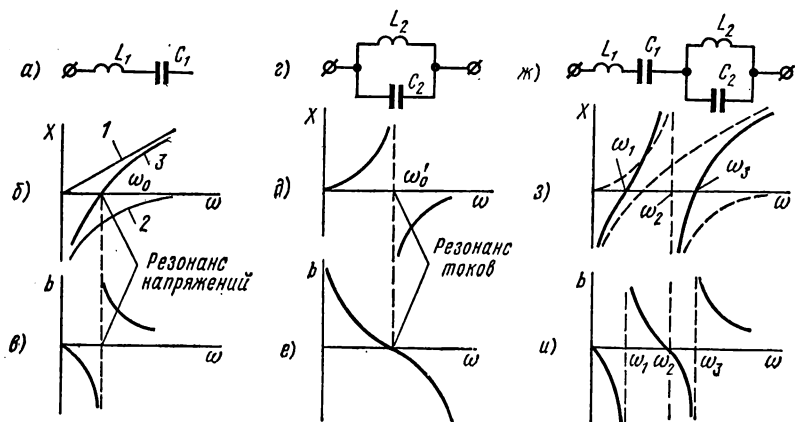


Рис. 5.28

Рассмотрим построение частотных характеристик двухполюсников, изображенных на рис. 5.28, а и г. Двухполюсник рис. 5.28, а образован последовательно соединенными индуктивностью L_1 и емкостью C_1 ; двухполюсник рис. 5.28, г — параллельно соединенными L_2 и C_2 . При построении частотных характеристик будем полагать, что в реактивных сопротивлениях всех элементов, из которых составлены двухполюсники, отсутствуют потери энергии. Входное сопротивление и входная проводимость для двухполюсников рис. 5.28, а равны соответственно:

$$Z = jX = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad X = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1};$$

$$Y = -jb = \frac{1}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)}, \quad b = \frac{1}{X} = \frac{1}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}.$$

Прямая 1 рис. 5.28, б изображает зависимость $\omega L_1 = f(\omega)$; кривая 2 — зависимость $-\frac{1}{\omega C_1} = f(\omega)$, кривая 3 — зависимость $X = f(\omega)$.

Значение $\omega = \omega_0$, при котором кривая 3 (рис. 5.28, б) пересекает ось абсцисс, равно угловой частоте, при которой в двухполюснике рис. 5.28, а наступает резонанс напряжений.

При $\omega < \omega_0$ входное сопротивление имеет емкостный характер (X отрицательно), при $\omega > \omega_0$ — индуктивный (X положительно).

Так как для схемы (см. рис. 5.28, а) реактивная проводимость $b = \frac{1}{X}$, то кривая $b = f(\omega)$, изображенная на рис. 5.28, в, взаимнообратна кривой X рис. 5.28, б. При $\omega < \omega_0$ входная проводимость имеет емкостный характер, при $\omega > \omega_0$ — индуктивный. В точке $\omega = \omega_0$ кривая $b = f(\omega)$ претерпевает разрыв от $-\infty$ до $+\infty$. Для двухполюсника рис. 5.28, г входная проводимость и входное сопротивление соответственно равны:

$$Y = \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 = -j\left(\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2\right) = -jb;$$

$$b = \frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2; \quad X = \frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2}.$$

Зависимости $X = f(\omega)$ и $b = f(\omega)$ для схемы рис. 5.28, г изображены соответственно на рис. 5.28, д и е. При $\omega = \omega_0$ реактивная проводимость b становится равной нулю, а реактивное сопротивление претерпевает разрыв от $+\infty$ до $-\infty$. При $\omega = \omega_0$ в двухполюснике рис. 5.28, г имеет место резонанс токов.

Таким образом, по виду характеристики $X = f(\omega)$ или характеристики $b = f(\omega)$ можно судить о том, какого типа резонансные режимы и в каком количестве будут возникать в исследуемой схеме при изменении частоты от 0 до ∞ .

Точки, в которых кривая $X = f(\omega)$ пересекает ось абсцисс [или соответственно кривая $b = f(\omega)$ претерпевает разрыв от $-\infty$ до $+\infty$], дают значения угловой частоты, при которых в исследуемой схеме возникают режимы резонанса напряжений.

Точки, в которых кривая $X = f(\omega)$ претерпевает разрыв от $+\infty$ до $-\infty$ [или кривая $b = f(\omega)$ пересекает ось абсцисс], соответствуют режимам резонанса токов.

В качестве иллюстрации сформулированного правила исследования построим частотные характеристики $X = f(\omega)$ и $b = f(\omega)$ для схемы рис. 5.28, ж и по ним определим, какие резонансные режимы и в каком количестве возможны в схеме при изменении частоты от 0 до ∞ .

Для двухполюсника рис. 5.28, ж реактивное сопротивление равно сумме реактивных сопротивлений двухполюсников рис. 5.28, а и г. В соответствии с этим ординаты кривой $X = f(\omega)$ для схемы рис. 5.28, ж получаем путем суммирования ординат кривых $X = f(\omega)$ рис. 5.28, б и д (рис. 5.28, э).

Зависимость $b = f(\omega)$ для схемы рис. 5.28, ж изображена на рис. 5.28, и. Из рис. 5.28, э и и видно, что в схеме рис. 5.28, ж при увеличении частоты от 0 до ∞ будет происходить следующее: при $\omega = \omega_1$ возникнет резонанс напряжений, при $\omega = \omega_2$ — резонанс токов, затем при $\omega = \omega_3$ вновь возникнет резонанс напряжений. При последующем увеличении частоты резонансов в схеме возникать не будет. Обратим внимание на следующее:

- 1) режимы резонанса токов и резонанса напряжений чередуются;
- 2) число резонансных частот для канонических схем (см. § 5.31) на 1 меньше числа реактивных элементов;
- 3) если в схеме есть путь для прохождения постоянного тока, то первым наступит резонанс токов, если нет — резонанс напряжений.

§ 5.31. КАНОНИЧЕСКИЕ СХЕМЫ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

Путем эквивалентных преобразований отдельных частей сложных схем последние можно привести к более простым схемам с минимально возможным числом R , L , C в них — к каноническим схемам. Так, схемы рис. 5.28 являющиеся каноническими. Преобразования осуществляют либо путем перехода от звезды к треугольнику (или обратно), или от параллельно-последовательного соединения (рис. 5.29, а) к параллельному (рис. 5.29, б), либо от параллельного соединения

(рис. 5.29, в) к последовательно-параллельному (рис. 5.29, г) и последующего упрощения схемы. Значения коэффициентов перехода:

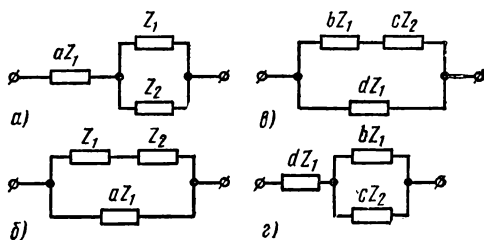


Рис. 5.29

для рис. 5.29, а и б

$$b = a(1 + a); \quad c = (1 + a)^2; \quad d = 1 + a;$$

для рис. 5.29, в и г

$$b = \frac{a^2}{1+a}; \quad c = \left(\frac{a}{1+a}\right)^2; \quad d = \frac{a}{1+a}.$$

Двухполюсники рис. 5.29, а и б, как и рис. 5.29, в и г, называют *эквивалентными*, так как они имеют равные входные сопротивления при всех частотах.

§ 5.32. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ОТ АКТИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА НАГРУЗКЕ

К зажимам ab активного двухполюсника рис. 5.30, а подключена нагрузка $Z_H = R_H + jX_H$. Требуется выяснить, при соблюдении каких условий в нагрузке будет выделяться максимальная активная мощность.

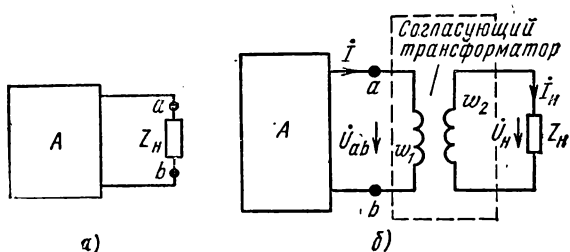


Рис. 5.30

По методу эквивалентного генератора (см. § 1.24) ток в нагрузке

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{ab \text{ х. х.}}}{Z_{\text{вх}} + Z_H},$$

где $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}$ — входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам ab .

Поэтому

$$I = \frac{\dot{U}_{ab \times, x}}{R_{вх} + R_n + j(X_{вх} + X_n)}.$$

По условию $R_{вх}$ и $X_{вх}$ заданы и изменять их нельзя. Изменить можно лишь R_n и X_n . Выберем такое X_n , чтобы ток в цепи был максимальным; это возможно, если $X_{вх} + X_n = 0$. При этом двухполюсник работает в резонансном режиме: ток через нагрузку по фазе совпадает с напряжением $\dot{U}_{ab \times, x}$:

$$I = \frac{\dot{U}_{ab \times, x}}{R_{вх} + R_n}.$$

Как и в цепи постоянного тока (см. § 1.25), если взять $R_n = R_{вх}$, выделяющаяся в нагрузке мощность будет максимальна и равна

$$P = \frac{U_{ab \times, x}^2}{4R_{вх}}.$$

Таким образом, чтобы выделить в нагрузке, присоединяемой к активному двухполюснику с входным сопротивлением $R_{вх} + jX_{вх}$, максимально возможную мощность, необходимо выбрать следующие сопротивления нагрузки: $X_n = -X_{вх}$ и $R_n = R_{вх}$.

§ 5.33. СОГЛАСУЮЩИЙ ТРАНСФОРМАТОР

Нагрузкой двухполюсника может быть какой-либо уже существующий аппарат, сопротивление которого Z_n так же, как входное сопротивление двухполюсника $Z_{вх}$, задано и не может быть изменено. В этом случае согласование нагрузки с двухполюсником производят, присоединяя нагрузку не непосредственно к зажимам ab двухполюсника, а через с о г л а с у ю щ и й т р а н с ф о р м а т о р в соответствии со схемой рис. 5.30, б. Первичная и вторичная обмотки трансформатора имеют количество витков w_1 и w_2 . Активные сопротивления обмоток и индуктивности рассеяния обмоток весьма малы, а сердечник (на рисунке не показан) выполнен из высококачественного магнитного материала с малыми потерями, так что ток холостого хода трансформатора мал по сравнению с током по обмотке w_1 при нагрузке. Такой трансформатор часто называют *идеальным*. Для него справедливы соотношения (обозначения соответствуют рис. 5.30, б):

$$I w_1 - I_n w_2 \approx 0 \text{ и } \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_n} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Пояснения к этим формулам см. в § 9.67 (обозначения которого согласуются так: $U_{ab} = \dot{U}_1$, $I_n = I_2$ и $I = I_1$).

Входное сопротивление изображенной пунктиром части схемы по отношению к зажимам ab

$$\frac{\dot{U}_{ab}}{I} = \frac{\dot{U}_n \cdot \frac{w_1}{w_2}}{I_n \cdot \frac{w_2}{w_1}} = Z_n \cdot \frac{w_1^2}{w_2^2} = R_n \cdot \frac{w_1^2}{w_2^2} + jX_n \cdot \frac{w_1^2}{w_2^2}.$$

Следовательно, согласующий трансформатор изменяет (трансформирует) сопротивление нагрузки в $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$ раз.

* В соответствии с предыдущим это сопротивление должно быть комплексно сопряженным с сопротивлением двухполюсника $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$.

При определении числа витков w_1 и w_2 и сечения сердечника согласующего трансформатора руководствуются следующим: для выполнения согласования по активному сопротивлению $R_{вх} = R_n \cdot \frac{w_1^2}{w_2^2}$ необходимо, чтобы отношение чисел витков $\frac{w_1}{w_2} = \sqrt{\frac{R_{вх}}{R_n}}$. При выборе величины w_1 и сечения сердечника должно быть учтено, что в установившемся режиме работы амплитудное значение потока в сердечнике не должно достигать значения потока насыщения (иначе будет нарушено условие $lw_1 - I_n w_2 \approx 0$). Для согласования по реактивному сопротивлению $X_{вх} = -X_n \cdot \frac{w_1^2}{w_2^2}$ последовательно с нагрузкой включают дополнительное реактивное сопротивление соответствующего характера.

§ 5.34. ИДЕАЛЬНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР И ГИРАТОР

В качестве элементов схем замещения электрических цепей наряду с R, L, C, M в литературе используют идеальный трансформатор (ИТ) и гиратор.

ИТ называют трансформатор без потерь, у которого входные и выходные токи и напряжения связаны соотношениями:

$$\dot{U}_1 = K \dot{U}_2, \quad \dot{I}_2 = K \dot{I}_1,$$

где $K = \frac{w_1}{w_2}$ — коэффициент трансформации.

ИТ трансформирует напряжение \dot{U}_1 в напряжение \dot{U}_2 , ток \dot{I}_1 в ток \dot{I}_2 , сопротивление нагрузки Z в сопротивление $K^2 Z$ (см. § 5.31).

Г и р а т о р о м называют четырехполюсник без потерь, у которого входные и выходные величины связаны соотношениями:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 G; \quad \dot{I}_2 = -\dot{U}_1 G \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix}$$

где G — проводимость гиратора.

Гиратор не поглощает и не накапливает энергию, он преобразует напряжение \dot{U}_1 в ток \dot{I}_2 , ток \dot{I}_1 в напряжение \dot{U}_2 , сопротивление нагрузки Z в сопротивление $-\frac{1}{ZG^2}$. Название «гиратор» объясняется тем, что дифференциальные уравнения двух контуров, связанных через гиратор, эквивалентны уравнениям движения двух масс, связанных через гироскоп.

§ 5.35. ПАДЕНИЕ И ПОТЕРИ НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ

Генератор соединен с приемником энергии линией передачи, которая обладает активным R_L и индуктивным $X_L = \omega L_L$ сопротивлениями.

Построим векторную диаграмму для цепи, состоящей из генератора, линии передачи и приемника. Для определенности положим, что нагрузка приемника имеет индуктивный характер. Вектор напряжения в конце линии (на приемнике) направим по оси $+1$ (рис. 5.31), ток \dot{I} отстает от него в силу индуктивного характера нагрузки. Падение напряжения в активном сопротивлении линии $\dot{I}R_L$ совпадает по фазе с током, падение напряжения в индуктивном сопротивлении линии $\dot{I}jX_L$ опережает ток на 90° .

Под падением напряжения в линии передачи понимают модуль геометрической разности векторов напряжения в начале (\dot{U}_1) и конце (\dot{U}_2) линии; оно равно $I \sqrt{R_L^2 + (\omega L_L)^2}$.

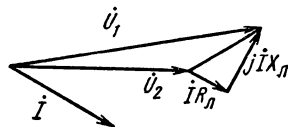


Рис. 5.31

Потеря напряжения равна разности модулей напряжения в начале и конце линии, т. е. $|U_1| - |U_2|$. Потеря напряжения в линии передачи показывает, на сколько вольт напряжение в конце линии меньше, чем напряжение в начале линии.

Как правило, падение напряжения больше потери напряжения.

§ 5.36. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ В НИХ МАГНИТНОСВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

В состав электрических цепей могут входить катушки, магнитно-связанные с другими катушками. Поток одной из них пронизывает другие и наводит в них э. д. с. взаимной индукции, которые должны быть

учтены в расчете. При составлении уравнений для магнитносвязанных цепей необходимо знать, согласно или встречно направлены потоки самоиндукции и взаимной индукции.

Правильное заключение об этом можно сделать, если известно направление намотки катушек на сердечнике и выбран положительное направление токов в них.

На рис. 5.32, а катушки включены согласно, на рис. 5.32, б —

встречно. Чтобы не загромождать чертеж, сердечники катушек на электрических схемах обычно не изображают, ограничиваясь тем, что одноименные зажимы (например, начала катушек) помечают одинаковыми значками, например звездочками*.

Схема рис. 5.32, в эквивалентна схеме рис. 5.32, а, а схема рис. 5.32, г — схеме рис. 5.32, б.


Если на электрической схеме токи двух магнитносвязанных катушек одинаково ориентированы относительно одноименно (звездочками) обозначенных зажимов катушек, например оба направлены к звездочкам или оба направлены от звездочек, то имеет место согласное включение, в противном случае — встречное.

На примере рис. 5.33 рассмотрим методику составления уравнений для расчета магнитносвязанных цепей. Произвольно выберем положительные направления токов в ветвях рис. 5.33. Направления обхода контуров выберем по часовой стрелке. Сначала составим уравнения для мгновенных значений:

$$i = i_2 + i_3.$$

Для левого контура (первая и вторая ветви)

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 = e_1. \quad (a)$$

* Одноименные зажимы магнитносвязанных катушек часто обозначают вместо звездочек точками:  Если магнитно связано несколько катушек, то начало и конец размечают для каждой пары катушек отдельно.

Перед слагаемым $M \frac{di_3}{dt}$ поставлен тот же знак, что и перед $L_1 \frac{di_1}{dt}$, так как ток i_1 и ток i_3 входят в одноименные зажимы магнитно связанных катушек, т. е. имеет место согласное включение. Сумма слагаемых

$$M \frac{di_3}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

представляет собой падение напряжения в первой катушке.

Все слагаемые левой части уравнения (а) взяты со знаком плюс, так как на всех участках первого контура положительные направления токов совпадают с направлением обхода контура. Составим уравнение для второго контура (вторая и третья ветви). Направление тока i_2 встречно направлению обхода контура, поэтому сумма падений напряжений во второй ветви войдет в уравнение со знаком минус:

$$-\frac{1}{C_2} \int i_2 dt - i_2 R_2 + L_3 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_3 R_3 = -e_3.$$

В комплексной форме записи:

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad (б)$$

$$I_1 \left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega L_1 \right) + I_2 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) + I_3 j\omega M = \dot{E}_1; \quad (в)$$

$$I_1 j\omega M - I_2 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) + I_3 (R_3 + j\omega L_3) = -\dot{E}_3. \quad (г)$$

§ 5.37. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ МАГНИТНОСВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

На рис. 5.34 изображена схема последовательного согласного включения двух катушек и на рис. 5.35 — последовательного встречного включения тех же катушек.

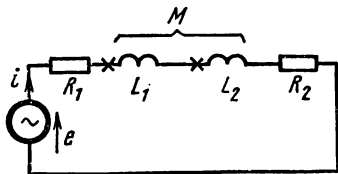


Рис. 5.34

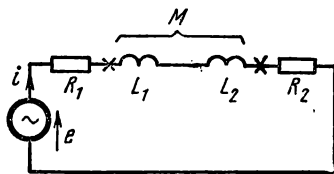


Рис. 5.35

При согласном включении

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

В комплексной форме записи:

$$\begin{aligned} I [R_1 + R_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2M)] &= \dot{E}; \\ \dot{I} Z_{\text{согл}} &= \dot{E}; \\ Z_{\text{согл}} &= R_1 + R_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2M). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Векторная диаграмма для согласного включения изображена на рис. 5.36, где \dot{U}_1 — напряжение на первой катушке, \dot{U}_2 — на второй.

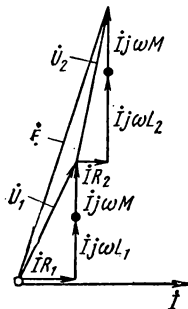


Рис. 5.36

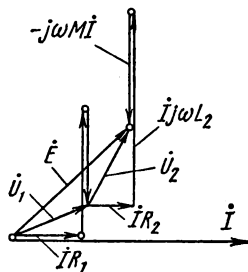


Рис. 5.37

При встречном включении

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

Отсюда

$$\dot{I} Z_{\text{встр}} = \dot{E},$$

где

$$Z_{\text{встр}} = R_1 + R_2 + j\omega (L_1 + L_2 - 2M). \quad (5.55)$$

Векторная диаграмма для встречного включения при $L_1 > M$ и $L_2 > M$ изображена на рис. 5.37.

§ 5.38. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ОПЫТНЫМ ПУТЕМ

Обсудим два практически важных способа опытного определения взаимной индуктивности M двух магнитно связанных катушек.

Первый способ. Проведем два опыта. В первом из них включим катушки последовательно и согласо. Измерим ток и напряжение на входе и активную мощность цепи. В другом те же катушки включим последовательно и встречно и также измерим I , U , P . По результатам измерений найдем

$$X_{\text{согл}} = \omega (L_1 + L_2 + 2M)$$

и

$$X_{\text{встр}} = \omega (L_1 + L_2 - 2M).$$

Разность

$$X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}} = 4\omega M;$$

следовательно,

$$M = \frac{X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}}}{4\omega}. \quad (5.56)$$

Второй способ. Подключим первую катушку к источнику синусоидальной э. д. с. через амперметр (рис. 5.38), а к зажимам второй катушки подключим вольтметр с большим внутренним сопротивлением. Измерим ток I_1 и напряжение U_2 .

Мгновенное значение напряжения

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt}.$$

Действующее значение его $U_2 = \omega M I_1$.
Следовательно,

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1}. \quad (5.57)$$

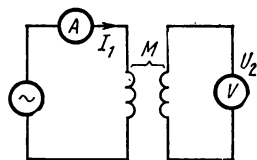


Рис. 5.38

Пример 61. В схеме рис. 5.38 вольтметр показал 100 в, амперметр 10 а; $\omega = 314 \text{ сек}^{-1}$. Определить M .

Решение. По формуле (5.57),

$$M = \frac{100}{314 \cdot 10} = 0,0319 \text{ гн}.$$

§ 5.39. ТРАНСФОРМАТОР. ВНОСИМОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Трансформатор представляет собой статическое (т. е. не имеющее подвижных частей) устройство, служащее для преобразования переменного во времени напряжения по величине, а также для электрического разделения цепей и для преобразования сопротивлений по величине. Передача энергии из одной цепи в другую производится трансформатором благодаря явлению взаимной индукции.

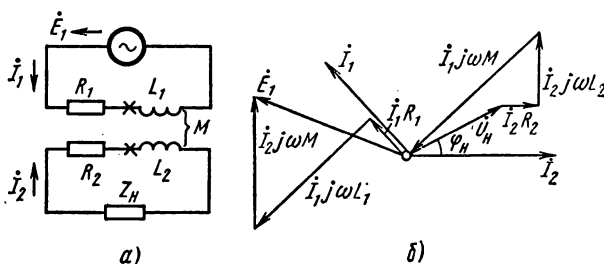


Рис. 5.39

Трансформатор имеет две обмотки, находящиеся на общем сердечнике. Магнитную проницаемость сердечника будем полагать постоянной. Параметры первичной обмотки R_1 и L_1 ; вторичной — R_2 и L_2 . Взаимная индуктивность между обмотками M (рис. 5.39, а). Сопротивление нагрузки, подключенной к зажимам вторичной обмотки, равно Z_H .

Выберем положительные направления токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 . Обозначим напряжение на нагрузке \dot{U}_H . Запишем уравнения в комплексной форме: для первичной цепи

$$\dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 j\omega L_1 + \dot{I}_2 j\omega M = \dot{E}_1; \quad (5.58)$$

для вторичной цепи

$$\dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega L_2 + \dot{I}_1 j\omega M + \dot{U}_H = 0. \quad (5.59)$$

На рис. 5.39, б качественно построим векторную диаграмму, полагая, что нагрузка $Z_H = z_H e^{j\varphi_H}$ имеет индуктивный характер. Ток \dot{I}_2 направим по оси $+1$. Напряжение на нагрузке \dot{U}_H опережает ток \dot{I}_2 на угол φ_H . Падение напряжения $\dot{I}_2 R_2$ совпадает по фазе с током \dot{I}_2 . Вектор $\dot{I}_2 j\omega L_2$ опережает ток \dot{I}_2 на 90° .

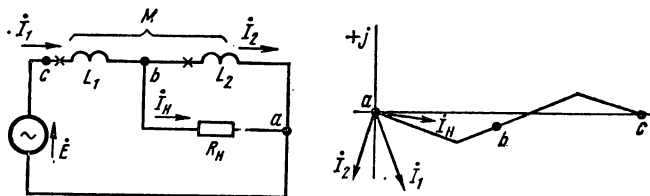


Рис. 5.40

В соответствии с уравнением (5.59) вектор $\dot{I}_1 j\omega M$ проводим так, чтобы геометрическая сумма падений напряжений во вторичной цепи равнялась нулю.

Ток \dot{I}_1 отстает от вектора $\dot{I}_1 j\omega M$ на 90° . Вектор $\dot{I}_1 R_1$ совпадает с током \dot{I}_1 по фазе, а вектор $\dot{I}_1 j\omega L_1$ опережает \dot{I}_1 на 90° .

Вектор $\dot{I}_2 j\omega M$ опережает \dot{I}_2 на 90° . В соответствии с уравнением (5.58) геометрическая сумма $\dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 j\omega L_1 + \dot{I}_2 j\omega M$ дает \dot{E}_1 .

В (5.59) подставим

$$\dot{U}_H = \dot{I}_2 Z_H = \dot{I}_2 (R_H + jX_H)$$

и решим уравнения (5.58) и (5.59) относительно \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{(R_1 + R_{вн}) + j(X_1 - X_{вн})}.$$

Здесь $R_{вн}$ и $X_{вн}$ — вносимые из вторичного контура в первичный активное и реактивное сопротивления;

$$R_{вн} = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + R_H)^2 + (\omega L_2 + X_H)^2} (R_2 + R_H);$$

$$X_1 = \omega L_1;$$

$$X_{вн} = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + R_H)^2 + (\omega L_2 + X_H)^2} (\omega L_2 + X_H).$$

Вносимые сопротивления представляют собой такие сопротивления, которые следовало бы «внести» в первичную цепь (включить последовательно с R_1 и X_1), чтобы учесть влияние нагрузки вторичной цепи трансформатора на ток в его первичной цепи.

Пример 62. Определить токи в схеме рис. 5.40, а и построить топографическую диаграмму, совместив ее с векторной диаграммой токов, полагая $\omega L_1 = 2 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 3 \text{ ом}$, $\omega M = 1 \text{ ом}$, $R_n = 4 \text{ ом}$, $E = 100 \text{ в}$.

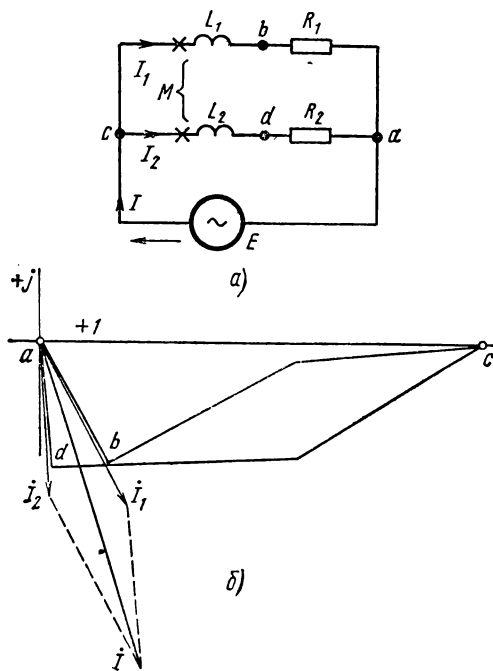


Рис. 5.41

Решение. Составим уравнения по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа,

$$I_1 = I_2 + I_n.$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа обход контуров будем совершать по часовой стрелке; тогда

$$I_1 j\omega L_1 + I_2 j\omega M + I_n R_n = \dot{E};$$

$$I_1 j\omega M + I_2 j\omega L_2 - I_n R_n = 0.$$

В двух последних уравнениях заменим I_n на $I_1 - I_2$:

$$I_1 (R_n + j\omega L_1) + I_2 (j\omega M - R_n) = \dot{E};$$

$$I_1 (j\omega M - R_n) + I_2 (R_n + j\omega L_2) = 0.$$

Подставим числа:

$$I_1 (4 + 2j) + I_2 (j - 4) = 100;$$

$$I_1 (j - 4) + I_2 (4 + 3j) = 0.$$

Решение уравнений дает:

$$\begin{aligned} I_1 &= 17,7e^{-j63^\circ} a; & I_2 &= 14,6e^{-j114^\circ} a; \\ I_n &= I_1 - I_2 = 14,12e^{-j9^\circ 54'} a. \end{aligned}$$

На рис. 5.40, б изображены топографическая диаграмма и векторная диаграмма токов.

Пример 63. Построить топографическую диаграмму для схемы рис. 5.41, а, совместив ее с векторной диаграммой токов. Две ветви схемы связаны магнитно. Значения параметров: $\omega L_1 = 3 \text{ ом}$, $\omega L_2 = 4 \text{ ом}$, $\omega M = 3 \text{ ом}$, $R_1 = R_2 = 2 \text{ ом}$, $\dot{E} = 100 \text{ в}$.

Решение. Обозначим токи в ветвях через I_1 и I_2 и ток в неразветвленной части схемы — через I . Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для согласного включения катушек:

$$\begin{aligned} I_1(R_1 + j\omega L_1) + I_2 j\omega M &= \dot{E}; \\ I_1 j\omega M + I_2(R_2 + j\omega L_2) &= \dot{E}. \end{aligned}$$

Совместное решение их дает:

$$I_1 = 16e^{-j60^\circ} a; \quad I_2 = 14,27e^{-j86^\circ 30'} a.$$

Топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, изображена на рис. 5.41, б.

§ 5.40. РЕЗОНАНС В МАГНИТНОСВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРАХ

В § 5.23—5.27 были описаны резонансные явления в параллельном, последовательном и последовательно-параллельном резонансных контурах. Рассмотрим резонанс в магнитносвязанных колебательных контурах — в схеме рис. 5.42, а, часто применяемой в радиотехнике. С целью упрощения выкладок положим $L_1 = L_2 = L$; $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_2 = R$, что дает возможность относительно легко выявить основные закономерности резонанса в этой схеме.

Составим два уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) - I_2 j\omega M &= \dot{E}; \\ -I_1 j\omega M + I_2 \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Найдем

$$I_2 = \frac{\dot{E} j\omega M}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right)^2 + \omega^2 M^2}.$$

Напряжение на конденсаторе вторичного контура

$$\dot{U}_{C_2} = I_2 \frac{1}{j\omega C} = \dot{E} \frac{M}{C} \cdot \frac{1}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right)^2 + \omega^2 M^2}.$$

Назовем $\frac{\dot{U}_{C_2}}{\dot{E}} = K_u$. Тогда

$$K_u = \frac{M}{C} \cdot \frac{1}{R^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + j2R \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \omega^2 M^2}. \quad (a)$$

Обозначим $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = d$, $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{L}$, $\varepsilon = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

С помощью ε учитывается отклонение текущей частоты ω от резонансной ω_0 . Будем рассматривать работу схемы при относительно малых отклонениях ω от ω_0 . Положим $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$. Тогда

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{\omega_0^2} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}.$$

В свою очередь

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx -\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = -\varepsilon.$$

При малых отклонениях ω от ω_0 , вынеся в знаменателе выражения (а) за скобку $\omega^2 L^2 \approx \omega_0^2 L^2$ и используя указанные обозначения, получим

$$K_u = \frac{k}{k^2 + d^2 - \varepsilon^2 - j2\varepsilon d}.$$

Модуль

$$|K_u| = \frac{k}{\sqrt{(k^2 + d^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 d^2}}. \quad (6)$$

При фиксированных k и d можно исследовать $|K_u|$ на экстремум в функции ε для двух случаев: при $k > d$ и при $k < d$.

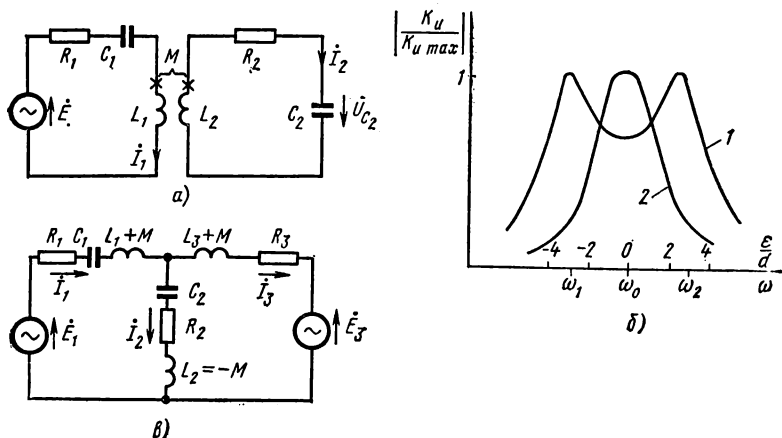


Рис. 5.42

При $k > d$ имеются три экстремума: минимум при $\varepsilon = 0$, т. е. при $\omega = \omega_0$, и два максимума при $\varepsilon_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 - d^2}$, им соответствуют частоты

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \varepsilon_{1,2}}}.$$

Резонансная кривая при этом имеет два «горба» (см. кривую 1 на рис. 5.42, б, которая построена при $k = 3d$). С увеличением k «горбы» кривой раздвигаются.

При $k < d$ имеется только один экстремум — максимум — при $\varepsilon = 0$ (см. кривую 2 на рис. 5.42, б). По оси абсцисс на рис. 5.42, б отложено $\frac{\varepsilon}{d}$, по оси ординат —

отношение $\left| \frac{K_u}{K_{u \max}} \right|$, где $|K_{u \max}| = \frac{1}{2d} = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Токи первичного I_1 и вторичного I_2 контуров в функции от $\frac{\varepsilon}{d}$ при $k > d$ также имеют двугорбую форму.

§ 5.41. «РАЗВЯЗЫВАНИЕ» МАГНИТНОСВЯЗАННЫХ ЦЕПЕЙ

Иногда в литературе можно встретить расчетный прием, который называют *развязыванием магнитносвязанных цепей* (катушек). Суть его в том, что исходную схему с магнитносвязанными индуктивностями путем введения дополнительных индуктивностей и изменения имевшихся преобразуют так, что магнитная связь между всеми индуктивностями в преобразованной схеме отсутствует.

Так как преобразования осуществляют на основе составленных по законам Кирхгофа уравнений для исходной схемы, то вновь полученная и исходная схемы в *расчетном смысле* полностью эквивалентны.

Составим, например, схему, эквивалентную схеме рис. 5.33. С этой целью в уравнении (в) (на стр. 147) заменим I_3 на $(I_1 - I_2)$ и в уравнении (г) I_1 на $(I_2 + I_3)$. Замену одних токов другими производим так, чтобы в каждое из получающихся после замены уравнений входили только те токи, которые текут в ветвях рассматриваемого контура. В данном случае получим:

$$I_1 \left[R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega (L_1 + M) \right] + I_2 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M \right) = \dot{E}_1; \quad (в)$$

$$-I_2 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M \right) + I_3 (R_2 + j\omega L_3 + j\omega M) = -\dot{E}_3. \quad (г)$$

Уравнениям (в) и (г) соответствует схема рис. 5.42, в. Сопоставляя схемы рис. 5.33 и рис. 5.42, в, замечаем, что L_1 заменена на $(L_1 + M)$, L_3 — на $(L_3 + M)$, а во вторую ветвь введена отрицательная индуктивность $L_2 = -M$ (физически осуществить отрицательную индуктивность в цепи с линейными элементами невозможно).

§ 5.42. ТЕОРЕМА О БАЛАНСЕ АКТИВНЫХ И РЕАКТИВНЫХ МОЩНОСТЕЙ

В любой линейной электрической цепи сумма активных мощностей источников э. д. с. равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей источников э. д. с. — сумме реактивных мощностей приемников энергии.

При этом под реактивной мощностью приемников энергии понимают сумму произведений квадратов токов ветвей, умноженных на реактивные сопротивления ветвей, подсчитанных без учета явления взаимоиנדукции*, плюс алгебраическая сумма мощностей, переносимых магнитными потоками из одних ветвей в другие вследствие явления взаимоиנדукции.

Пусть схема содержит f узлов, b ветвей и все ветви или часть их связаны друг с другом магнитно. По первому закону Кирхгофа, сумма токов в любом узле равна нулю. Например, для k -узла, в котором сходится n ветвей,

$$\sum_{p=1}^n i_{kp} = 0,$$

* Имеется в виду, что без учета взаимоиנדукции подсчитываются только реактивные сопротивления ветвей, а токи — с учетом этого явления.

или

$$\sum_{p=1}^n I_{kp}^* = 0.$$

Умножим каждое слагаемое этой суммы на потенциал k -узла $\dot{\Phi}_k$:

$$\dot{\Phi}_k \sum_{p=1}^n I_{kp}^* = 0.$$

Просуммируем аналогичные выражения для всех f узлов схемы:

$$\sum_{k=1}^f \dot{\Phi}_k \sum_{p=1}^n I_{kp}^* = 0.$$

В двойную сумму любой ток схемы, например ток I_{mq} , входит дважды и притом с разными знаками. Действительно, при $k = m$ и $p = q$ соответствующее слагаемое двойной суммы равно $\dot{\Phi}_m I_{mq}^*$, а при $k = q$ и $p = m$ слагаемое равно $\dot{\Phi}_q I_{qm}^*$. Так как

$$I_{qm}^* = -I_{mq}^*,$$

то эти слагаемые можно объединить и получить $I_{mq}^* (\dot{\Phi}_m - \dot{\Phi}_q)$.

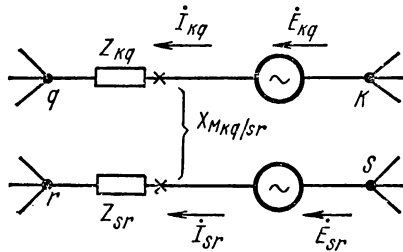


Рис. 5.43

Пусть какая-то ветвь схемы, например ветвь kq , магнитно связана с ветвью sr так, что сопротивление взаимной индукции между ними $X_{Mkq/sr}$ (рис. 5.43).

В соответствии с рис. 5.43 для ветви kq

$$\dot{\Phi}_q - \dot{\Phi}_k = \dot{E}_{kq} - \dot{I}_{kq} Z_{kq} - \dot{I}_{sr} j X_{Mkq/sr};$$

для ветви sr

$$\dot{\Phi}_r - \dot{\Phi}_s = \dot{E}_{sr} - \dot{I}_{sr} Z_{sr} - \dot{I}_{kq} j X_{Mkq/sr}.$$

Если принять, что

$$\dot{I}_{kq} = I_{kq} e^{i\varphi_{kq}}, \quad \dot{I}_{sr} = I_{sr} e^{i\varphi_{sr}},$$

и учесть, что

$$I_{kq}^* = I_{kq} e^{-i\varphi_{kq}} \quad \text{и} \quad I_{sr}^* = I_{sr} e^{-i\varphi_{sr}},$$

то сумма двух слагаемых

$$\begin{aligned} I_{kq}^* I_{sr} j X_{Mkq/sr} + I_{kq} I_{sr}^* j X_{Mkq/sr} &= I_{kq} I_{sr} j X_{Mkq/sr} [e^{i(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})} + e^{-i(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})}] = \\ &= j 2 X_{Mkq/sr} I_{kq} I_{sr} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}). \end{aligned}$$

Таким образом, попарное рассмотрение слагаемых двойной суммы позволяет переписать ее в таком виде:

$$\sum \dot{E}_{kp} \dot{I}_{kp}^* = \sum I_{kp}^2 Z_{kp} + j \cdot 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}). \quad (5.60)$$

Слагаемые типа $\dot{E}_{kp} \dot{I}_{kp}^*$ представляют собой произведение э. д. с., находящейся в ветви kp (k и p — текущие индексы узлов схемы), на сопряженный комплекс тока этой же ветви; I_{kp}^2 — квадрат модуля тока ветви kp ;

$$Z_{kp} = R_{kp} + jX_{kp}.$$

В сумму $j \cdot 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})$ по одному разу входят попарные произведения токов магнитно связанных друг с другом ветвей, умноженные на соответствующие сопротивления взаимной индукции и на косинусы углов между токами этих ветвей.

Например, если в некоторой схеме магнитно связаны три ветви (ветви 12, 13 и 23), то сумму

$$j \cdot 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})$$

записывают так:

$$j \cdot 2 \left\{ I_{12} I_{13} X_{M_{12/13}} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{13}) + I_{12} I_{23} X_{M_{12/23}} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{23}) + \right. \\ \left. + I_{23} I_{13} X_{M_{23/13}} \cos(\varphi_{23} - \varphi_{13}) \right\}.$$

Левая и правая части формулы (5.60) представляют собой комплексы. Равенство действительных частей комплексов дает формулу

$$\operatorname{Re} \sum \dot{E}_{kp} \dot{I}_{kp}^* = \sum I_{kp}^2 R_{kp}, \quad (5.61)$$

а равенство мнимых — формулу

$$\operatorname{Im} \sum \dot{E}_{kp} \dot{I}_{kp}^* = \sum I_{kp}^2 X_{kp} + 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{kq/sr}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}) \quad (5.62)$$

В этой формуле $X_{M_{kq/sr}}$ принято положительным при согласном направлении потоков взаимной индукции и самондукции ветвей kq и sr и отрицательным при встречном их направлении. Формулы (5.61) и (5.62) являются математической записью сформулированной теоремы.

Пример 64. По данным примера 62 в числах убедиться в справедливости теоремы о балансе мощности применительно к схеме рис. 5.40, а.

Решение. Активная мощность, доставляемая источником э. д. с.,

$$\operatorname{Re} \dot{E} \dot{I}^* = \operatorname{Re} 100 \cdot 17,7 e^{j63^\circ} = 1770 \cos 63^\circ = 800 \text{ вт.}$$

Активная мощность, потребляемая приемниками,

$$I_H^2 R_H = 14,12^2 \cdot 4 = 800 \text{ вт.}$$

Следовательно, равенство активных мощностей действительно выполнено. Реактивная мощность источника э. д. с.

$$\operatorname{Im} \dot{E} \dot{I}^* = 1770 \sin 63^\circ = 1582 \text{ вар.}$$

Реактивная мощность приемников энергии с учетом согласного включения катушек

$$I_1^2 \omega L_1 + I_2^2 \omega L_2 + 2 I_1 I_2 \omega M \cos(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}) = 17,7^2 \cdot 2 + 14,6^2 \cdot 3 + 2 \cdot 17,7 \cdot 14,6 \cos(63^\circ - 114^\circ) = 1582 \text{ вар.}$$

Таким образом, баланс реактивных мощностей также удовлетворяется.

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

§ 6.1. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК И ЕГО ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Четырехполусником называют электрическую схему, имеющую два входных и два выходных зажима. Трансформатор, линию передачи энергий, мостовую схему и т. п. можно рассматривать как четырехполусник.

Принято изображать четырехполусник в виде прямоугольника с выходящими из него концами (полюсами) mn и pq (рис. 6.1). Если четырехполусник содержит источники электрической энергии, то в прямоугольнике ставят букву A («активный»); если A отсутствует, это значит, что четырехполусник пассивный. (В дальнейшем, за исключением § 6.13 и 6.14, рассматривается теория пассивного четырехполусника.)

Входной ток обозначают I_1 , входное напряжение — \dot{U}_1 ; ток и напряжение на выходе — I_2 и \dot{U}_2 .

Четырехполусник является передаточным звеном между источником питания и нагрузкой. К входным зажимам mn , как правило, присоединяется источник питания; к выходным зажимам pq — нагрузка.

Предполагается, что нагрузка четырехполусника и напряжение на входе при работе четырехполусника в качестве связующего звена могут изменяться, но схема внутренних соединений четырехполусника и значения сопротивлений в ней остаются неизменными.

Для любого пассивного линейного четырехполусника напряжение и ток на входе \dot{U}_1 и I_1 связаны с напряжением и током на выходе \dot{U}_2 и I_2 двумя основными уравнениями:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad (6.1)$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \quad (6.2)$$

В этих уравнениях комплексные коэффициенты A, B, C, D зависят от схемы внутренних соединений четырехполусника, от значений сопротивлений схемы и от частоты. Для каждого четырехполусника их можно определить расчетным или опытным путем. Коэффициенты связаны соотношением

$$AD - BC = 1. \quad (6.3)$$

Выведем уравнения (6.1) и (6.2). С этой целью к зажимам mn подключим источник э. д. с. $\dot{E}_1 = \dot{U}_{mn} = \dot{U}_1$, а к зажимам pq — нагрузку Z_2 (рис. 6.2, а).

Напряжение на нагрузке $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \dot{U}_{pq}$. Согласно теореме компенсации (см. § 1.17) заменим нагрузку Z_2 на э. д. с. \dot{E}_2 , направленную встречно току \dot{I}_2 и численно равную \dot{U}_2 (рис. 6.2, б). Запишем вы-

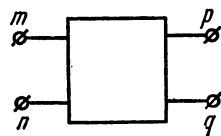


Рис. 6.1

ражения для токов I_1 и I_2 через \dot{E}_1 и \dot{E}_2 и входные и взаимные проводимости ветвей (см. § 1.14).

Если токи I_1 и I_2 рассматривать как контурные токи, то э. д. с. контуров, совпадающие с направлением контурных токов, войдут в уравнения, подобные уравнению (1.7), со знаком плюс, а э. д. с., не совпадающие с направлением соответствующих контурных токов, войдут в уравнения со знаком минус.

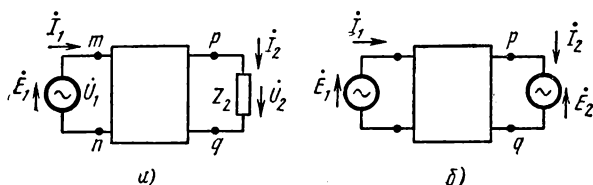


Рис. 6.2

Э. д. с. \dot{E}_1 направлена согласно с I_1 , поэтому она войдет в уравнения (6.4) и (6.5) со знаком плюс; \dot{E}_2 направлена встречно I_2 , поэтому она войдет в уравнения (6.4) и (6.5) со знаком минус:

$$I_1 = \dot{E}_1 y_{11} - \dot{E}_2 y_{12}; \quad (6.4)$$

$$I_2 = \dot{E}_1 y_{21} - \dot{E}_2 y_{22}. \quad (6.5)$$

Из (6.5) найдем ($y_{12} = y_{21}$)

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{22}}{y_{12}} + I_2 \frac{1}{y_{12}}. \quad (6.6)$$

Подставив (6.6) в (6.4), получим

$$I_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}{y_{12}} + I_2 \frac{y_{11}}{y_{12}}. \quad (6.7)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{y_{22}}{y_{12}}; & B &= \frac{1}{y_{12}}; \\ C &= \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}{y_{12}}; & D &= \frac{y_{11}}{y_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Заменив в (6.6) и (6.7) \dot{E}_1 на \dot{U}_1 и \dot{E}_2 на \dot{U}_2 и воспользовавшись обозначениями (6.8), получим основные уравнения четырехполюсника (6.1) и (6.2):

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Проверим справедливость уравнения (6.3):

$$AD - BC = \frac{y_{11}y_{22}}{y_{12}^2} - \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}{y_{12}^2} = 1.$$

Таким образом, уравнение (6.3) действительно выполняется. Далее обсудим, какая связь будет существовать между \dot{U}_1 и I_1 и I_2 и \dot{U}_2 , если источник э. д. с. \dot{E}_1 присоединить к зажимам pq , а нагрузку — к зажимам mn (рис. 6.3).

Как и в предыдущем выводе, заменим Z_2 на э. д. с. E_2 , направленную встречно току I_2 , и запишем выражения для токов I_1 и I_2 :

$$I_2 = -\dot{E}_2 y_{11} + \dot{E}_1 y_{12}; \quad (6.9)$$

$$I_1 = -\dot{E}_2 y_{12} + \dot{E}_1 y_{22}. \quad (6.10)$$

Из (6.9) найдем

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11}}{y_{12}} + I_2 \frac{1}{y_{12}}. \quad (6.11)$$

Подставим (6.11) в (6.10):

$$I_1 = \dot{E}_2 \frac{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}{y_{12}} + I_2 \frac{y_{22}}{y_{12}}. \quad (6.12)$$

Заменяя \dot{E}_1 на \dot{U}_1 и \dot{E}_2 на \dot{U}_2 и воспользовавшись (6.8), перепишем (6.11) и (6.12) следующим образом:

$$\dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad (6.13)$$

$$I_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2. \quad (6.14)$$

Таким образом, уравнения (6.1) и (6.2) характеризуют работу четырехполюсника при питании со стороны зажимов mn и присоединении нагрузки к зажимам pq , а уравнения (6.13) и (6.14) — при питании его со стороны зажимов pq и присоединении нагрузки к зажимам mn .

Четырехполюсник называют *симметричным*, если при перемене местами источника питания и нагрузки токи в источнике питания и в нагрузке не изменяются. В симметричном четырехполюснике $A = D$.

Систему уравнений (6.1) и (6.2), записанную как

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2; \quad (6.1')$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2, \quad (6.2')$$

где $A_{11} = A$, $A_{12} = B$, $A_{21} = C$ и $A_{22} = D$, называют *A-формой* записи уравнений четырехполюсника. Для *A-формы* положительные направления токов I_1 и I_2 соответствуют изображенным на рис. 6.2, а. Если из четырех величин (\dot{U}_1 , \dot{U}_2 , I_1 , I_2) любые две считать известными, то остальные две можно определить через них. В соответствии с этим, кроме *A-формы*, могут быть записаны еще 5 форм уравнений четырехполюсника — формы *Y*, *Z*, *H*, *G*, *B* (вместо больших букв часто пишут малые — *y*, *z*, *h*, *g*, *b*).

Для *Y*-, *Z*-, *H*- и *G*-форм записи положительное направление тока I_1 такое же, как на рис. 6.2, а, а направление тока I_2 противоположно изображенному на этом рисунке. Для *B*-формы направления I_1 и I_2 противоположны изображенным на рис. 6.2, а.

Во всех формах записи уравнений четырехполюсника $\dot{U}_1 = \dot{U}_{mn} = \dot{E}_1$ и $\dot{U}_2 = \dot{U}_{pq} = \dot{E}_2$.

Y-форма: $I_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2$; $I_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2$. Здесь знаки Y_{12} и Y_{21} противоположны соответственно знакам y_{12} и y_{21} в уравнениях (6.4) и (6.5), в связи с тем что для *Y*-формы направление тока I_2 проти-

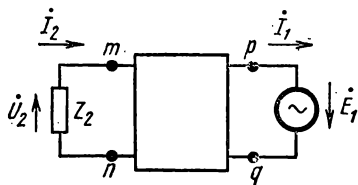


Рис. 6.3

воположно показанному на рис. 6.2.

$$Z\text{-форма: } \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.$$

$$H\text{-форма: } \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.$$

$$G\text{-форма: } \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2; \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2.$$

$$B\text{-форма: } \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1; \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1.$$

Следует обратить внимание на попарную инверсию Z - и Y -форм, A - и B -форм и H - и G -форм.

В теории круговых диаграмм (§ 6.5—6.11) применяют A -форму. При нахождении связи между входными и выходными величинами различным образом соединенных четырехполюсников (при определении коэффициентов эквивалентного четырехполюсника) используют формы Z , Y , H , G , A .

При последовательном соединении четырехполюсников a и b (рис. 6.4, a) применяют Z -форму, при параллельном соединении (рис. 6.4, b) — Y -форму, при последовательно-параллельном (рис. 6.4, $в$) — H -форму, при параллельно-последовательном (рис. 6.4, $г$) — G -форму, при каскадном (рис. 6.4, $д$) — A -форму.

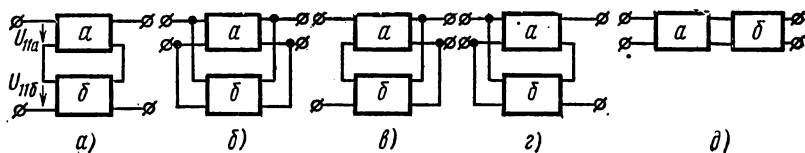


Рис. 6.4

В теории синтеза цепей (§ 11.5—11.8) применяют Y - и Z -формы (в § 11.6 см. схемы для опытного определения коэффициентов Z и Y).

Параметры схем замещения транзисторов для малых переменных составляющих (см. § 9.35) дают обычно в H - или Z -формах, так как эти параметры их практически удобнее определить, чем остальные.

В дальнейшем в качестве основной формы записи уравнений четырехполюсника используется A -форма, т. е. уравнения (6.1) и (6.2).

Для того чтобы коэффициенты одной формы найти через коэффициенты другой формы, необходимо выразить какие-либо две одинаковые величины в этих двух формах и сопоставить их, учтя направления токов I_1 и I_2 для этих форм. Так, из A -формы следует

$$\dot{U}_1 = I_1 \frac{A}{C} - I_2 \frac{1}{C} \quad (a)$$

и

$$\dot{U}_2 = I_1 \frac{1}{C} - I_2 \frac{D}{C}; \quad (б)$$

из Z -формы

$$\dot{U}_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} \quad (в)$$

и

$$\dot{U}_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}. \quad (г)$$

Сопоставляя правые части (а) и (в) и учитывая, что ток I_2 в выражении (в) равен току $(-I_2)$ в выражении (а), имеем

$$Z_{11} = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad Z_{12} = \frac{1}{C}. \quad \text{Из (б) и (г): } Z_{21} = \frac{1}{C} \quad \text{и} \quad Z_{22} = \frac{D}{C}.$$

При переходе от коэффициентов A -формы к коэффициентам других форм получаем:

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{12} = -\frac{1}{B}, \quad Y_{21} = -\frac{1}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B};$$

$$H_{11} = \frac{B}{D}, \quad H_{12} = \frac{1}{D}, \quad H_{21} = -\frac{1}{D}, \quad H_{22} = \frac{C}{D};$$

$$G_{11} = \frac{C}{A}, \quad G_{12} = -\frac{1}{A}, \quad G_{21} = \frac{1}{A}, \quad G_{22} = \frac{B}{A};$$

$$B_{11} = D, \quad B_{12} = B, \quad B_{21} = C, \quad B_{22} = A.$$

Обратим внимание на то, что $Y_{12} = Y_{21}$, $Z_{12} = Z_{21}$, но $H_{12} = -H_{21}$ и $G_{12} = -G_{21}$. В общем случае B_{12} не равно B_{21} даже по модулю.

Форму записи для составного четырехполюсника следует выбирать, исходя из простоты и удобства. Так, при последовательном соединении четырехполюсников a и b по схеме рис. 6.4, a , учитывая, что ток I_1 , равно как и ток I_2 , у них одинаковый, $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b}$ и $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b}$, имеем для составного четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = I_1(Z_{11a} + Z_{11b}) + I_2(Z_{12a} + Z_{12b}); \quad \dot{U}_2 = I_1(Z_{21a} + Z_{21b}) + I_2(Z_{22a} + Z_{22b}); \quad (д)$$

для эквивалентного четырехполюсника

$$\dot{U}_1 = I_1 Z_{11\beta} + I_2 Z_{12\beta}; \quad \dot{U}_2 = I_1 Z_{21\beta} + I_2 Z_{22\beta}. \quad (е)$$

Сопоставление (д) и (е) дает:

$$Z_{11\beta} = Z_{11a} + Z_{11b}; \quad Z_{12\beta} = Z_{21\beta} = Z_{12a} + Z_{12b}; \quad Z_{22\beta} = Z_{22a} + Z_{22b}.$$

При параллельном, последовательном, параллельно-последовательном и последовательно-параллельном соединении необходимо соблюдать *условие регулярности соединения четырехполюсников* — через оба первичных зажима каждого четырехполюсника должны течь равные по величине и противоположно направленные токи, то же и по отношению к вторичным зажимам каждого четырехполюсника.

§ 6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Комплексные коэффициенты A , B , C , D , входящие в формулы (6.1) и (6.2), можно определить по формулам (6.8), если схема внутренних соединений четырехполюсника и ее параметры известны, либо используя входные сопротивления четырехполюсника, полученные опытным или расчетным путем.

Комплексы входных сопротивлений находят опытным путем с помощью ваттметра, амперметра и вольтметра по схеме, подобной схеме рис. 5.24, a , с тем отличием, что вместо двухполюсника к источнику питания зажимами tn или pq (в зависимости от определяемого входного сопротивления) подключается испытуемый четырехполюсник.

Определим комплекс входного сопротивления четырехполюсника в трех различных режимах его работы:

1) со стороны зажимов mn при разомкнутой ветви pq (х. х. ветви pq , индекс ноль):

$$Z_{10} = z_{10} e^{j\varphi_{10}},$$

2) со стороны зажимов mn при коротком замыкании ветви pq (к. з., индекс k):

$$Z_{1k} = z_{1k} e^{j\varphi_{1k}},$$

3) со стороны зажимов pq при коротком замыкании зажимов mn :

$$Z_{2k} = z_{2k} e^{j\varphi_{2k}}.$$

В результате обработки данных трех опытов получаем комплексные сопротивления Z_{10} , Z_{1k} , Z_{2k} . Выразим их через коэффициенты A , B , C , D : из уравнений (6.1) и (6.2) найдем Z_{10} и Z_{1k} через A , B , C , D , а из (6.13) и (6.14) найдем Z_{2k} через B и A .

В первом опыте при определении Z_{10} ветвь pq была разомкнута, поэтому $I_2 = 0$. Следовательно, из (6.1) и (6.2) получаем

$$\dot{U}_{10} = A\dot{U}_{20}; \quad I_{10} = C\dot{U}_{20};$$

отсюда входное сопротивление

$$Z_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{I_{10}} = \frac{A}{C}.$$

Во втором опыте, когда определялось Z_{1k} , ветвь pq была короткозамкнута, поэтому $U_2 = 0$. Из (6.1) и (6.2) находим:

$$\dot{U}_{1k} = B\dot{I}_{2k}; \quad I_{1k} = D\dot{I}_{2k};$$

$$Z_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{I_{1k}} = \frac{B}{D}.$$

В третьем опыте при питании со стороны зажимов pq и коротком замыкании на зажимах mn из формул (6.13) и (6.14) при $U_2 = 0$ следует, что

$$Z_{2k} = \frac{B\dot{I}_{2k}}{A\dot{I}_{2k}} = \frac{B}{A}.$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных коэффициентов A , B , C , D располагаем четырьмя уравнениями:

$$AD - BC = 1;$$

$$Z_{10} = \frac{A}{C}; \tag{6.15}$$

$$Z_{1k} = \frac{B}{D}; \tag{6.16}$$

$$Z_{2k} = \frac{B}{A}. \tag{6.17}$$

Составим разность:

$$1 - \frac{Z_{1k}}{Z_{10}} = 1 - \frac{BC}{AD} = \frac{1}{AD}$$

или

$$\frac{Z_{10} - Z_{1k}}{Z_{10}} = \frac{1}{AD}. \tag{6.18}$$

Разделим (6.17) на (6.16):

$$\frac{Z_{2k}}{Z_{1k}} = \frac{D}{A}. \quad (6.19)$$

Умножим (6.18) на (6.19):

$$\frac{(Z_{10} - Z_{1k}) Z_{2k}}{Z_{10} Z_{1k}} = \frac{1}{A^2}.$$

Отсюда

$$A = \sqrt{\frac{Z_{10} Z_{1k}}{Z_{2k} (Z_{10} - Z_{1k})}}. \quad (6.20)$$

Формула (6.20) позволяет через Z_{10} , Z_{1k} и Z_{2k} определить A ; после этого коэффициент C находят из (6.15), B — из (6.17) и D — из (6.16).

Коэффициенты A и D безразмерны, коэффициент B имеет размерность *ом*, коэффициент C — *сим*.

Пример 65. Опытным путем было найдено, что $Z_{10} = 7,815 e^{-j50^\circ 12'}$ *ом*, $Z_{1k} = 12,5 e^{j66^\circ 23'}$ *ом* и $Z_{2k} = 3,33 e^{j27^\circ 33'}$ *ом*.

Определить коэффициенты A , B , C , D четырехполюсника.

Решение. Находим

$$Z_{10} - Z_{1k} = 5 - 6j - 5 - 12j = -18j = 18e^{-j90^\circ}.$$

По формуле (6.20) подсчитаем A :

$$A = \sqrt{\frac{7,815e^{-j50^\circ 12'} \cdot 12,5e^{j66^\circ 23'}}{3,33e^{j27^\circ 33'} \cdot 18e^{-j90^\circ}}} \approx 1,28e^{j39^\circ 40'};$$

затем:

$$C = \frac{A}{Z_{10}} = \frac{1,28e^{j39^\circ 40'}}{7,815e^{-j50^\circ 12'}} \approx 0,166e^{j90^\circ} \text{ сим};$$

$$B = AZ_{2k} = 1,28e^{j39^\circ 40'} \cdot 3,33e^{j27^\circ 33'} \approx 4,26e^{j67^\circ} \text{ ом};$$

$$D = \frac{B}{Z_{1k}} = \frac{4,26e^{j67^\circ}}{12,5e^{j66^\circ 23'}} \approx 0,34.$$

Пример 66. К зажимам pq (см. рис. 6.1) четырехполюсника примера 65 подсоединена нагрузка $Z_2 = (6 + j6)$ *ом*; к зажимам mn — источник э. д. с. Найти \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , если $\dot{I}_2 = 1a$.

Решение. По формуле (6.1),

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = A\dot{I}_2 Z_2 + B\dot{I}_2 = \dot{I}_2 (AZ_2 + B);$$

$$\dot{U}_1 = 1 \cdot (1,28e^{j39^\circ 40'} \cdot 6\sqrt{2} e^{j45^\circ} + 4,26e^{j67^\circ}) = 14,85e^{j79^\circ 45'} \text{ в}.$$

По формуле (6.2),

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_2 (CZ_2 + D) = 1 \cdot (0,166e^{j90^\circ} \cdot 6\sqrt{2} e^{j45^\circ} + 0,34) = 1,165e^{j123^\circ} \text{ а}.$$

Пример 67. К зажимам mn четырехполюсника примера 65 подсоединена нагрузка $Z_2 = (6 + j6)$ *ом*; к зажимам pq — источник э. д. с.

При каком значении напряжения источника э. д. с. ток I_2 в нагрузке будет 1 а?

Р е ш е н и е. По формуле (6.13)

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 (DZ_2 + B) = 0,34 (6 + j6) + 4,26e^{j67^\circ} = 6,98e^{j58^\circ 20'} \text{ в.}$$

§ 6.3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПОСТОЯННАЯ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Характеристическим сопротивлением Z_c называют отношение входного напряжения к входному току. При питании со стороны зажимов mn рис. 6.1

$$Z_{c1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2}.$$

При питании со стороны зажимов pq рис. 6.1 (с учетом того, что при обратном питании коэффициенты A и D меняются местами)

$$Z_{c2} = \frac{D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2}.$$

Так как $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_n$, то Z_{c1} и Z_{c2} зависят от сопротивления нагрузки Z_n (Z_{c1} и Z_{c2} использованы в § 13.5).

Если симметричный четырехполюсник ($A = D$) нагружен согласованно, т. е. $Z_n = Z_{c1}$, то $Z_{c1} = \sqrt{\frac{B}{C}}$. При этом

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 (A + \sqrt{BC}) \text{ и } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 (A + \sqrt{BC}).$$

Комплексное число $A + \sqrt{BC}$ полагают равным e^g , где g — *постоянная передачи*,

$$g = \ln(A + \sqrt{BC}) = a + jb.$$

Из уравнений

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{ae^{jb}} \text{ и } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{ae^{jb}}$$

следует, что модуль \dot{U}_1 в e^a раз больше модуля \dot{U}_2 ; модуль \dot{I}_1 в e^a раз больше модуля \dot{I}_2 . По фазе \dot{U}_1 опережает \dot{U}_2 на угол b ; ток \dot{I}_1 опережает \dot{I}_2 также на угол b .

§ 6.4. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ПАССИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Функции пассивного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой могут выполнять простейшие электрические схемы, схемы замещения: трехлучевая звезда (Т-схема) рис. 6.5, *a* или эквивалентный ей треугольник (П-схема) рис. 6.5, *б* *.

Три сопротивления Т- или П-схем должны быть рассчитаны с учетом того, что схема замещения должна обладать такими же коэффи-

* Любой линейный четырехполюсник при фиксированной частоте может быть заменен эквивалентной Т- или П-схемой.

центами A, B, C, D , какими обладает заменяемый ею четырехполюсник.

Задача эта однозначна, так как схема замещения содержит три параметра и четырехполюсник характеризуется тоже тремя параметрами (одна связь между A, B, C, D задана уравнением $AD - BC = 1$).

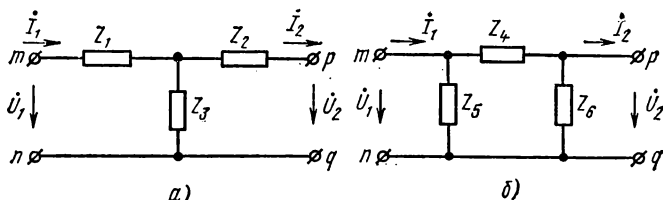


Рис. 6.5

Выразим напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 в начале Т-схемы (см. рис. 6.5, а) через напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 в конце схемы:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2}{Z_3} = \dot{U}_2 \frac{1}{Z_3} + \dot{I}_2 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right); \quad (6.21)$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3} \right) + \dot{I}_2 \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \right). \quad (6.22)$$

Сопоставим (6.22) с (6.1) и (6.21) с (6.2). При сопоставлении найдем:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; \quad B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}; \quad C = \frac{1}{Z_3}; \quad D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}.$$

Следовательно,

$$Z_3 = \frac{1}{C}; \quad (6.23)$$

$$Z_1 = \frac{A-1}{C}; \quad (6.24)$$

$$Z_2 = \frac{D-1}{C}. \quad (6.25)$$

Формулы (6.23)–(6.25) дают возможность найти сопротивления Z_3, Z_1 и Z_2 схемы рис. 6.5, а по коэффициентам четырехполюсника A, C, D . Аналогичные выкладки для П-схемы рис. 6.5, б дают:

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_6}; \quad B = Z_4; \quad C = \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{Z_5 Z_6}; \quad D = 1 + \frac{Z_4}{Z_5}$$

и

$$Z_4 = B; \quad (6.26)$$

$$Z_5 = \frac{B}{D-1}; \quad (6.27)$$

$$Z_6 = \frac{B}{A-1}. \quad (6.28)$$

Если четырехполюсник симметричный, то $A = D$ и в Т-схеме замещения $Z_1 = Z_2$, а в П-схеме $Z_5 = Z_6$.

Пример 68. Найти параметры Т-схемы для четырехполюсника примера 65.

Решение. По формулам (6.23)—(6.25),

$$Z_3 = \frac{1}{C} \approx 6e^{-j90^\circ} \text{ ом}; \quad Z_2 = \frac{D-1}{C} = \frac{0,34-1}{0,166e^{j90^\circ}} \approx 4e^{j90^\circ} \text{ ом}, \quad Z_1 = 5 \text{ ом}.$$

Исследование работы электрических цепей часто проводят графическими методами путем построения круговых и линейных диаграмм. Перед тем как приступить к изучению круговых диаграмм, рассмотрим вопрос о построении дуги окружности по хорде и вписанному углу.

§ 6.5. ПОСТРОЕНИЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ ПО ХОРДЕ И ВПИСАННОМУ УГЛУ

Из геометрии известно, что вписанным углом называется угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Так, $\angle ABC = \psi$ (рис. 6.6) измеряется $\frac{1}{2} \overset{\frown}{ADC}$, а $\angle ADC$ измеряется $\frac{1}{2} \overset{\frown}{ABC}$. Сумма двух углов $\angle ABC + \angle ADC = \pi$.

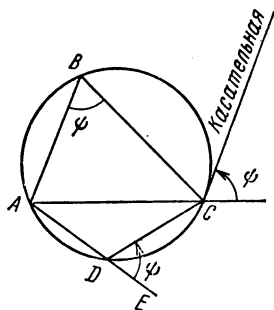


Рис. 6.6

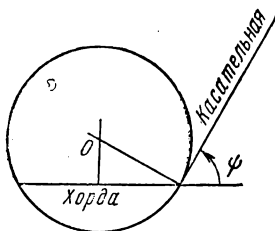


Рис. 6.7

Угол EDC является дополнительным до π к $\angle ADC$ и поэтому $\angle EDC = \psi$.

Какое бы положение ни занимала точка D в интервале от A до C , угол между продолжением хорды AD (т. е. линией DE) и хордой DC остается неизменным и равным ψ .

Угол между продолжением хорды AC и касательной к окружности в точке C также равняется углу ψ .

Центр окружности O находится на пересечении перпендикуляра к середине хорды и перпендикуляра к касательной (рис. 6.7).

Из изложенного следует, что если заданы хорда и вписанный угол ψ , то для нахождения центра окружности (см. рис. 6.7) необходимо:

- 1) восстановить перпендикуляр к середине хорды;
- 2) под углом ψ к продолжению хорды провести прямую, которая будет являться касательной к окружности;

3) восстановить перпендикуляр к касательной. Пересечение перпендикуляра к хорде и перпендикуляра к касательной даст центр окружности.

§ 6.6. УРАВНЕНИЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Построения, аналогичные построениям рис. 6.6, могут быть выполнены и на комплексной плоскости. В этом случае все хорды, например CA , DA , CD , будут являться векторами.

На комплексной плоскости рис. 6.8 совместим хорду $\overrightarrow{CA} = \vec{F}$ с осью $+1$. Если угол ψ положителен, то от продолжения хорды он должен быть отложен против часовой стрелки, при $\psi < 0$ угол откладывается по часовой стрелке.

Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{G}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{H}$. Тогда

$$\vec{G} + \vec{H} = \vec{F}. \quad (6.29)$$

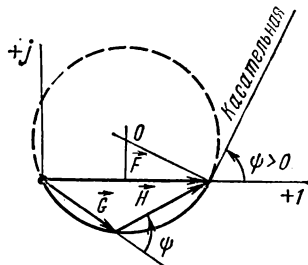


Рис. 6.8

Вектор \vec{H} опережает вектор \vec{G} на угол ψ . Пусть модуль вектора \vec{H} будет в k раз больше модуля вектора \vec{G} . Тогда

$$\vec{H} = k\vec{G}e^{j\psi}. \quad (6.30)$$

Если $k = 0$, то $\vec{H} = 0$ и $\vec{G} = \vec{F}$. При $k = \infty$ $\vec{H} = \vec{F}$ и $\vec{G} = 0$. Подставив (6.30) в (6.29), получим

$$\vec{G}(1 + ke^{j\psi}) = \vec{F},$$

или

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{1 + ke^{j\psi}}. \quad (6.31)$$

Уравнение (6.31) называют *уравнением дуги окружности в векторной форме записи*.

При изменении коэффициента k от 0 до ∞ меняются оба вектора \vec{G} и \vec{H} , но так, что угол ψ между ними остается неизменным, а сумма векторов равна вектору \vec{F} . Конец вектора \vec{G} скользит по дуге окружности, хордой которой является вектор \vec{F} . Поэтому можно сказать, что дуга окружности является геометрическим местом концов вектора \vec{G} .

Важно то, что рабочей частью окружности, или рабочей дугой, является та часть окружности, которая по отношению к хорде лежит по обратную сторону от касательной (рабочая дуга на рис. 6.8 вычерчена сплошной линией, нерабочая — пунктиром).

Рабочая дуга меньше половины окружности при $|\psi| < 90^\circ$ и больше половины окружности при $|\psi| > 90^\circ$.

§ 6.7. КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Из § 5.4 известно, что синусоидально изменяющиеся функции времени (токи, напряжения) могут быть изображены векторами на комплексной плоскости. Если процесс в электрической цепи описывается уравнением, по форме тождественным уравнению (6.31), то геометрическим местом концов вектора тока или напряжения, выполняющего в уравнении электрической цепи ту же роль, что и вектор \vec{G} в уравнении (6.31), является окружность.

Под *круговой диаграммой* тока или напряжения понимают дугу окружности, являющуюся геометрическим местом концов вектора тока или соответственно напряжения при изменении по модулю какого-либо сопротивления электрической цепи и сохранении неизменными остальных сопротивлений, частоты и э. д. с. источников энергии.

С помощью круговых диаграмм производят графический анализ работы электрических цепей.

§ 6.8. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА ТОКА ДЛЯ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Пусть к источнику э. д. с. подключены последовательно $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ и $Z = z e^{j\varphi}$ (рис. 6.9). Сопротивление Z_1 неизменно, а Z может меняться лишь по модулю, так что угол φ остается постоянным. Ток в цепи

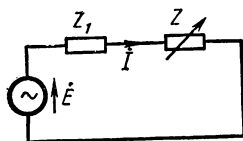


Рис. 6.9

$$I = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z} = \frac{\frac{\dot{E}}{Z_1}}{1 + \frac{z}{z_1} e^{j(\varphi - \varphi_1)}}, \quad (6.32')$$

где $\frac{\dot{E}}{Z_1} = I_k$ — ток в цепи при коротком замыкании сопротивления Z .

Обозначим $\varphi - \varphi_1 = \psi$. Тогда

$$I = \frac{I_k}{1 + \frac{z}{z_1} e^{j\psi}}. \quad (6.32)$$

Уравнение (6.32) тождественно (6.31).

Роль вектора \vec{F} играет комплекс I_k ; роль коэффициента k — отношение $\frac{z}{z_1}$; роль \vec{G} — вектор I . При изменении z вектор I будет скользить по дуге окружности, хордой которой является I_k .

На круговой диаграмме рис. 6.10 вектор э. д. с. направлен по оси $+1$. Ток

$$I_k = \frac{\dot{E}}{z_1 e^{j\psi_1}}$$

отстает на угол φ_1 от э. д. с. \dot{E} . Для определенности построим диаграмму при $\psi < 0$. Выберем масштаб токов: пусть отрезок ac в масштабе m_I

выражает собой модуль тока \dot{I}_k . Отрезок da характеризует ток \dot{I} , отрезок cd в соответствии с уравнением (6.32) — произведение $\dot{I} \frac{z}{z_1} e^{j\psi}$. Отложим на направлении \dot{I}_k отрезок ae в произвольном масштабе m_z , выражающий модуль постоянного сопротивления z_1 :

$$z_1 = aem_z.$$

Из точки e под углом $-\psi$ к линии ae проводим прямую ef , которая является (как будет показано далее) линией модуля переменного сопротивления z при отсчете от точки e . На ней в масштабе m_z нанесем деления для измерения z .

Из подобия треугольников adc и aef следует:

$$\frac{ad}{dc} = \frac{ae}{ef}; \quad ef = ae \frac{dc}{ad} = \frac{z_1}{m_z} \cdot \frac{I}{I} \cdot \frac{z}{z_1} = \frac{z}{m_z},$$

или

$$z = ef m_z.$$

Следовательно, отрезок ef в масштабе m_z измеряет модуль переменного сопротивления z .

Проекция \dot{I} на направление \dot{E} — отрезок ag — в масштабе $m_p = = Em_I$ измеряет активную мощность:

$$P = agm_p = agEm_I = agE \cdot \frac{I}{ad} = EI \cos \varphi,$$

$$m_I = \frac{I}{ad}; \quad \frac{ag}{ad} = \cos \varphi.$$

Проекция \dot{I} на направление, перпендикулярное \dot{E} , — отрезок ah — в масштабе m_p измеряет реактивную мощность:

$$Q = ah \cdot m_p = ah \cdot E \cdot \frac{I}{ad} = EI \sin \varphi.$$

§ 6.9. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Умножив обе части уравнения (6.32) на $Z_1 = z_1 e^{j\psi_1}$ и учтя, что $I Z_1 = = \dot{U}_{z_1}$, получим

$$\dot{U}_{z_1} = \frac{\dot{E}}{1 + \frac{z_1}{z} e^{j(\varphi - \varphi_1)}}. \quad (6.33)$$

Уравнение (6.33) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора \dot{U}_{z_1} является дуга окружности, хорда которой \dot{E} .

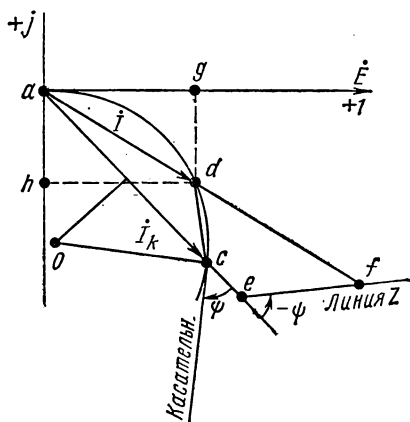


Рис. 6.10

§ 6.10. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА ДЛЯ АКТИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Ток \dot{I}_H в цепи нагрузки $Z_H = z_H e^{j\varphi_H}$ активного двухполюсника рис. 5.30, а

$$\dot{I}_H = \frac{\dot{U}_{abx.x}}{Z_{Bx} + Z_H} = \frac{\dot{U}_{abx.x}}{1 + \frac{z_H}{z_{Bx}} e^{j(\varphi_H - \varphi_{Bx})}}, \quad (6.34)$$

где $Z_{Bx} = z_{Bx} e^{j\varphi_{Bx}}$ — комплексное входное сопротивление двухполюсника по отношению к зажимам ab выделенной ветви.

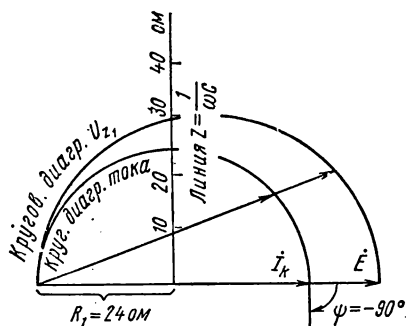


Рис. 6.11

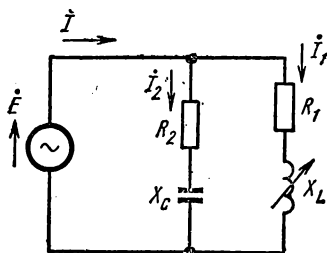


Рис. 6.12

Из уравнения (6.34) следует, что при изменении модуля сопротивления нагрузки z_H ток \dot{I}_H скользит по дуге окружности.

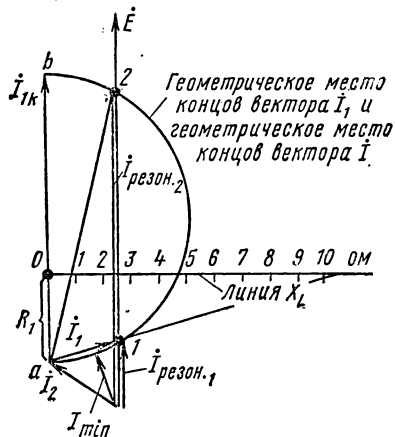


Рис. 6.13

Пример 69. Параметры схемы рис. 6.9 таковы: $\dot{E} = 120$ в; $Z_1 = R_1 = 24$ ом; сопротивление Z чисто емкостное и модуль его изменяется от 0 до ∞ . Построить круговую диаграмму тока и круговую диаграмму напряжения для сопротивления Z_1 .

Решение. Ток $\dot{I}_k = \frac{120}{24} = 5$ а. Выберем масштаб для токов $m_I = 1,39$ а/см и для напряжений $m_U = 26$ в/см.

Найдем угол $\psi = \varphi - \varphi_1 = -90^\circ - 0^\circ = -90^\circ$.

На рис. 6.11 построены круговая диаграмма тока на токе \dot{I}_k , как на диаметре, и круговая диаграмма напряжения на э. д. с. \dot{E} , как на диаметре.

Масштаб для сопротивлений $m_z = 13$ ом/см. Для любого значения сопротивления z по диаграмме находим ток I и напряжение U_{z1} . Так, при $z = 9,5$ ом $I = 4,65$ а, $U_{z1} = 111,5$ в.

Пример 70. Построить геометрическое место концов вектора тока \dot{I} неразветвленной части схемы рис. 6.12 и графически исследовать возможность возникновения резонансных режимов при следующих данных: $\dot{E} = 30$ в; $R_2 = 6$ ом; $X_C = 8$ ом; $R_1 = 3$ ом; X_L может изменяться от 0 до ∞ .

Решение. Ток \dot{I}_2 в схеме остается неизменным:

$$\dot{I}_2 = \frac{30}{6 - j8} = 3e^{j53^\circ 10'} \text{ а.}$$

Он на $53^\circ 10'$ опережает э. д. с. \dot{E} (рис. 6.13). Вектор тока \dot{I}_1 при изменении X_L меняется так, что конец его скользит по дуге окружности, диаметром которой является вектор тока

$$\dot{I}_{1k} = \frac{\dot{E}}{R_1} = 10 \text{ а, } m_I = 2,65 \text{ а/см.}$$

Ток в неразветвленной части схемы $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Геометрическим местом его является также дуга окружности $a12b$. В режимах, соответствующих точкам 1 и 2, ток \dot{I} совпадает по фазе с э. д. с. \dot{E} . Следовательно, в этих режимах в схеме имеет место резонанс токов.

Выберем масштаб сопротивлений $m_z = 2$ ом/см. Графически найдем X_L для точек 1 и 2.

Для точки 2 сопротивление $X_L \approx 0,8$ ом, для точки 1 $X_L \approx 10,6$ ом. При этом ток $I = 11,1$ а и 2,4 а.

§ 6.11. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА ДЛЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Пусть напряжение \dot{U}_1 на входе четырехполюсника рис. 6.2, а неизменно по величине, фазе и частоте, а нагрузка $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ на выходе его изменяется только по модулю, так что характеризующий ее угол φ_2 остается постоянным.

В этом случае для тока \dot{I}_2 , напряжения \dot{U}_2 и тока \dot{I}_1 существуют круговые диаграммы. Покажем, что для тока \dot{I}_2 существует круговая диаграмма. С этой целью всю схему четырехполюсника рис. 6.2, а, за исключением нагрузки Z_2 , заменим активным двухполюсником и по методу эквивалентного генератора найдем ток \dot{I}_2 в ветви pq :

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{pq \text{ х. х}}}{Z_{вх pq} + Z_2}. \quad (6.35')$$

Под $\dot{U}_{pq \text{ х. х}}$ понимают напряжение между точками p и q при размыкании ветви pq , а под $Z_{вх pq} = Z_{2k} = z_{2k} e^{j\varphi_{2k}}$ — входное сопротивление по отношению к зажимам pq при короткозамкнутых зажимах mn . Разделив и числитель и знаменатель правой части (6.35') на $Z_{вх pq} = Z_{2k}$ и учтя, что

$$\frac{\dot{U}_{pq \text{ х. х}}}{Z_{2k}} = \dot{I}_{2k},$$

где \dot{I}_{2k} — ток к. з. ветви pq , получим

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_{2k}}{1 + \frac{z_2}{z_{2k}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}. \quad (6.35)$$

Из уравнения (6.35) следует, что вектор тока \dot{I}_2 скользит по дуге окружности, хордой которой является \dot{I}_{2k} .

Обсудим далее вопрос о круговой диаграмме тока \dot{I}_1 на входе четырехполюсника,

Из предыдущего [см., например, формулу (1.14)] известно, что в линейной цепи любые два тока при изменении сопротивления в любой ветви схемы связаны соотношением

$$I_m = a + bI_n.$$

Следовательно, ток I_1 может быть линейно выражен через I_2 :

$$I_1 = a + bI_2. \quad (6.36)$$

Найдем коэффициенты a и b . Если ветвь pq будет разомкнута, то

$$I_2 = 0 \text{ и } I_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{10}} = I_{10}.$$

Из уравнения (6.36) найдем

$$a = I_{10}. \quad (6.37)$$

Если ветвь pq будет короткозамкнута, то $I_2 = I_{2k}$ и $I_1 = I_{1k}$. Поэтому

$$I_{1k} = I_{10} + bI_{2k}.$$

Отсюда

$$b = \frac{I_{1k} - I_{10}}{I_{2k}}. \quad (6.38)$$

Подставив (6.37), (6.38) в (6.36), получим

$$I_1 = I_{10} + \frac{I_{1k} - I_{10}}{1 + \frac{z_2}{z_{2k}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}. \quad (6.39)$$

Уравнение (6.39) свидетельствует о том, что геометрическим местом концов вектора I_1 также является дуга окружности. Хордой ее является разность $I_{1k} - I_{10}$; вектор I_{10} смещает начало отсчета.

Аналогичным образом производится построение круговой диаграммы для напряжения. Так, если в какой-то схеме изменяется по модулю сопротивление $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ в одной, например второй, ветви, то для напряжения на некотором участке ab этой схемы можно записать выражение, аналогичное (6.39):

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{abx.x} + \frac{\dot{U}_{abk.z} - \dot{U}_{abx.x}}{1 + \frac{z_2}{z_{2k}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2k})}}, \quad (6.40)$$

где $\dot{U}_{abx.x}$ — напряжение на зажимах ab при $z_2 = \infty$; $\dot{U}_{abk.z}$ — напряжение на зажимах ab при $z_2 = 0$.

Величина $Z_{2k} = z_{2k} e^{j\varphi_{2k}}$ — входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам, к которым подсоединяется сопротивление Z_2 .

Формула (6.40) выведена на основе выражения $\dot{U}_{ab} = a_1 + b_1 I_2$ и формулы (6.35).

Пример 71. Построить круговую диаграмму для тока I_1 схемы рис. 6.14, а: $X_C = 5 \text{ ом}$, $R = 5 \text{ ом}$, $E = 100 \text{ в}$. Нагрузкой четырехполюсника является индуктивное сопротивление X_L , которое может изменяться от нуля до бесконечности.

Решение. Найдем ток холостого хода I_{10} (когда цепь нагрузки разомкнута):

$$I_{10} = \frac{\dot{E}}{R - jX_C} = \frac{100}{5 - j5} = 14,15 e^{j45^\circ} \text{ а.}$$

Определим ток короткого замыкания I_{1k} (при коротком замыкании нагрузки):

$$I_{1k} = \frac{\dot{E}}{-jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}} = 12,82 e^{j71^\circ 20'} \text{ а.}$$

Найдем входное сопротивление Z_{2k} со стороны зажимов pg при коротком замыкании зажимов mn :

$$Z_{2k} = z_{2k} e^{j\varphi_{2k}} = -jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 7,8e^{-j71^\circ 20'} \text{ ом.}$$

Следовательно, $\varphi_{2k} = -71^\circ 20'$. Угол $\psi = \varphi_2 - \varphi_{2k} = 90 - (-71^\circ 20') = 161^\circ 20'$. Круговая диаграмма для тока I_1 построена на рис. 6.14, б.

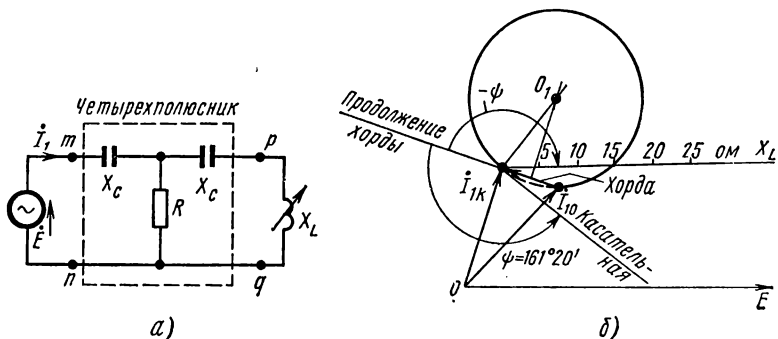


Рис. 6.14

Хордой окружности является разность $I_{1k} - I_{10}$. Угол ψ положителен, поэтому для определения положения касательной он отложен от продолжения хорды против часовой стрелки. Диаграмма носит несколько необычный характер: рабочая часть дуги занимает почти целую окружность.

Для определения положения конца вектора тока I_1 из конца вектора I_{10} через точку на линии X_L , соответствующую заданной величине X_L , проводится прямая до пересечения с рабочей частью дуги окружности. При $X_L = 5 \text{ ом}$ ток I_1 опережает э. д. с. \dot{E} на 90° .

§ 6.12. ЛИНЕЙНЫЕ ДИАГРАММЫ

Под линейными диаграммами понимают диаграммы, в которых геометрическим местом концов вектора тока или напряжения является прямая линия. По существу линейная диаграмма является частным

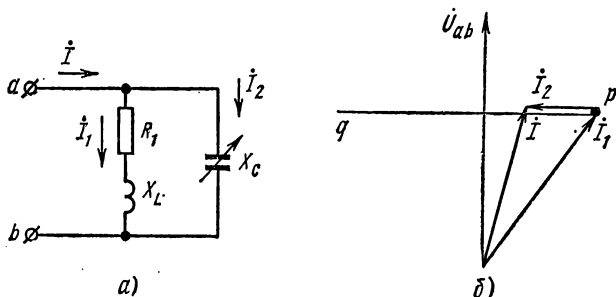


Рис. 6.15

случаем круговой диаграммы, поскольку прямая есть дуга окружности с бесконечно большим радиусом.

Пример 72. Построить геометрическое место концов вектора тока в схеме рис. 6.15, *а* при изменении X_C . Напряжение $U_{ab} = \text{const}$, R_1 и X_L неизменны.

Решение. На рис. 6.15, *б* изображаем вектор \dot{U}_{ab} . Вектор тока \dot{I}_1 отстает от него на угол

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R_1}.$$

Ток \dot{I}_2 опережает \dot{U}_{ab} на 90° . Геометрическим местом концов общего тока $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ будет прямая линия pq . Она и является линейной диаграммой тока \dot{I} .

§ 6.13. УРАВНЕНИЯ АКТИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Положим, что в первой ветви mn активного четырехполюсника рис. 6.16, *а* есть источник э. д. с. \dot{E}_1 , во второй ветви pq — нагрузка Z_H , а в остальных ветвях ($3 - p$), находящихся внутри четырехполюсника, имеются или могут быть э. д. с. \dot{E}_k (индекс

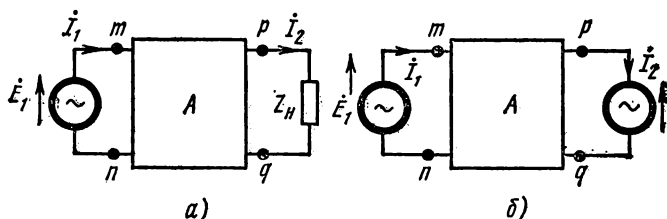


Рис. 6.16

k может принимать значения от 3 до p). Тогда, заменив по теореме компенсации сопротивление Z_H на э. д. с. \dot{E}_2 (рис. 6.16, *б*), запишем выражения для токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 y_{11} - \dot{E}_2 y_{12} + \sum_{k=3}^p \dot{E}_k y_{1k}; \quad (6.41)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 y_{21} - \dot{E}_2 y_{22} + \sum_{k=3}^p \dot{E}_k y_{2k}. \quad (6.42)$$

Осуществим короткое замыкание одновременно на зажимах mn и pq . При этом по первой ветви будет протекать ток $\dot{I}_{1kk} = \sum_{k=3}^p \dot{E}_k y_{1k}$, а по второй $\dot{I}_{2kk} = \sum_{k=3}^p \dot{E}_k y_{2k}$.

В (6.41) вместо $\sum_{k=3}^p \dot{E}_k y_{1k}$ подставим \dot{I}_{1kk} , а в (6.42) \dot{I}_{2kk} вместо $\sum_{k=3}^p \dot{E}_k y_{2k}$.

Кроме того, заменим \dot{E}_1 на \dot{U}_1 и \dot{E}_2 на \dot{U}_2 . Получим:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_{1kk} = \dot{U}_1 y_{11} - \dot{U}_2 y_{12}; \quad (6.41')$$

$$\dot{I}_2 - \dot{I}_{2kk} = \dot{U}_1 y_{21} - \dot{U}_2 y_{22}. \quad (6.42')$$

Уравнения (6.41') и (6.42') отличаются от уравнений (6.4) и (6.5) только тем, что в левых частях их находятся соответственно $\dot{I}_1 - \dot{I}_{1kk}$ и $\dot{I}_2 - \dot{I}_{2kk}$ вместо \dot{I}_1 и \dot{I}_2 .

Отсюда следует, что все уравнения, получающиеся из (6.4)–(6.5) в результате их преобразований, будут справедливы и для активного четырехполюсника, только в них I_1 надо заменить на $I_1 - I_{1kk}$, а I_2 на $I_2 - I_{2kk}$.

Так, А-форме уравнений для пассивного четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$$

соответствует А-форма уравнений для активного четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(\dot{I}_2 - \dot{I}_{2kk}); \quad \dot{I}_1 - \dot{I}_{1kk} = C\dot{U}_2 + D(\dot{I}_2 - \dot{I}_{2kk}).$$

Коэффициенты A , B , C , D активного четырехполюсника удовлетворяют условию $AD - BC = 1$ и определяются так же, как и для пассивного.

Обратим внимание на то, что в состав активных четырехполюсников, рассматриваемых в § 6.13, входят только линейные элементы и не входят электронные лампы и транзисторы. Транзисторы и электронные лампы (и четырехполюсники, в которые они входят) представляют собой другой вид активных четырехполюсников, содержащих так называемые зависимые источники (о зависимых источниках см. § 9.35).

§ 6.14. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ АКТИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

На рис. 6.17 изображена одна из возможных Т-схем замещения активного четырехполюсника. Сопротивления Z_1 , Z_2 и Z_3 ее определяют через коэффициенты A , B , C , D , так же как и для пассивного четырехполюсника, а э. д. с. \dot{E}_3 и \dot{E}_4 находят по значениям токов \dot{I}_{1kk} и \dot{I}_{2kk} и сопротивлениям из уравнений, составленных для режима одновременного короткого замыкания входа и выхода, как показано пунктиром на рис. 6.17:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1kk}(Z_1 + Z_3) - \dot{I}_{2kk}Z_3 &= \dot{E}_3; \\ -\dot{I}_{2kk}Z_3 + \dot{I}_{2kk}(Z_2 + Z_3) &= \dot{E}_4. \end{aligned}$$

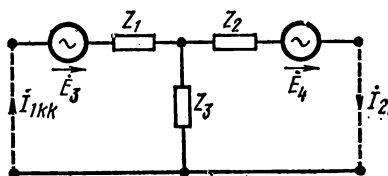


Рис. 6.17

Глава седьмая

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

§ 7.1. ТРЕХФАЗНАЯ СИСТЕМА Э. Д. С.

Под трехфазной симметричной системой э. д. с. понимают совокупность трех синусоидальных э. д. с. одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на 120° . График мгновенных значений их изображен на рис. 7.1; векторная диаграмма — на рис. 7.2. Принцип получения трехфазной системы э. д. с. иллюстрирует рис. 7.3. В равномерном магнитном поле с постоянной угловой скоростью вращаются три одинаковых жестко скрепленных друг с другом катушки.

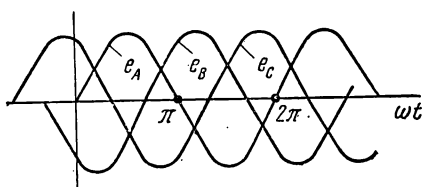


Рис. 7.1

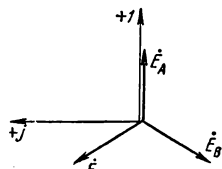


Рис. 7.2

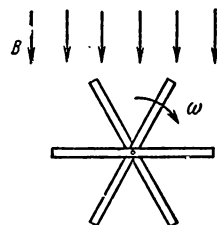


Рис. 7.3

Плоскости катушек смещены в пространстве на 120° . В каждой из катушек наводится синусоидальная э. д. с. одинаковой амплитуды, но по фазе они сдвинуты на 120° .

Аналогичным путем можно получить двух-, четырех- и более фазную систему э. д. с. Наибольшее практическое применение получила трехфазная система.

Э. д. с. трехфазного генератора обозначают следующим образом: одну из э. д. с. обозначают \dot{E}_A , отстающую от нее на 120° э. д. с. — \dot{E}_B , а опережающую на 120° — \dot{E}_C .

Последовательность прохождения э. д. с. через одинаковые значения (например, через нулевое значение) называют *последовательностью фаз*.

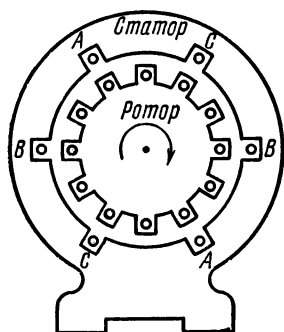


Рис. 7.4

§ 7.2. ПРИНЦИП РАБОТЫ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

В отличие от рис. 7.3 в синхронном генераторе (рис. 7.4) обмотки неподвижны (они помещены в пазы статора); вращается в нем магнитное поле, создаваемое вращающимся ротором с намотанной катушкой, по которой протекает постоянный ток. Генератор называют синхронным потому, что угловая скорость вращения ротора равна угловой частоте вращающегося магнитного поля. Магнитная цепь в такой конструкции почти замкнута (имеется только небольшой зазор между статором и ротором), что позволяет получить значительный поток при относительно небольшой м. д. с. обмотки ротора (см. § 3.10).

§ 7.3. ТРЕХФАЗНАЯ ЦЕПЬ. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ФАЗЫ

Совокупность трехфазной системы э. д. с., трехфазной нагрузки или нагрузок и соединительных проводов называют *трехфазной цепью*.

Токи, протекающие по отдельным участкам трехфазных цепей, сдвинуты относительно друг друга по фазе. Под *фазой трехфазной цепи* понимают участок трехфазной цепи, по которому протекает одинаковый ток. В литературе фазой иногда называют однофазную цепь, входящую в состав многофазной цепи. Под фазой будем также понимать аргумент синусоидально меняющейся величины. Таким образом, в зависимости от рассматриваемого вопроса фаза это либо участок трехфазной цепи, либо аргумент синусоидально изменяющейся величины.

§ 7.4. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ СОЕДИНЕНИЯ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И ФАЗНЫХ ВЕЛИЧИН

Существуют различные способы соединения обмоток генератора с нагрузкой. Самым неэкономичным способом явилось бы соединение каждой обмотки генератора с нагрузкой двумя проводами, на что потребовалось бы шесть соединительных проводов. В целях экономии

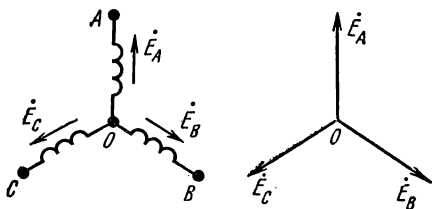


Рис. 7.5

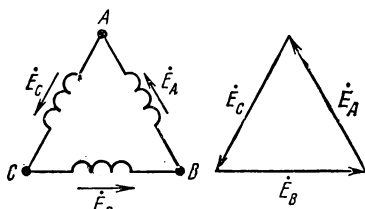


Рис. 7.6

обмотки трехфазного генератора соединяют в звезду или в треугольник. При этом число соединительных проводов от генератора к нагрузке уменьшается с шести до трех или до четырех.

На электрической схеме трехфазный генератор принято изображать в виде трех обмоток, расположенных друг к другу под углом 120° . При соединении звездой одноименные зажимы (например, концы x, y, z) трех обмоток объединяют в одну точку (рис. 7.5), которую называют нулевой точкой генератора O . Обмотки генератора обозначают буквами A, B, C ; буквы ставят: A — у начала первой фазы, B — у начала второй и C — у начала третьей.

При соединении обмоток генератора треугольником (рис. 7.6) конец первой обмотки генератора соединяют с началом второй, конец второй — с началом третьей, конец третьей — с началом первой. Геометрическая сумма э. д. с. в замкнутом треугольнике равна нулю. Поэтому если к зажимам A, B, C не присоединена нагрузка, то по обмоткам генератора не будет протекать ток.

Следует иметь в виду, что расположение звезды или треугольника векторов фазных э. д. с. на комплексной плоскости не следует как-то связывать с расположением в пространстве осей трех обмоток генератора.

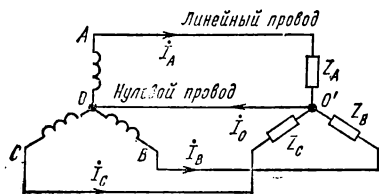


Рис. 7.7

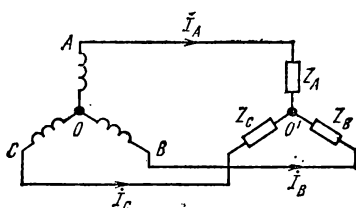
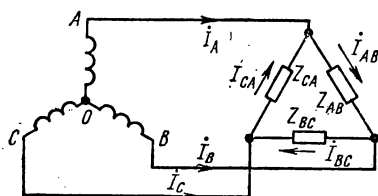
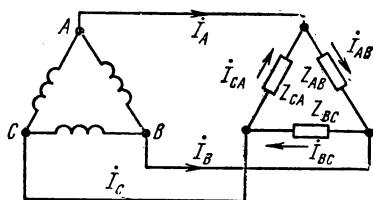


Рис. 7.8

Пять простейших способов соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой изображены на рис. 7.7—7.10.



а)



б)

Рис. 7.9

Точку, в которой объединены три конца трехфазной нагрузки при соединении ее звездой, называют *нулевой точкой нагрузки* и обозначают O' . *Нулевым проводом* называют провод, соединяющий нулевые точки генератора и нагрузки. Ток нулевого провода назовем I_0 . Положительное направление для него возьмем от точки O' к точке O .

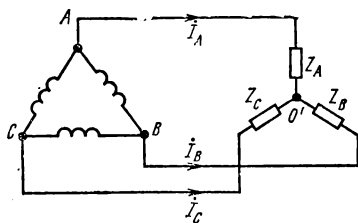


Рис. 7.10

Провода, соединяющие точки A , B , C генератора с нагрузкой, называют *линейными*.

Схему рис. 7.7 называют *звезда — звезда с нулевым проводом*; рис. 7.8 — *звезда — звезда без нулевого провода*; рис. 7.9, а — *звезда — треугольник*; рис. 7.9, б — *треугольник — треугольник*; рис. 7.10 — *треугольник — звезда*.

Текущие по линейным проводам токи называют *линейными*, их обозначают I_A , I_B , I_C . Условимся за положительное направление для них принимать направление от генератора к нагрузке. Модули линейных токов часто обозначают через I_n (не указывая никакого дополнительного индекса), особенно тогда, когда все линейные токи по модулю одинаковы.

Напряжение между линейными проводами называют *линейным* и обозначают, например, U_{AB} (линейное напряжение между точками A и B); модуль линейного напряжения — U_L .

Каждую из трех обмоток генератора называют фазой генератора; каждую из трех нагрузок — фазой нагрузки; протекающие по ним токи — фазовыми токами генератора I_ϕ или соответственно нагрузки, а напряжения на них — фазовыми напряжениями (U_ϕ).

§ 7.5. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И ФАЗОВЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ

При соединении генератора в звезду (рис. 7.7, 7.8, 7.9, а) линейное напряжение по модулю в $\sqrt{3}$ раза больше фазового напряжения генератора (U_ϕ). Это следует из того, что U_L есть основание равнобедренного треугольника с острыми углами по 30° (рис. 7.11):

$$U_L = U_{AB} = U_\phi \cdot 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_\phi. \quad (7.1)$$

Линейный ток I_L при соединении генератора в звезду равен фазовому току генератора:

$$I_L = I_\phi.$$

При соединении генератора в треугольник линейное напряжение равно фазовому напряжению генератора (см. рис. 7.6, 7.9, б):

$$U_L = U_\phi. \quad (7.2)$$

При соединении нагрузки в звезду (см. рис. 7.7, 7.8, 7.10) линейный ток равен фазовому току нагрузки:

$$I_L = I_\phi.$$

При соединении нагрузки в треугольник положительные направления для токов в сторонах треугольника выбирают по часовой стрелке. Индексы у токов соответствуют выбранным для них положительным направлениям: первый индекс отвечает точке, от которой ток утекает, второй — точке, к которой ток притекает.

При соединении нагрузки в треугольник (см. рис. 7.9, а и б) линейные токи не равны фазовым токам нагрузки и определяются через них по первому закону Кирхгофа:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}; \quad I_B = I_{BC} - I_{AB}; \quad I_C = I_{CA} - I_{BC}.$$

§ 7.6. ПРЕИМУЩЕСТВА ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМ

Широкое распространение трехфазных систем объясняется главным образом тремя основными причинами:

а) передача энергии на дальние расстояния трехфазным током экономически более выгодна, чем переменным током с иным числом фаз;

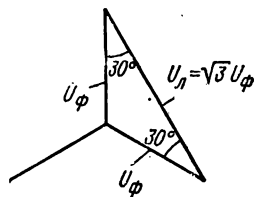


Рис. 7.11

б) элементы системы — трехфазный асинхронный двигатель и трехфазный трансформатор — весьма просты в производстве, экономичны и надежны в работе;

в) система обладает свойством неизменности величины мгновенной мощности за период синусоидального тока, если нагрузка во всех трех фазах трехфазного генератора одинакова.

§ 7.7. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока и потому расчет и исследование процессов в них производятся теми же методами и приемами, которые рассматривались в гл. V и VI.

Для цепей трехфазного тока применим также символический метод расчета, могут строиться векторные, топографические и круговые диаграммы.

Аналитический расчет трехфазных цепей рекомендуется сопровождать построением векторных или топографических диаграмм. Векторные диаграммы облегчают нахождение углов между токами и напряжениями, делают все соотношения более наглядными и помогают находить ошибки при аналитическом расчете, если последние возникают.

§ 7.8. СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕЗДА — ЗВЕЗДА С НУЛЕВЫМ ПРОВОДОМ

Если нулевой провод в схеме рис. 7.7 обладает весьма малым сопротивлением, то потенциал точки O' практически равен потенциалу точки O ; точки O' и O фактически представляют собой одну точку. При этом в схеме образуются три обособленных контура. Токи в них:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C}.$$

По первому закону Кирхгофа, ток в нулевом проводе равен геометрической сумме фазовых токов:

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (7.3)$$

Если $Z_A = Z_B = Z_C$ (такая нагрузка называется *равномерной*), то ток \dot{I}_0 равен нулю и нулевой провод может быть изъят из схемы без изменения режима ее работы.

При неравномерной нагрузке фаз ток \dot{I}_0 в общем случае не равен нулю.

При наличии в нулевом проводе некоторого сопротивления расчет схемы производится по методу двух узлов.

Пример 73. В схеме рис. 7.12, а э. д. с. каждой фазы трехфазного генератора равна 127 в. Сопротивления фаз нагрузки равны по величине (6,35 ом), но имеют различный характер:

$$Z_A = R, \quad Z_B = j\omega L, \quad Z_C = \frac{-j}{\omega C}.$$

Определить ток в нулевом проводе.

Решение. Построим векторную диаграмму (рис. 7.12, б). Токи всех фаз по модулю равны $\frac{127}{6,35} = 20$ а. Ток \dot{I}_A по фазе совпадает

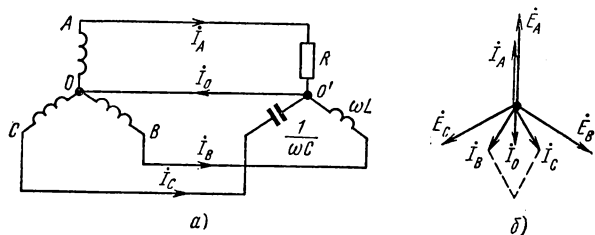


Рис. 7.12

с \dot{E}_A . Ток \dot{I}_B на 90° отстает от \dot{E}_B . Ток \dot{I}_C опережает \dot{E}_C на 90° . Сумма $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ дает вектор тока \dot{I}_0 . По модулю он равен 14,6 а.

Пример 74. Какой величины должно быть взято сопротивление R в фазе A схемы рис. 7.12, а, чтобы ток в нулевом проводе стал равным нулю?

Решение. Геометрическая сумма токов $\dot{I}_B + \dot{I}_C$ по модулю равна

$$2 \cdot 20 \cdot \cos 30^\circ = 20\sqrt{3} \text{ а.}$$

Ток в нулевом проводе станет равным нулю, если ток \dot{I}_A , направленный противоположно сумме $\dot{I}_B + \dot{I}_C$, по модулю станет равным $20\sqrt{3}$ а. При этом сопротивление фазы A

$$R = \frac{E}{20\sqrt{3}} = \frac{127}{20\sqrt{3}} = 3,66 \text{ ом.}$$

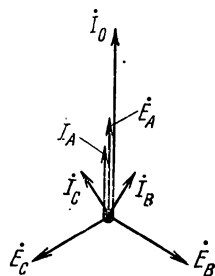


Рис. 7.13

Пример 75. Определить ток в нулевом проводе схемы рис. 7.12, а, если в фазе A будет включено активное сопротивление 3,66 ом, а индуктивность и емкость фаз B и C поменять местами.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 6,35 \text{ ом.}$$

Решение. Векторная диаграмма изображена на рис. 7.13. Из нее следует, что

$$I_0 = 34,6 + 34,6 = 69,2 \text{ а.}$$

§ 7.9. СОЕДИНЕНИЕ НАГРУЗКИ В ТРЕУГОЛЬНИК

Выберем направление токов в фазах треугольника в соответствии с рис. 7.9, а. Ток \dot{I}_{AB} вызывается напряжением \dot{U}_{AB} . Величина и фаза его по отношению к напряжению \dot{U}_{AB} определяются сопротивлением нагрузки Z_{AB} . Ток \dot{I}_{BC} вызван напряжением \dot{U}_{BC} . Величина и фаза его по отношению к \dot{U}_{BC} определяются сопротивлением Z_{BC} . Ток \dot{I}_{CA} вызван напряжением \dot{U}_{CA} и определяется сопротивлением Z_{CA} . Линейные

токи определим через фазовые токи по первому закону Кирхгофа

$$\left. \begin{aligned} I_A &= I_{AB} - I_{CA}; \\ I_B &= I_{BC} - I_{AB}; \\ I_C &= I_{CA} - I_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

При равномерной нагрузке фаз линейные токи по модулю в $\sqrt{3}$ раз больше фазовых токов нагрузки. При неравномерной нагрузке линейные токи могут быть и больше и меньше фазовых токов нагрузки.

Пример 76. В схеме рис. 7.14, а $Z_{AB} = -19j$; $Z_{BC} = 19j$; $Z_{CA} = 19 \text{ ом}$. Э. д. с. каждой фазы генератора 220 в. Определить все токи и построить векторную диаграмму.

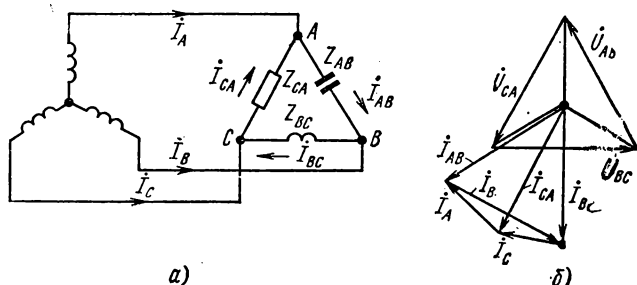


Рис. 7.14

Решение. Решение будем сопровождать векторной диаграммой рис. 7.14, б. Напряжения на фазах нагрузки в $\sqrt{3}$ раз больше фазовых э. д. с. генератора и равны $220\sqrt{3} = 380 \text{ в}$. Ток I_{AB} опережает напряжение \dot{U}_{AB} на 90° и по величине равен $\frac{380}{19} = 20 \text{ а}$. Ток I_{BC} отстает от \dot{U}_{BC} на 90° и также равен 20 а. Ток I_{CA} по модулю равен 20 а и совпадает по фазе с напряжением \dot{U}_{CA} . Линейные токи I_A, I_B, I_C найдем графически путем использования соотношений (7.4). По модулю $I_A = I_C \approx 10 \text{ а}$; $I_B = 20 \text{ а}$.

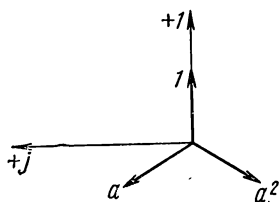


Рис. 7.15

§ 7.10. ОПЕРАТОР a ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ

Условимся комплексное число e^{j120° , по модулю равное единице, обозначать через a и называть оператором трехфазной системы. Тогда

$$e^{j240^\circ} = (e^{j120^\circ})^2 = a^2.$$

Три вектора: 1, a и a^2 — образуют симметричную трехфазную систему (рис. 7.15):

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (7.5)$$

Умножение какого-либо вектора на a поворачивает его без изменения модуля на угол 120° против часовой стрелки. Умножение вектора

на a^2 поворачивает его на угол 240° против часовой стрелки, или, что то же самое, поворачивает его по часовой стрелке на 120° .

С помощью оператора a можно выразить э. д. с. \dot{E}_B и э. д. с. \dot{E}_C симметричной трехфазной системы через э. д. с. \dot{E}_A :

$$\dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a \dot{E}_A. \quad (7.6)$$

§ 7.11. СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕЗДА — ЗВЕЗДА БЕЗ НУЛЕВОГО ПРОВОДА

На рис. 7.8 представлена схема с двумя узлами (точки O и O'). Для расчета токов в ней наиболее целесообразно пользоваться методом двух узлов (см. § 1.20). Напряжение между двумя узлами

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{E}_A (Y_A + a^2 Y_B + a Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C}. \quad (7.7)$$

Если нагрузка равномерна ($Y_A = Y_B = Y_C$), то [см. соотношение (7.5)]

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A (1 + a + a^2)}{3Y_A} = 0$$

и напряжение на каждой фазе нагрузки равно соответствующей э. д. с.:

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C.$$

Если нагрузка неравномерна, то $\dot{U}_{O'O} \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AO'} &= \dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}; & \dot{U}_{BO'} &= \dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}; \\ \dot{U}_{CO'} &= \dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}. \end{aligned}$$

Токи в фазах нагрузки:

$$I_A = \frac{\dot{U}_{AO'}}{Z_A}; \quad I_B = \frac{\dot{U}_{BO'}}{Z_B}; \quad I_C = \frac{\dot{U}_{CO'}}{Z_C}.$$

Если в двух фазах нагрузка одинакова, например $Z_B = Z_C \neq Z_A$, то формула (7.7) после преобразований имеет следующий вид:

$$\dot{U}_{O'O} = \dot{E}_A \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + 2Z_A}. \quad (7.8)$$

§ 7.12. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЗАИМОИНДУКЦИИ

Расчет трехфазных цепей, содержащих магнитносвязанные катушки, производится так же, как и расчет магнитносвязанных цепей однофазного синусоидального тока.

Пример 77. Определить показания амперметра и вольтметра в схеме рис. 7.16. Построить топографическую диаграмму, совместив ее с векторной диаграммой токов. Дано: $E_\Phi = 127$ в; $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 4$ ом; $\omega M = 2$ ом.

Решение. Выберем положительные направления токов в соответствии с рис. 7.16. По первому закону Кирхгофа, $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

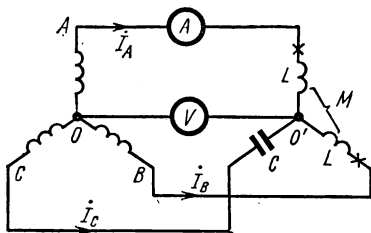


Рис. 7.16

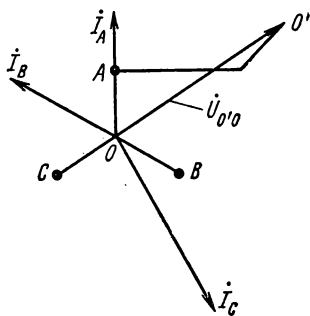


Рис. 7.17

Примем э. д. с. \dot{E}_A направленной по оси $+1$. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура $OA'O'B$:

$$\dot{I}_A j\omega L + \dot{I}_B j\omega M - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{AB}.$$

После подстановки числовых значений

$$2j(\dot{I}_A - \dot{I}_B) = 220e^{j30^\circ}$$

или

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \frac{220e^{j30^\circ}}{2e^{j90^\circ}} = 110e^{-j60^\circ} \text{ а.}$$

Для контура $OC'O'BO$

$$\dot{I}_C \left(-\frac{j}{\omega C} \right) - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{CB}$$

или

$$-4j\dot{I}_C - 2j\dot{I}_A - 4j\dot{I}_B = 220j.$$

Совместное решение трех уравнений дает:

$$\dot{I}_A = 110; \quad \dot{I}_B = 110e^{j60^\circ}; \quad \dot{I}_C = 110\sqrt{3}e^{-j150^\circ} \text{ а.}$$

Топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, изображена на рис. 7.17. Амперметр показывает 110 а, вольтметр — приблизительно 640 в:

$$\dot{\Phi}_{O'} = \dot{\Phi}_O + \dot{E}_A - \dot{I}_A j\omega L - \dot{I}_B j\omega M.$$

§ 7.13. АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ

Под активной мощностью трехфазной системы понимают сумму активных мощностей фаз нагрузки плюс активная мощность в сопротивлении, включенном в нулевой провод:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0. \quad (7.9)$$

Реактивная мощность — это сумма реактивных мощностей фаз нагрузки плюс реактивная мощность в сопротивлении, включенном в нулевой провод:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0. \quad (7.10)$$

Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (7.11)$$

Если нагрузка равномерная, то

$$P_0 = Q_0 = 0;$$

$$P_A = P_B = P_C = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi; \quad Q_A = Q_B = Q_C = U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi,$$

где φ_ϕ — угол между напряжением U_ϕ на фазе нагрузки и током I_ϕ фазы нагрузки.

При равномерной нагрузке фаз:

$$\left. \begin{aligned} P &= 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi; \\ Q &= 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi; \\ S &= 3U_\phi I_\phi. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

При равномерной нагрузке независимо от способа ее соединения в звезду или в треугольник

$$3U_\phi I_\phi = \sqrt{3} \sqrt{3} U_\phi I_\phi = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta, \quad (7.13)$$

где U_Δ — линейное напряжение на нагрузке; I_Δ — линейный ток нагрузки.

Поэтому вместо формул (7.12) часто используют следующие:

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \cos \varphi_\phi; \\ Q &= \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \sin \varphi_\phi; \\ S &= \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

§ 7.14. ИЗМЕРЕНИЕ АКТИВНОЙ МОЩНОСТИ В ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

Для измерения активной мощности трехфазной системы в общем случае (неравномерная нагрузка и наличие нулевого провода) необходимо три ваттметра включить по схеме рис. 7.18. Активная мощность системы равна сумме показаний трех ваттметров.

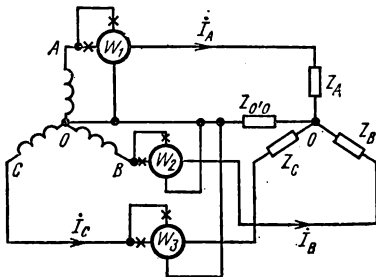


Рис. 7.18

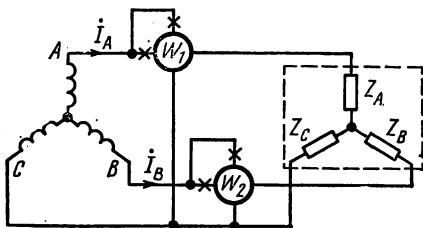


Рис. 7.19

Если нулевой провод отсутствует, то измерение мощности производят двумя ваттметрами по схеме рис. 7.19. Сумма показаний двух ваттметров при этом

(см. рис. 7.19) дает активную мощность всей системы независимо от того, в звезду или в треугольник соединена нагрузка (треугольник нагрузки всегда может быть преобразован в эквивалентную звезду).

Показание первого ваттметра равно $\operatorname{Re} \dot{U}_{AC} \dot{I}_A$, второго $\operatorname{Re} \dot{U}_{BC} \dot{I}_B$. Но

$$\dot{U}_{AC} \dot{I}_A + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B = (\dot{U}_A - \dot{U}_C) \dot{I}_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) \dot{I}_B = \dot{U}_A \dot{I}_A + \dot{U}_B \dot{I}_B + \dot{U}_C \dot{I}_C.$$

При равномерной нагрузке фаз достаточно измерить мощность одной из фаз и результат утроить.

§ 7.15. КРУГОВЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИАГРАММЫ В ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

Если меняется модуль сопротивления одной из фаз трехфазной цепи, то геометрическим местом концов векторов напряжения или тока любой из фаз цепи будет являться окружность или прямая линия.

Для примера рассмотрим круговую диаграмму напряжений по схеме рис. 7.20, если $Z_B = Z_C = r = \text{const}$ и изменяется только модуль сопротивления фазы A (Z_A).

Используем формулу (6.40), заменив в ней индексы a и b на

O' и O . В режиме холостого хода ток по фазе A равен нулю, а напряжения на двух сопротивлениях $Z_B = Z_C = r$ равны $\frac{\dot{U}_{BC}}{2}$. Точка O' в режиме х. х. находится посередине вектора \dot{U}_{BC} (на рис. 7.21, a — точка f), при этом $\dot{U}_{O'O_{\text{х.х}}} = -0,5 \dot{E}_A$. При коротком замыкании сопротивления

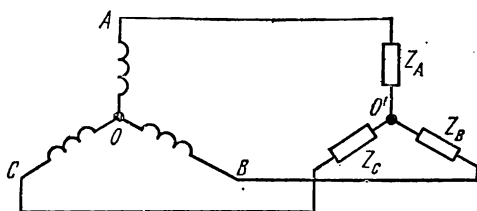


Рис. 7.20

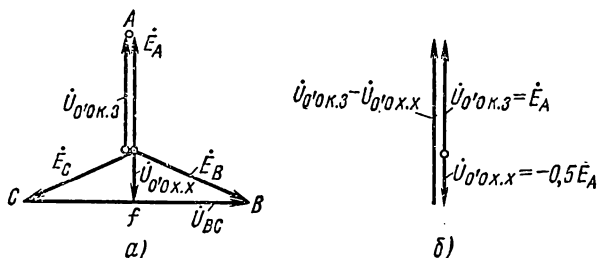


Рис. 7.21

Z_A потенциал точки O' равен потенциалу точки A . Поэтому $\dot{U}_{O'O_{\text{к.з.}}} = \dot{E}_A$. Хордой искомой окружности является разность векторов (рис. 7.21, б) $\dot{U}_{O'O_{\text{к.з.}}} - \dot{U}_{O'O_{\text{х.х.}}} = \dot{E}_A - (-0,5 \dot{E}_A) = 1,5 \dot{E}_A$. Для определения входного сопротивления $Z_{\text{вх}}$ по отношению к точкам A и O' служит схема рис. 7.22, a (источники э. д. с. закорочены). Два сопротивления r включены параллельно, поэтому $Z_{\text{вх}} = \frac{r}{2}$ и $\varphi_{\text{вх}} = 0$.

Рассмотрим три случая.

1. Когда Z_A — изменяющееся емкостное сопротивление — $Z_A = -\frac{j}{\omega C}$, $\varphi_n = -90^\circ$ и $\psi = \varphi_n - \varphi_{вх} = -90^\circ$. Диаграмма построена на рис. 7.22, б, где линия X_C проведена по отношению к хорде под углом $\psi = 90^\circ$. Масштаб для X_C соответствует масштабу, в котором отрезок fd выражает входное сопротивление $Z_{вх} = \frac{r}{2}$. Геометрическим местом точки O' является полуокружность fpA . Для определения величины и фазы $\dot{U}_{O'O}$ при некотором произвольном значении X_C его следует отложить на линии md и провести луч fm . Точка пересечения луча fm с полуокружностью fpA обозначена p . $\dot{U}_{O'O}$, соответствующее взятому значению X_C , изобразится вектором, проведенным из точки O в точку p .

2. Если Z_A — изменяющееся индуктивное сопротивление, то $\psi = 90^\circ$, и геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{O'O}$ является полуокружность fqa (изображена пунктиром на рис. 7.22, б). Линия переменного параметра в этом случае будет справа от точки d .

3. Когда Z_A — чисто активное сопротивление, то $\psi = \varphi_n - \varphi_{вх} = 0$ и геометрическим местом концов вектора $\dot{U}_{O'O}$ является прямая Af .

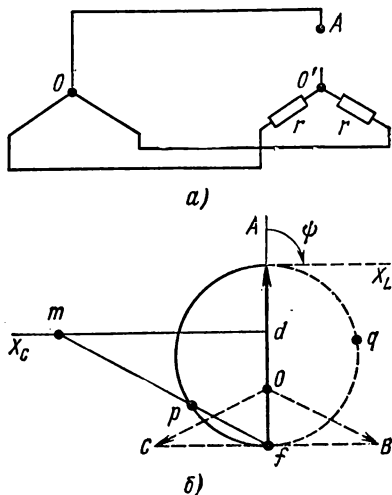


Рис. 7.22

§ 7.16. УКАЗАТЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧЕРЕДОВАНИЯ ФАЗ

Определение порядка или последовательности чередования фаз в трехфазной симметричной системе э. д. с. (напряжений) производят с помощью указателя последовательности чередования фаз. Он состоит из двух одинаковых ламп накаливания и емкости (рис. 7.23).

Емкость C берут такой величины, что емкостное сопротивление $\frac{1}{\omega C}$ равно сопротивлению r каждой лампы.

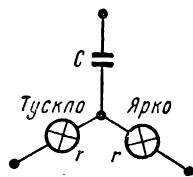


Рис. 7.23

Из диаграммы рис. 7.22, б видно, что напряжение на лампах накаливания будет различно. На лампе, включенной в фазу B , оно определяется вектором $\dot{U}_{BO'}$; на лампе, включенной в фазу C , — вектором $\dot{U}_{CO'}$. Так как $U_{BO'} > U_{CO'}$, то лампа в фазе B будет гореть

более ярко, чем лампа в фазе C . Следовательно, если фазу трехфазной системы э. д. с., к которой подключен конец от емкости, принять за фазу A , то фаза, к которой окажется подключенной ярко горящая лампа, есть фаза B , а фаза с тускло горящей лампой — фаза C .

Одним из важнейших свойств многофазных и, в частности, трехфазных токов является способность их создавать круговое вращающееся магнитное поле.

§ 7.17. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАТУШКИ С СИНУСОИДАЛЬНЫМ ТОКОМ

Магнитное поле одной катушки, по которой протекает синусоидальный ток, представляет собой пульсирующее * (не вращающееся) магнитное поле. На рис. 7.24 изображена катушка, по которой проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции \vec{B} . Направление \vec{B} определяется направлением намотки катушки и направлением тока в ней в данный момент времени.

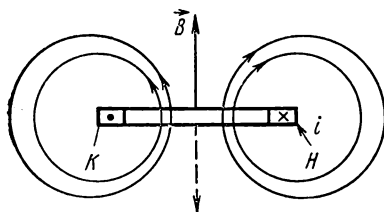


Рис. 7.24

Пусть буква H означает начало и K — конец катушки на рис. 7.24. Если ток входит в зажим H и выходит из зажима K (это направление тока будем считать положительным: ему соответствует интервал времени от 0 до π), то вектор магнитной индукции направлен вверх по осевой линии катушки. В следующий полупериод, когда ток

отрицателен, вектор \vec{B} направлен вниз (пунктир на рис. 7.24). Таким образом, геометрическим местом концов вектора \vec{B} является ось катушки.

§ 7.18. ПОЛУЧЕНИЕ КРУГОВОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Круговое вращающееся магнитное поле представляет собой магнитное поле, вектор результирующей магнитной индукции которого по величине неизменен и вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Расположим три одинаковые катушки так, что оси их будут смещены на 120° по отношению друг к другу (рис. 7.25, а). Присоединим катушки к симметричной трехфазной системе э. д. с. Пусть токи входят в начала катушек H и изменяются следующим образом:

$$i_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin (\omega t - 120^\circ); \quad i_3 = I_m \sin (\omega t + 120^\circ).$$

Графики их изображены на рис. 7.25, б. Каждый из токов будет создавать пульсирующее поле, направленное вдоль оси своей катушки.

* Под пульсирующим полем понимают поле, вектор магнитной индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль оси создающей его катушки с током.

Положительное направление оси первой катушки обозначим $+1$, второй $+2$, третьей $+3$. Магнитную индукцию первой катушки обозначим B_1 , второй — B_2 , третьей — B_3 . Тогда

$$B_1 = B_m \sin \omega t; \quad B_2 = B_m \sin (\omega t - 120^\circ); \quad B_3 = B_m \sin (\omega t + 120^\circ).$$

Изобразим мгновенные значения B_1 , B_2 , B_3 и результирующую индукцию для моментов времени $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ (рис. 7.26, $a—z$)

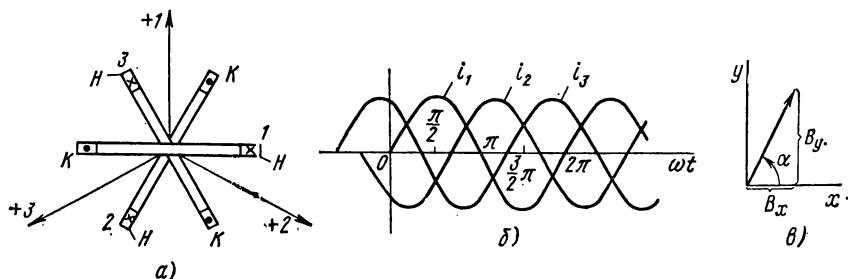


Рис. 7.25

Запишем алгебраическую сумму проекции магнитных индукций B_1 , B_2 , B_3 на оси x и y декартовой системы координат рис. 7.25, $в$:

$$B_x = B_2 \cos 30^\circ - B_3 \cos 30^\circ = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t;$$

$$B_y = B_1 - B_2 \cos 60^\circ - B_3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.$$

Результирующая индукция по модулю $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m$ и составляет угол α с осью x , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = -\operatorname{tg} \omega t$, т. е. угол $\alpha = \pi - \omega t$.

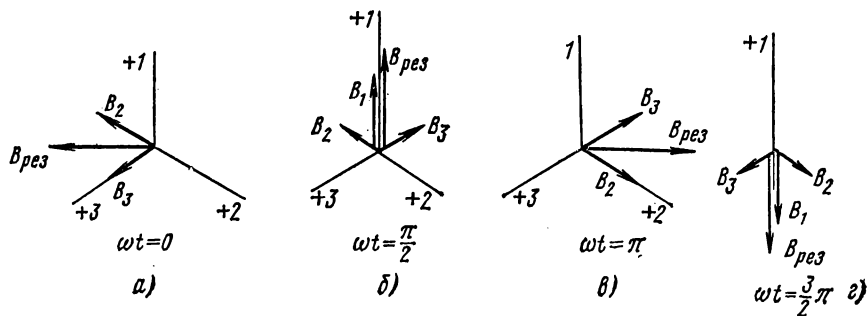


Рис. 7.26

С увеличением времени вектор результирующей магнитной индукции, оставаясь по величине равным $\frac{3}{2} B_m$, вращается с угловой ско-

ростью ω по направлению от начала первой катушки с током $I_m \sin \omega t$ к началу второй катушки с током $I_m \sin (\omega t - 120^\circ)$, т. е. вектор результирующей магнитной индукции вращается в сторону катушки с отстающим током.

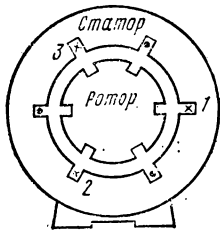


Рис. 7.27

Если ток $I_m \sin (\omega t - 120^\circ)$ пропустить по третьей, а ток $I_m \sin (\omega t + 120^\circ)$ — по второй катушке, то направление вращения поля изменится на обратное.

Если произойдет обрыв одной из фаз или ток в ней станет по амплитуде не равен току в какой-либо другой фазе или сдвинут по фазе не на 120° , образуется *эллиптическое вращающееся поле*. При возникновении его вектор результирующей магнитной индукции будет скользить по эллипсу.

В § 3.10 отмечалось, что если магнитная цепь полностью или частично выполнена из ферромагнитного материала, то при том же токе магнитный поток в ней значительно больше, чем магнитный поток в отсутствии ферромагнитного материала.

Для того чтобы усилить вращающееся магнитное поле, внутрь катушек помещают полый или сплошной ферромагнитный цилиндр, а стороны катушек заключают в пазы внешнего ферромагнитного цилиндра (рис. 7.27).

Вращающееся магнитное поле используется в электрических двигателях.

§ 7.19. ПРИНЦИП РАБОТЫ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный двигатель. В нем имеется неподвижная часть — статор, в пазах которого помещены три катушки, создающие круговое вращающееся магнитное поле, и подвижная часть — ротор, в пазах которого находятся три замкнутые на себя или на внешнее сопротивление катушки (см. рис. 7.27). Катушки на рис. 7.27 даны в разрезе, торцовые части катушек не показаны; каждая из катушек занимает лишь небольшую часть окружности статора (или ротора). В действительности каждая из катушек (прямые и обратные провода ее) занимает $\frac{1}{3}$ окружности расточки статора (или окружности ротора). Вал ротора двигателя соединен с валом рабочей машины.

Допустим, что вначале ротор неподвижен. При этом вращающееся магнитное поле, созданное обмотками статора, пересекает провода катушек неподвижного ротора с угловой скоростью ω и наводит в них э. д. с. Э. д. с. вызовут токи в катушках ротора. По закону Ленца эти токи стремятся своим магнитным полем ослабить вызвавшее их магнитное поле.

Механическое взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем приведет к тому, что ротор начнет вращаться в ту же

сторону, в какую вращается магнитное поле (в этом можно убедиться, применив правило левой руки).

В установившемся режиме скорость вращения ротора $\omega_{\text{рот}}$ составляет $(0,98 \div 0,95) \omega$. Двигатель называют асинхронным потому, что ротор его вращается не синхронно с вращающимся полем; $\omega_{\text{рот}}$ не может равняться угловой скорости вращающегося поля. Это станет понятно, если учесть, что при $\omega_{\text{рот}} = \omega$ вращающееся поле не пересекало бы провода катушек ротора, в них отсутствовал бы ток и ротор не испытывал бы вращающего момента.

В курсе ТОЭ ограничиваемся качественным рассмотрением основных положений, характеризующих принцип работы асинхронного двигателя. Подробнее эти вопросы изучают в курсе электрических машин.

§ 7.20. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ НА СИСТЕМЫ НУЛЕВОЙ, ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФАЗ

Любую несимметричную систему трех токов, напряжений, потоков одинаковой частоты — обозначим их \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} — можно однозначно представить в виде трех систем: нулевой, прямой и обратной последовательностей фаз.

Система прямой последовательности (рис. 7.28, а) состоит из трех векторов: \dot{A}_1 , \dot{B}_1 , \dot{C}_1 , равных по величине и повернутых относительно друг друга на 120° ; причем вектор \dot{B}_1 отстает от вектора \dot{A}_1 на 120° , а вектор \dot{C}_1 опережает \dot{A}_1 на 120° . Используя оператор a трехфазной системы (см. § 7.10), можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_1 &= a^2 \dot{A}_1; \\ \dot{C}_1 &= a \dot{A}_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

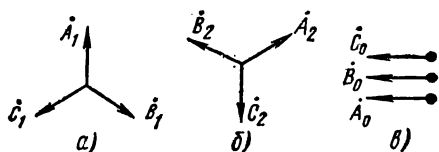


Рис. 7.28

Система обратной последовательности (рис. 7.28, б) состоит из трех векторов: \dot{A}_2 , \dot{B}_2 , \dot{C}_2 , равных по величине и повернутых относительно друг друга на 120° ; причем вектор \dot{B}_2 опережает \dot{A}_2 на 120° :

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_2 &= a \dot{A}_2; \\ \dot{C}_2 &= a^2 \dot{A}_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Система нулевой последовательности \dot{A}_0 , \dot{B}_0 , \dot{C}_0 (рис. 7.28, в) образована тремя векторами, совпадающими по фазе:

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0. \quad (7.17)$$

Выразим заданные три вектора \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} через векторы симметричных систем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ \dot{B} &= \dot{B}_0 + \dot{B}_1 + \dot{B}_2; \\ \dot{C} &= \dot{C}_0 + \dot{C}_1 + \dot{C}_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Перепишем (7.18) с учетом (7.15) и (7.16):

$$\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \quad (7.19)$$

$$\dot{B} = \dot{A}_0 + a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2; \quad (7.20)$$

$$\dot{C} = \dot{A}_0 + a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2. \quad (7.21)$$

Из системы уравнений (7.19) — (7.21) найдем \dot{A}_0 , \dot{A}_1 и \dot{A}_2 через заданные векторы \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} . Для определения \dot{A}_0 сложим уравнения (7.19) — (7.21) и учтем, что $1 + a + a^2 = 0$. Получим

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3} (\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}). \quad (7.22)$$

Таким образом, для нахождения \dot{A}_0 надо геометрически сложить три заданных вектора и взять одну треть от суммы.

Для определения \dot{A}_1 к уравнению (7.19) прибавим уравнение (7.20), умноженное на a , и уравнение (7.21), умноженное на a^2 :

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3} (\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}). \quad (7.23)$$

Следовательно, одна треть суммы, состоящей из вектора \dot{A} плюс вектор \dot{B} , повернутый против часовой стрелки на 120° , плюс вектор \dot{C} , повернутый по часовой стрелке на 120° , дает вектор \dot{A}_1 .

Для определения \dot{A}_2 к уравнению (7.19) прибавим уравнение (7.20), предварительно умноженное на a^2 , и уравнение (7.21), умноженное на a . Получим

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3} (\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C}). \quad (7.24)$$

§ 7.21. Понятие о методе симметричных составляющих

Трехфазные системы передачи электрической энергии состоят из источников энергии, линий передачи, трансформаторов и электродвигателей. В результате какой-либо аварии, например короткого замыкания или обрыва провода, или в результате несимметричной нагрузки на элементах системы (электродвигателях, трансформаторах, на самой линии передачи) возникают несимметричные напряжения.

Расчет токов и напряжений в системах производят с помощью схем замещения, на которых все элементы системы должны быть представлены комплексными сопротивлениями. Но сопротивление на фазу для одного и того же элемента различно для разных последовательностей. Поэтому расчет следует вести для каждой из последовательностей отдельно, а затем искомую величину (ток или напряжение) определять как сумму токов или соответственно напряжений от нулевой, прямой и обратной последовательностей.

Рассмотрим причины, обуславливающие различные сопротивления одного и того же элемента для разных последовательностей (при относительно низких частотах).

Сопротивление на фазу трехфазной линии передачи для прямой, обратной и нулевой последовательностей фаз обозначим соответственно $Z_{1л}$, $Z_{2л}$ и $Z_{0л}$. Сопротивление на фазу линии для прямой последовательности $Z_{1л}$ равно сопротивлению на фазу линии для обратной последовательности $Z_{2л}$, но не равно сопротивлению линии для нулевой последовательности фаз $Z_{0л}$ в результате различия в значениях индуктивности на фазу трехфазной линии для систем прямой и нулевой последовательностей фаз.

Различие в значениях индуктивности на фазу для прямой и нулевой последовательностей фаз объясняется двумя причинами.

Во-первых, индуктивность на фазу линии передачи для прямой и обратной последовательностей определяется только геометрическими размерами петель, образованных линейными проводами, тогда как индуктивность на фазу линии для нулевой последовательности определяется не только геометрическими размерами петель, образованных линейными проводами, но и геометрическими размерами петель, образованных линейными проводами и нулевым проводом.

Во-вторых, э. д. с., наводимые в проводах линии для прямой и для обратной последовательностей, представляют собой геометрическую сумму э. д. с. от сдвинутых по фазе на 120° токов в линейных проводах, тогда как э. д. с., наводимые в проводах линии для нулевой последовательности, созданы совпадающими по фазе токами нулевой последовательности.

В трехфазном трехстержневом трансформаторе (магнитная система его изображена на рис. 7.29) сопротивление на фазу для нулевой последовательности $Z_{0т}$ не

равно сопротивлению на фазу для прямой последовательности Z_{1T} , но $Z_{1T} = Z_{2T}$, где Z_{2T} — сопротивление на фазу для обратной последовательности.

Объясняется это главным образом тем, что магнитные потоки нулевой последовательности Φ_0 всех трех фаз находятся в фазе и потому не могут замыкаться по соседним стержням магнитной системы и замыкаются по воздуху (см. рис. 7.29). Магнитные потоки трех фаз прямой Φ_1 (и соответственно обратной) последовательности по фазе сдвинуты на 120° и потому могут замыкаться по соседним стержням магнитной системы. Так как магнитное сопротивление по пути в воздухе много больше магнитного сопротивления по пути в стали, то при одинаковых токах нулевой и прямой последовательностей Φ_0 меньше Φ_1 . Поэтому $Z_{0T} < Z_{1T}$. Еще большее различие между сопротивлениями нулевой $Z_{0д}$, прямой $Z_{1д}$ и обратной $Z_{2д}$ последовательности имеет место для асинхронного двигателя.

Если к входным зажимам трехфазного асинхронного двигателя рис. 7.27 одновременно подвести систему напряжений прямой, нулевой и обратной последовательностей фаз, то входное сопротивление на фазу двигателя для прямой последовательности $Z_{1д}$ не будет равно входному сопротивлению на фазу для обратной последовательности $Z_{2д}$ и оба они будут отличаться от входного сопротивления для нулевой последовательности $Z_{0д}$. Разберем, чем это объясняется.

Под действием напряжения прямой последовательности в двигателе создается круговое вращающееся магнитное поле. Оно увлекает за собой ротор двигателя. Ротор вращается с угловой частотой $\omega_{рот}$. Система напряжений обратной последовательности также создает круговое вращающееся поле, но направление вращения его обратно направлению вращения поля прямой последовательности.

Система напряжений нулевой последовательности вращающегося магнитного поля не создает. Вокруг статорных обмоток ею создаются пульсирующие потоки, замыкающиеся по воздушному зазору между статором и ротором, подобно тому как в трехстержневом трехфазном трансформаторе рис. 7.29 потоки от нулевой последовательности, выходя из сердечника, замыкались по воздуху.

Входное сопротивление на фазу двигателя для данной последовательности зависит не только от активного и реактивного сопротивлений фазы статорной обмотки, но и от активного и реактивного сопротивлений фазы роторной обмотки для данной последовательности*. Индуктивное сопротивление фазы ротора прямо пропорционально частоте. Прямая последовательность создает в роторе токи частоты $(\omega - \omega_{рот})$, что составляет примерно от 0,02 до 0,05 ω , тогда как токи ротора от обратно вращающегося поля имеют частоту $\omega + \omega_{рот} \approx (1,98 + 1,95)\omega$. Так как частоты токов в роторе, создаваемые прямой и обратной последовательностями, различны, то различны и входные сопротивления на фазу для прямой $Z_{1д}$ и обратной $Z_{2д}$ последовательностей.

Магнитные потоки нулевой последовательности замыкаются, минуя ротор, а потоки прямой и обратной последовательностей проходят через ротор. При одном и том же токе прямой и нулевой последовательностей потоки прямой и нулевой последовательностей различны. Поэтому для асинхронного двигателя

$$Z_{0д} \neq Z_{1д} \neq Z_{2д}.$$

Расчет по методу симметричных составляющих состоит в следующем. На основании принципа наложения, применимого к линейным цепям, заданный несимметричный режим работы схемы в методе симметричных составляющих представляют как результат наложения трех симметричных режимов.

* Подобно тому как в трансформаторе входное сопротивление определяется не только собственным сопротивлением первичной обмотки, но и сопротивлением, вносимым вторичной обмоткой (см. § 5.39).

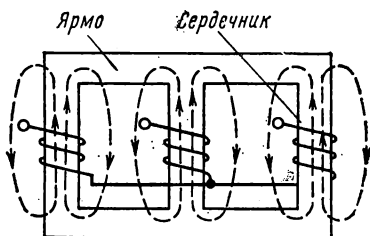


Рис. 7.29

В первом симметричном режиме все токи, э. д. с. и напряжения содержат только составляющие прямой последовательности фаз, а вращающиеся машины и трехфазные трансформаторы представлены на схемах их сопротивлениями для прямой последовательности Z_1 . Во втором симметричном режиме все токи, э. д. с. и напряжения содержат составляющие только обратной последовательности, а машины и трансформаторы представлены их сопротивлениями обратной последовательности Z_2 . В третьем симметричном режиме все токи, э. д. с. и напряжения содержат только составляющие нулевой последовательности, а машины и трансформаторы представлены соответствующими сопротивлениями нулевой последовательности Z_0 .

Для того чтобы от несимметричной исходной схемы прийти к трем симметричным схемам, поступают следующим образом: в том месте схемы, где создается несимметрия, в схему вводят систему трех несимметричных напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Система этих трех напряжений (или э. д. с.) на основании теоремы компенсации заменяет три неодинаковых сопротивления, образовавшихся в месте аварии и приведших к несимметрии во всей схеме.

Далее систему трех несимметричных напряжений в соответствии с § 7.20 раскладывают на три симметричные системы, основные векторы которых \dot{U}_0, \dot{U}_1 и \dot{U}_2 надлежит определить.

Точно так же систему трех несимметричных токов I_A, I_B, I_C раскладывают на три симметричные системы токов, основные векторы которых I_0, I_1, I_2 надлежит определить.

В методе симметричных составляющих неизвестными являются шесть величин: три напряжения — \dot{U}_0, \dot{U}_1 и \dot{U}_2 и три тока — I_0, I_1 и I_2 , через которые могут быть выражены любые напряжения и токи в цепи.

Для определения шести неизвестных составляют шесть уравнений. По одному уравнению составляют для каждой из трех симметричных схем, остальные три уравнения составляют для того участка схемы, где создается несимметрия. Вид трех последних уравнений зависит от характера несимметрии в схеме.

Примеры на метод симметричных составляющих можно найти, например, в [2].

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧАСТИ I

Приложение А

НАПРАВЛЕННЫЕ И НЕНАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ

§ А. 1. ХАРАКТЕРИСТИКА ДВУХ НАПРАВЛЕНИЙ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графом называют совокупность узлов и соединяющих их ветвей. Каждый граф характеризуется своей топологией, т. е. информацией о том, какими ветвями связаны друг с другом отдельные узлы графа и какова проводимость каждой ветви.

Эта информация о связях и о проводимостях может быть представлена либо в аналитическом виде — совокупностью уравнений, либо в графическом виде — схемой, на которой показаны узлы, соединяющие их ветви, и дана информация о передаче каждой ветви.

Теория графов — это учение об общих топологических свойствах графов и о вытекающих из них методах расчетов.

Теория графов представляет интерес для электриков, радистов, а также для тех, кто работает в области автоматики и телемеханики, кибернетики, теории информации. Она находит применение и в других областях техники; например, при анализе пропускной способности сложной разветвленной железнодорожной сети.

В соответствии с тем, что информация о графе может быть выражена двояко, теория графов развивалась в двух, хотя и взаимосвязанных и дополняющих друг друга, но все же достаточно самостоятельных направлениях.

В первом направлении за основу принимается информация о графе, выраженная в виде системы уравнений.

Во втором направлении за основу принимается информация о графе, выраженная в виде некоторого геометрического образа или в виде остова некоторой электрической схемы (или ее эквивалента), на которой показаны только узлы и ветви (а иногда и направление передачи по каждой ветви).

В первом направлении изучение свойств цепей производят путем использования общих свойств матриц и определителей.

Во втором направлении изучение свойств цепей производят путем применения либо ряда правил по преобразованию графов, либо (что особенно существенно) правила Мэсона (Масона).

Несмотря на то что первое направление исследования в теории графов (с использованием матричной алгебры) зародилось много раньше второго (первые работы по исследованию топологических свойств цепей путем использования свойств матриц относятся еще ко времени Кирхгофа и Максвелла), наибольшие результаты достигнуты на втором направлении.

Второе направление в теории графов начало интенсивно развиваться примерно с 1953 г.

В приложении § А. 1 — А. 10 отражены основные результаты, достигнутые во втором направлении. С основными результатами, достигнутыми в первом направлении, можно ознакомиться в § В. 3 и более полно в [20].

Второе направление в теории графов в свою очередь развивалось двумя путями: теория направленных графов (см. § А.2 — А.6) и теория ненаправленных графов (см. § А.7—А.10).

1. НАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ

§ А. 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Направленным, или линейным, графом (графом сигнала, диаграммой прохождения сигнала) называют совокупность узлов и соединяющих их ветвей, стрелки на которых указывают направление передачи сигнала (воздействия) от одного узла к другому.

Узлами в направленных графах обычно являются токи и (или) напряжения исследуемых электрических цепей, а не узловые точки этих цепей, как это имеет место в ненаправленных графах (см. § А.7—А.10). Каждая ветвь графа характери-

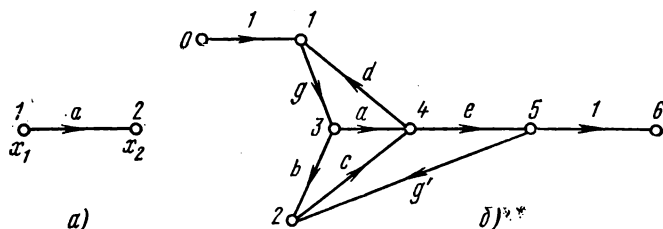


Рис. А.1

зуется величиной передачи. Под передачей ветви понимают отношение выходной величины к входной. Так, например, выходная величина x_2 ветви (рис. А.1, а) равна произведению входной величины (входного сигнала) x_1 на передачу a :

$$x_2 = ax_1.$$

Передача ветви может иметь размерность проводимости, сопротивления или нулевую размерность.

К тому или иному узлу графа, кроме входного и выходного, в общем случае может подходить и от него может уходить по несколько ветвей. На рис. А.1, б в качестве примера изображен некоторый граф с узлами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Передачи ветвей этого графа обозначены буквами a, b, c, \dots . Направление передачи указано стрелками.

Под x_1 будем понимать узловой сигнал первого узла, под x_2 — узловой сигнал второго узла и т. д.

Узловой сигнал k -го узла равен сумме сигналов, приходящих к k -му узлу. При составлении узлового сигнала k -го узла *выходящие из k -го узла сигналы не учитываются*; они учитываются при составлении узловых сигналов тех узлов, к которым эти сигналы подходят.

Так, узловой сигнал первого узла графа рис. А.1, б $x_1 = 1 \cdot x_0 + d \cdot x_3$; второго узла $x_2 = bx_3 + g'x_5$; третьего узла $x_3 = gx_1$ и т. д.

Узел графа, выражающий собой величину, принятую в изучаемой системе за входную, обычно изображают на чертеже слева, а узел графа, соответствующий выходной величине, — справа.

Принято так изображать граф, чтобы от входного узла отходила только одна ветвь, а подходящих ко входному узлу ветвей вообще не было.

Аналогично, к выходному узлу должна подходить только одна ветвь (отходящих от него ветвей не должно быть). Это всегда можно сделать, введя в граф дополнительные узлы и ветви, передачи которых равны единице. Так, в графе рис. А.1, б дополнительными узлами являются узлы 1 и 5. Между входным узлом 0 и дополнительным узлом 1 имеется ветвь с передачей 1. Аналогично, дополнительный узел 5 соединен с выходным узлом 6, ветвью с передачей, равной 1. Часто узлы, передача между которыми равна единице, обозначают одинаково. Так, например, для схемы рис. А.1, б узел 0 можно назвать узлом 1 (и тогда на рисунке будет два узла, обозначенных цифрой 1).

§ А.3. ПЕРЕХОД ОТ ИЗУЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ К НАПРАВЛЕННОМУ ГРАФУ

Для того чтобы от изучаемой системы, например какой-либо электрической цепи, перейти к соответствующему ей направленному графу, можно применять различные методы в соответствии с тем, что уравнения для этих цепей можно записывать либо на основании законов Кирхгофа, либо используя метод узловых потенциалов или метод контурных токов и т. п.

Направленный граф содержит ту же информацию, что и система уравнений. Только информация эта выражена графически.

Если за основу взять уравнения, составленные путем непосредственного применения законов Кирхгофа, то узлами графа будут являться токи ветвей и напряжения на элементах схемы.

В том случае, когда за основу взяты уравнения, составленные путем применения метода узловых потенциалов, узлы графа будут выражать собой потенциалы узловых точек схемы и искомые токи (и напряжения).

При некотором навыке граф вычерчивают, даже не записывая сами уравнения, послужившие основой для его составления.

Упорядоченный переход от заданной электрической схемы к направленному графу, минуя этап составления уравнений, рассмотрим сначала, положив в основу метод контурных токов (переход от рис. А.2 к рис. А.3, а). Выбираем направления контурных токов во всех контурах одинаково, например все по часовой стрелке. Число узлов в графе будет равно числу контурных токов плюс число не равных нулю контурных э. д. с. Каждому контурному току и каждой контурной э. д. с. соответствует свой узел. Так, для схемы рис. А.2, в которой три контурных тока I_{11} , I_{22} , I_{33} и одна контурная э. д. с., у графа рис. А.3, а четыре узла. Узлы I_{kk} располагаем в серединах соответствующих контуров, а узлы E_{kk} выносим на периферию рисунка. Соединяем нарисованные узлы ветвями, указываем на них стрелки и записываем значения передач ветвей. Каждый узел I_{kk} соединен с узлом E_{kk} ветвью с передачей

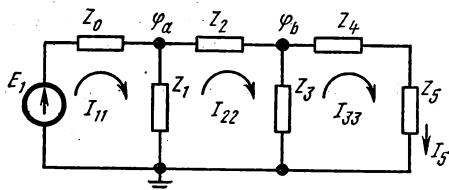


Рис. А.2

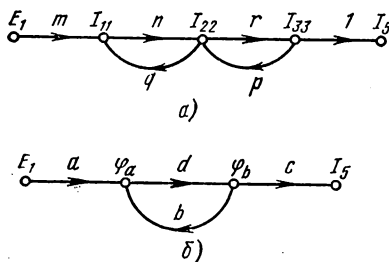


Рис. А.3

$\frac{1}{Z_{kk}}$, где Z_{kk} — собственное сопротивление k -контура. Стрелка на этой ветви направлена к узлу I_{kk} . Численное значение E_{kk} может быть и положительным и отрицательным. Оно положительно, если суммарная э. д. с. k -контура направлена согласно направлению контурного тока I_{kk} . Кроме того, каждый узел I_{kk} соединен с каким-то другим узлом I_{pp} , если между узлами k и p на схеме есть общая ветвь, двумя ветвями. Одна ветвь имеет стрелку к узлу I_{kk} и передачу $\frac{Z_{kp}}{Z_{kk}}$, где Z_{kp} — сопротивление смежной ветви между k - и p -контурами. На второй ветви стрелка направлена к узлу I_{pp} и передача ее равна $\frac{Z_{pp}}{Z_{pp}}$, где Z_{pp} — собственное сопротивление p -контура. При согласном направлении всех контурных токов передачи всех ветвей между узлами k и p положительны.

По методу узловых потенциалов граф в принципе строят так же, как и по методу контурных токов, только узлами графов будут потенциалы узлов схемы и узловые токи. Передача между узлами φ_k и φ_p будет равна проводимости смежной между этими узлами ветви, деленной на узловую проводимость всех ветвей, сходящихся соответственно в узлах k и p . Узел φ_k соединен с узлом узлового тока I_{kk} передачей

$\frac{1}{y_{kk}}$. Стрелка на ней направлена к узлу φ_k .

Пример 78. Составим граф для лестничной схемы рис. А.2, считая входной величиной э. д. с. E_1 и выходной ток I_5 . Граф рис. А.3, а составлен на основании уравнений метода контурных токов, записанных в комплексной форме:

$$\begin{aligned} I_{11}(Z_0 + Z_1) - I_{22}Z_1 &= \dot{E}_1; \\ -I_{11}Z_1 + I_{22}(Z_1 + Z_2 + Z_3) - I_{33}Z_3 &= 0; \\ -I_{22}Z_3 + I_{33}(Z_3 + Z_4 + Z_5) &= 0. \end{aligned}$$

Передачи ветвей на рис. А.3, а обозначены буквами m, n, p, q, r , где

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{Z_0 + Z_1}; & n &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \\ r &= \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5}; & q &= \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1}; \\ p &= \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}. \end{aligned}$$

Пример 79. Составить граф для схемы рис. А.2 на основании метода узловых потенциалов. Записываем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_a \left(\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) + \dot{\Phi}_b \left(-\frac{1}{Z_2} \right) &= \dot{E}_1 \cdot \frac{1}{Z_0}, \\ \dot{\Phi}_a \left(-\frac{1}{Z_2} \right) + \dot{\Phi}_b \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4 + Z_5} \right) &= 0, \\ I_5 &= \dot{\Phi}_b \cdot \frac{1}{Z_4 + Z_5}. \end{aligned}$$

На рис. А.3, б обозначено:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{1}{Z_0}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}; & b &= \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1}}; \\ c &= \frac{1}{Z_4 + Z_5}; & d &= \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4 + Z_5}}. \end{aligned}$$

Предполагается, что не равен нулю ни один из знаменателей выражений m, n, p, q, r и a, b, c, d для значений параметров схемы, находящихся в рабочем диапазоне.

Порядок расположения узлов на чертеже может быть любым (о расположении узлов входа и выхода уже говорилось), однако рекомендуется это делать таким образом, чтобы последовательность их при движении слева направо в наибольшей степени соответствовала фактическому прохождению сигнала (информации) от входа к выходу.

В зависимости от того, какие величины выбраны в качестве узлов, для одной и той же схемы граф имеет различную структуру и различную сложность. Заметим, что если в схеме имеется несколько источников сигнала (несколько источников тока или э. д. с.), то пользуются принципом наложения, т. е. сначала определяют выходную величину для графа, в котором сигнал действует от первого источника, затем определяют выходную величину для графа, в котором сигнал действует от второго источника, и т. д. После этого суммируют выражения для выходной величины.

Когда граф составлен, его используют для определения передачи от источника к стоку*. Определение передачи графа можно производить двумя способами:

1) последовательным упрощением его путем применения правил, рассмотренных в § А.4;

* Входной сигнал называют истоком, выходной — стоком.

2) применением общего выражения для определения передачи направленного графа (правила Мэсона) — см. § А.6.

Возможен и промежуточный путь, когда сначала граф частично упрощают, а затем применяют это правило.

§ А. 4. ПРАВИЛА, ИСПОЛЪЗУЕМЫЕ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ НАПРАВЛЕННЫХ ГРАФОВ

Познакомимся с операциями по упрощению графов.

1. Передача последовательно соединенных ветвей (рис. А.4, а) равна произведению передач этих ветвей (рис. А.4, б). Действительно, $x_2 = ax_1$; $x_3 = bx_2$. Подставив в последнее выражение вместо x_2 его эквивалент из предыдущего, получим $x_3 = abx_1$.

2. Передача двух параллельных, одинаковым образом направленных ветвей равна сумме передач этих ветвей (рис. А.5, а, б).

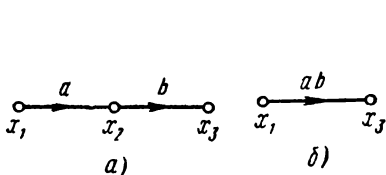


Рис. А.4

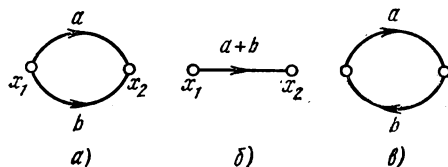


Рис. А.5

Рассмотренное преобразование не может быть применено к параллельным ветвям, стрелки на которых направлены неодинаковым образом. Так, например, это преобразование не распространяется на рис. А.5, в.

3. Устранение простой узловой точки. Условимся простой узловой точкой называть точку графа, к которой в общем случае подходят и от которой уходят несколько

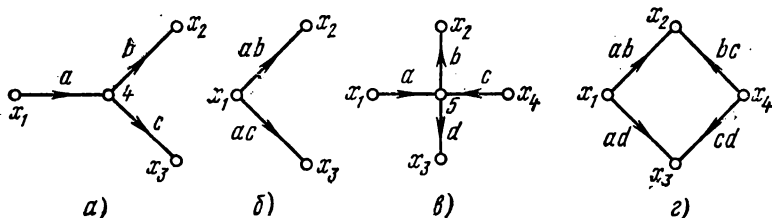


Рис. А.6

ветвей и которая не входит в петлю обратной связи. Простой узловой точкой на рис. А.6, а и в являются соответственно точки 4 и 5. Для графа рис. А.6, а:

$$x_4 = ax_1; \quad x_2 = bx_4; \quad x_3 = cx_4.$$

Следовательно,

$$x_2 = abx_1; \quad x_3 = acx_1. \quad (\text{А.1})$$

Граф рис. А.6, б эквивалентен графу рис. А.6, а. Для графа рис. А.6, в:

$$x_5 = ax_1 + cx_4; \quad x_2 = bx_5 = abx_1 + bcx_4;$$

$$x_3 = dx_5 = adx_1 + dcx_4.$$

Граф рис. А.6, г эквивалентен графу рис. А.6, в.

4. Устранение контура на пути. Граф рис. А.7, а имеет ветвь обратной связи с передачей c между узлами 3 и 2. Контур, образованный ветвями b и c , называют контуром на пути (контуром в пути). Простейшими преобразованиями этот контур

можно устранить и граф свести к рис. А.7, б. Для графа рис. А.7, а:

$$x_2 = ax_1 + cx_3; \quad x_3 = bx_2.$$

Следовательно,

$$x_3 = abx_1 + bcx_3. \quad (\text{А.2})$$

Ветвь, выходящую из некоторого узла и приходящую к этому же узлу, будем называть *петлей*.

Петля bc на рис. А.7, б соответствует слагаемому bcx_3 правой части равенства (А.2).

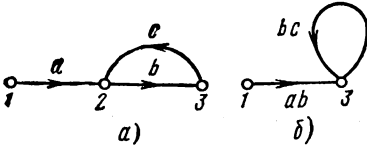


Рис. А.7

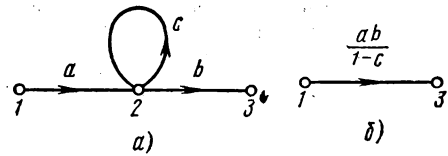


Рис. А.8

5. Исключение петли. Граф на рис. А.8, а имеет петлю с передачей c . Эту петлю можно устранить и свести граф к изображенному на рис. А.8, б. Действительно, для графа рис. А.8, а можно написать

$$x_2 = ax_1 + cx_2 \text{ и } x_3 = bx_2.$$

Из первого уравнения находим $x_2 = \frac{ax_1}{1-c}$ и, подставляя во второе, получаем

$$x_3 = \frac{ab}{1-c} x_1. \quad (\text{А.3})$$

Предполагается, что $|c| < 1$.

6. Замена двух и большего числа петель одной петлей. Петли с передачами b и c рис. А.9, а можно заменить одной петлей рис. А.9, б с передачей $b + c$. Это вытекает из следующих преобразований для схемы рис. А.9, а:

$$x_2 = ax_1 + bx_2 + cx_2 = ax_1 + (b+c)x_2.$$

Схема рис. А.9, б удовлетворяет этой строчке.

7. Удлинение (растяжение) узла.

В некоторых случаях при преобразовании графов оказывается полезным удлинить (растянуть) узел. Положим, что требуется удлинить узел 2 графа, изображенного на рис. А.10, а. С этой целью:

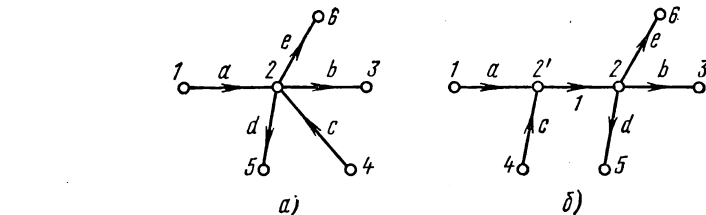


Рис. А.10

а) узел 2 подразделяют на два узла (рис. А.10, б): на старый узел 2, от которого отходят те же ветви, что и в первоначальном графе, и на новый узел 2', к которому подходят те же ветви, которые в исходном графе подходили к узлу 2;

б) узлы $2'$ и 2 соединяют ветвью, передача которой равна 1 .
 Проверим справедливость преобразования. С этой целью для исходного графа рис. А.10, а запишем узловой сигнал в узле 2:

$$x_2 = ax_1 + cx_4.$$

Узловые сигналы узлов $2'$ и 2 графа рис. А.10, б таковы:

$$x'_2 = ax_1 + cx_4 \text{ и } x_2 = 1 \cdot x'_2.$$

Таким образом, узловой сигнал в узле 2 остался без изменений. Не изменились и узловые сигналы в остальных узлах графа.

8. Инверсия пути. Ранее говорилось, что информация, содержащаяся в графе, эквивалентна информации в некоторой системе уравнений. Положим, что имеется уравнение

$$x_3 = c(ax_1 + bx_2). \quad (\text{А.3'})$$

Этому уравнению соответствует граф рис. А.11, а. В нем x_1 и x_2 являются причинами, а x_3 — следствием. Можно изменить причину и следствие, разрешив уравнение (А.3') относительно x_1 или x_2 . Так, если считать x_3 и x_2 причиной, а x_1 — следствием, то

$$x_1 = \frac{1}{ac} x_3 + \left(-\frac{b}{a}\right) x_2.$$

Последнему уравнению соответствует граф рис. А.11, б; в нем осуществлена инверсия пути по сравнению с исходным графом рис. А.11, а.

Для перехода от исходного графа к инвертированному необходимо:

- изменить направление стрелок в ветвях на противоположное *;
- изменить передачи ветвей, находящихся на пути от новой причины к новому следствию на обратные (т. е. вместо a и c взять соответственно $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$);

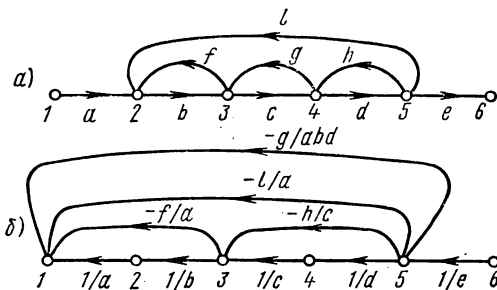


Рис. А.12

- перенести конец ветви 24 с передачей b , соединяющей узлы, не являющиеся причиной и следствием, в узел стока (в точку 1) и взять передачу этой ветви, равной $-\frac{b}{a}$.

* В ветвях, стрелки на которых и до инвертирования были направлены от нового истока к новому стоку (эти ветви составляют часть петель обратной связи), направление стрелок не меняется на противоположное — см., например, направление стрелок на ветви l рис. А.12, а и на ветви $-g/abd$ рис. А.12, б.

Пример 80. Положим, что требуется найти передачу трехкаскадного усилителя, граф которого изображен на рис. А.12, а. В усилителе имеются 4 петли обратной связи (bf , cg , dh , $bcdl$). Инвертированный граф представлен на рис. А.12, б. В нем уже нет петель обратной связи и обратная величина передачи для него находится проще, чем для исходного графа:

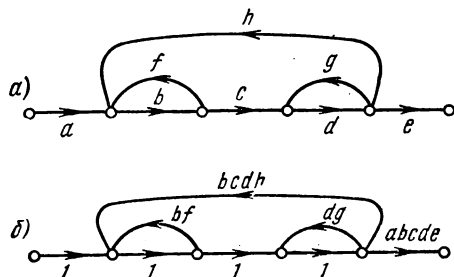


Рис. А.13

$$x_1 = \frac{1}{e} \left[\left(\frac{1}{cd} - \frac{h}{c} \right) \left(\frac{1}{ab} - \frac{f}{a} \right) - \frac{g}{abd} - \frac{l}{a} \right] x_5.$$

Обратим внимание на то, что конец ветви g перенесен из узла 3 через узел 2 в узел 1, а начало этой ветви перенесено на узел 4 в узел 5. Поэтому у передачи инвертированной ветви $-\frac{g}{abd}$ в знаменателе на-

ходится произведение передач трех ветвей, через которые переносились начало и конец этой ветви.

9. Нормирование графов. Нормирование графов представляет собой способ изменения передач отдельных ветвей графа, при котором для части ветвей передачи принимаются равными единице (нормируются), а для остальных ветвей они изменяются таким образом, что для любого пути от истока к стоку и для любой петли обратной связи результирующие передачи остаются без изменений. (Предполагалось, что для любого из этих путей ни один из узлов графа не проходится дважды.) Нормиро-

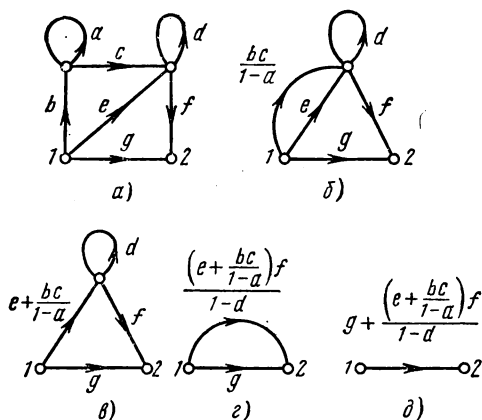


Рис. А.14

вание иллюстрируется рис. А.13. На рис. А.13, а изображен граф двухкаскадного усилителя до нормирования и на рис. А.13, б — после нормирования.

Рассмотрим определение передачи графов путем последовательного упрощения.

Первый пример иллюстрирует рис. А.14, а — б, второй — рис. А.15.

Положим, что верхняя и нижняя петли g и h на рис. А.15 отсутствуют и что имеется только петля ef .

Составим передачу от 1 к 2:

$$1 + \frac{ac + bd + afd + bec}{1 - ef}.$$

Учтя наличие верхней и нижней петель и поделив соответствующие члены на $(1 - g)$ и на $(1 - h)$, получим

$$1 + \frac{\frac{ac}{1-g} + \frac{bd}{1-h} + \frac{afd + bec}{(1-h)(1-g)}}{1 - \frac{ef}{(1-g)(1-h)}}.$$

§ А. 5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ГРАФА

В 1956 г. Мэзон предложил общую формулу для определения передачи графа. Эта формула является основной при расчете графов. Прежде чем перейти к ней, познакомимся с некоторыми новыми понятиями.

Прямой путь P — это путь вдоль стрелок от истока к стоку, при прохождении которого ни один из узлов не встречается более одного раза. *Передача прямого пути* равна произведению передач ветвей этого пути.

Между истоком и стоком графа может быть несколько прямых путей. Так, например, для схемы рис. А.16 между истоком (узел 1) и стоком (узел 2) есть два прямых пути. Первый прямой путь по ветвям с передачами a и b . Передача этого пути $P_1 = ab$. Второй прямой путь по ветвям с передачами c, e, b . Передача его $P_2 = ceb$.

Ни один из других возможных путей от узла 1 к узлу 2 в этом графе не относится к категории прямых путей. Например, путь через ветви c, f, g, e, b не является прямым путем, так как на этом пути узел 3 встречается дважды. В общей формуле необходимо учитывать также передачи петель обратной связи.

Петля обратной связи представляет собой замкнутый путь, вдоль которого (по кругу) каждый узел может встретиться только по одному разу.

Передачу петли обратной связи обозначают T с индексом. Передача петли обратной связи равна произведению передач ветвей, образующих эту петлю.

В графе на рис. А.16 три петли обратной связи: первая петля с передачей $T_1 = h$, вторая с $T_2 = fg$, третья с $T_3 = ed$.

Общая формула для определения передачи графа записывается следующим образом:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + \dots + P_n \Delta_n}{\Delta}, \quad (\text{А.4})$$

где P_k — передача k -го прямого пути от истока к стоку;

n — число прямых путей.

Определитель Δ_k равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей, не касающихся k -го прямого пути (но эти петли могут касаться друг друга), плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга и k -го прямого пути, минус сумма тройного произведения петель обратных связей, не касающихся друг друга и k -го прямого пути, плюс и т. д.

Определитель Δ равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей (касающихся и не касающихся друг друга), плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга, минус сумма тройных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга, плюс и т. д.

Пример 80а. Применим формулу (А.4) к графу, изображенному на рис. А.16. Для первого прямого пути с передачей $P_1 = ab$ множитель Δ_1 равен 1 минус сумма передач петель обратной связи, взятых поодиночке и не касающихся этого прямого пути ($T_1 + T_2$), плюс попарное произведение передач петель обратной связи, не касающихся друг друга и выбранного прямого пути. В графе рис. А.16 отсутствуют петли, которые бы не касались друг друга и не касались первого прямого пути. Поэтому слагаемое с попарным произведением передач петель обратной связи, как и взятых по трое (и более), в выражении для Δ_1 будут отсутствовать.

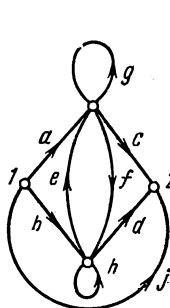


Рис. А.15

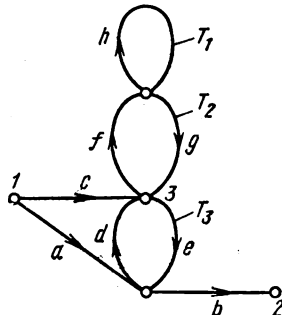


Рис. А.16

Следовательно,

$$\Delta_1 = 1 - (T_1 + T_2) \quad (T_1 = h, \quad T_2 = fg).$$

Для второго прямого пути

$$P_2 = ceb, \quad \Delta_2 = 1 - T_1.$$

Знаменатель

$$\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3 \quad (T_3 = ed).$$

В выражение для Δ вошло произведение передач T_1 и T_3 двух непересекающихся петель графа.

Таким образом,

$$G = \frac{ab(1 - T_1 - T_2) + ceb(1 - T_1)}{1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3}. \quad (\text{A.5})$$

§ А.6. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ГРАФА *

Вывод формулы (А.4) дадим, следуя [16].

Положим, что граф имеет n узлов. Для любого (k -го) узла справедливо уравнение

$$x_k = f_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (\text{A.6})$$

где x_k — переменная линейного графа или независимая переменная.

Обозначим проводимость ветви, соединяющей произвольным образом выбранные узлы j и k , через t_{jk} . Матрица проводимостей ветвей графа будет иметь порядок n ; ее записывают следующим образом:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Элементами матрицы являются производные

$$t_{jk} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \quad (\text{A.8})$$

Все элементы k -строки будут нулями, если x_k — независимая переменная.

Матрицу-столбец, составленную из переменных x_1, x_2, \dots, x_n , обозначим через $[X]$:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Единичную матрицу порядка n назовем $[U]$:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Обозначим матрицу-столбец независимых переменных через $\Phi_k = x_k - f_k$. Систему уравнений, выражаемую графом, записывают так:

$$[U - T][X] = [\Phi], \quad (\text{A.11})$$

* При первом чтении § А.6 можно опустить.

где

$$[U - T] = \begin{bmatrix} 1 - t_{11} & -t_{21} & \dots & -t_{n1} \\ -t_{12} & 1 - t_{22} & \dots & -t_{n2} \\ -t_{13} & -t_{23} & \dots & -t_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & \dots & 1 - t_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Введем систему уравнений, матрица которой $[A] = [U - T]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Из линейной алгебры известно, что определитель Δ матрицы $[A]$ может быть записан следующим образом:

$$\Delta = \sum (-1)^{I+I'} (a_{\alpha\alpha'}, a_{\beta\beta'}, a_{\gamma\gamma'}, a_{nn'}). \quad (\text{A.14})$$

Каждый член суммы содержит n множителей. У каждого множителя имеется по два индекса. Первый индекс соответствует строке, второй — столбцу.

I означает число инверсий чисел $1, 2, \dots, n$ в последовательности обозначений $\alpha, \beta, \gamma, \dots, n$ для первого индекса.

I' означает число инверсий чисел $1, 2, \dots, n$ в последовательности $\alpha', \beta', \gamma', \dots, n'$ для второго индекса.

Напомним, что инверсией индексов называют такое чередование индексов rs , при котором $r > s$. При подсчете общего числа инверсий данного (например, первого) индекса надо сложить все инверсии, которые образуются при переходе от исходной цифры этого индекса ко всем последующим. Так, положим, что какой-то индекс, например первый, имеет чередования $4\ 6\ 1\ 3\ 5\ 2$. Так как за цифрой 4 в этой последовательности следуют цифры 1, 3, 2, меньшие 4, то это дает первые три инверсии. За цифрой 6 находятся 4 цифры 1, 3, 5, 2, меньшие 6, — еще 4 инверсии. Все цифры, стоящие справа от 1, больше 1, поэтому по отношению к индексу 1 инверсии отсутствуют. За цифрой 3 находится цифра 2 — 1 инверсия; за цифрой 5 находится цифра 2 — еще 1 инверсия. Итого в последовательности $4\ 6\ 1\ 3\ 5\ 2$ имеется $3 + 4 + 1 + 1 = 9$ инверсий.

Вспомним также, что замкнутой последовательностью двух индексов называют такую последовательность индексов, в которой второй индекс у последнего члена принимает то же значение, с которого начал изменяться индекс первого члена.

Запишем возможные комбинации чередования индексов, образующих замкнутые последовательности:

$$ij, jk, kl, lx, \dots, yp, pi; \quad (\text{A.15})$$

$$ij, ji, \dots, nm, mp, pn, \dots, qi, \dots, lq. \quad (\text{A.16})$$

В комбинации (A.15) замкнутая последовательность образована n множителями.

Первый индекс в ней начал изменяться со значения i , а второй — со значения j .

Последовательность является замкнутой, так как у последнего члена второй индекс принимает то же значение i , с которого начал изменяться индекс первого члена.

Как уже говорилось, I — число инверсий первого индекса, I' — число инверсий второго индекса.

Для последовательности (A.15) число инверсий второго индекса на $n - 1$ больше числа инверсий первого индекса. Действительно, первый индекс в (A.15) имеет нуль инверсий. Второй индекс в (A.15) претерпевает $n - 1$ инверсий, поскольку более старшие индексы j, k, l, x, \dots, p (а их число равно $n - 1$) расположены до младшего индекса i .

Следовательно, $I' - I = n - 1$.

Множители в чередовании (A.16) разделены на k групп. Первая группа состоит из $d_1 = 2$ множителей; вторая группа — из $d_2 = 3$ множителей; последняя k -я

группа — из $k + 1$ множителей. Количество всех множителей в (A.16) равно порядку определителя, т. е. равно n . Поэтому $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k = n$. Для каждой из групп множителей справедлива формула $I' - I = d - 1$. Найдем, насколько различаются I' и I для всей последовательности (A.16), имеющей k групп:

$$I' - I = d_1 - 1 + d_2 - 1 + d_3 - 1 + \dots + d_k - 1 = (d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k) - k = n - k$$

или

$$I' = I + n - k. \quad (\text{A.17})$$

В произведении типа (A.16) могут быть множители, имеющие одинаковые индексы, например mm . Каждый такой множитель можно рассматривать как группу, состоящую из одного члена. Для такой группы $d = 1$ и $I' = I = 0$, т. е. для этой группы выполняется то же условие $I' - I = d - 1$, что и для любой другой группы в (A.16).

При определении знака каждого слагаемого в (A.14) следует учесть, что при любом числе k инверсия в $2k$ не скажется на знаке, так как $(-1)^{2k} = 1$. Поэтому в правую часть (A.17) можно добавить $2k$. Тогда

$$I' = I + n + k. \quad (\text{A.17'})$$

Распространим полученный результат на определитель матрицы (A.12). При раскрытии определителя матрицы (A.12) имеем дело с произведениями множителей двух типов. Первый тип множителя — это $1^n = 1$; второй тип — произведение n отрицательных множителей вида $-t_{ij}$. Таким образом, для матрицы (A.12) знак перед каждым слагаемым определителя зависит от знака произведения $(-1)^{I+I'} \times (-1)^n$, т. е. знак перед каждым слагаемым второго типа определяется значением $I + I' + n$. Но с учетом (A.17')

$$(-1)^{I+I'+n} = (-1)^{I+I+n+k+n} = (-1)^{2(I+n)+k} = (-1)^k. \quad (\text{A.18})$$

Следовательно, знак перед каждым слагаемым второго типа определяется числом k групп замкнутых в нем последовательностей.

Множители второго типа могут быть нескольких разновидностей. Первую разновидность образуют замкнутые последовательности по типу (A.15). В каждой из них только одна последовательность чередования индексов ($k=1$). Поэтому перед каждым слагаемым этой разновидности в соответствии с формулой (A.18) следует поставить знак минус. Вторую разновидность образуют произведения множителей в виде двух замкнутых последовательностей чередования индексов ($k=2$). Перед каждым слагаемым этой разновидности должен быть поставлен знак плюс $(-1)^2 = 1$. Третью разновидность образуют произведения множителей с тремя ($k=3$) замкнутыми последовательностями чередования индексов и т. д.

Таким образом,

$$\Delta = 1 - \sum M_1 + \sum M_2 - \sum M_3 + \dots$$

Положим, что выходным сигналом является выходной сигнал второго узла x_2 , а входным — сигнал x_1 первого узла. Воздействия на остальные узлы равны нулю. Для нахождения x_2 следует составить выражение

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\Delta}. \quad (\text{A.19})$$

Разложим числитель (A.19) на слагаемые. Каждое из них после перегруппировки множителей будет иметь вид

$$x_1 t_{1k} t_{ki} t_{i2} \dots t_{rr} \dots t_{ps} t_{sq} t_{qp}$$

и может быть записано в виде $x_1 P_k \Delta_k$.

Здесь x_1 — входной сигнал;

P_k — произведение множителей, индексы которых такие, что первый индекс у первого множителя 1, а второй индекс у последнего множителя 2.

Следовательно, P_k представляет собой передачу прямого пути из узла 1 в узле 2. Δ_k представляют собой множители, индексы которых не содержат цифр 1 и 2 (индексов входного и выходного узлов) и всех тех цифр, которые встречаются в индексах у множителей P_k .

После перегруппировки множители Δ_k представляют собой замкнутые последовательности, у которых первый индекс первого множителя и второй индекс последнего множителя одинаковы.

Это означает, что все Δ_k будут представлять собой передачи замкнутых петель, не касающихся прямого пути P_k между входным и выходным узлами.

Окончательно

$$x_2 = x_1 \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}. \quad (\text{A.20})$$

Формулу (A.20) в литературе иногда называют *топологическим законом передачи*.

II. НЕНАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ

§ A.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА

Ненаправленный граф представляет собой топологическое изображение самой электрической схемы. Узлы и ветви этого графа соответствуют узлам и ветвям исходной электрической схемы. В ненаправленных графах в отличие от направленных стрелок на ветвях не ставят. Свойства ветвей характеризуют их проводимости. Передачи ветвей, имеющие размерность проводимости, в дальнейшем обозначены латинскими буквами a, b, c, \dots . Поскольку каждой планарной электрической цепи соответствует некоторая дуальная ей цепь, то каждому ненаправленному графу, соответствующему планарной электрической цепи, может соответствовать дуальный ему граф. При работе с ненаправленными графами основной является формула

$$\frac{I}{B_{mn}} = \frac{1}{\Delta} \sum C_r \Delta_r^*. \quad (\text{A.21})$$

Правая часть ее по структуре полностью аналогична формуле Мэсона (A.4) для направленных графов.

Формула (A.21) используется для нахождения входного сопротивления (входной проводимости), взаимной проводимости ветвей и др.

Здесь I — ток, протекающий по некоторой выбранной ветви графа, по отношению к которой и определяется входная или взаимная проводимость;

B_{mn} — напряжение (или ток) источника питания схемы, присоединенного зажимами к узлам m и n ;

C_r — произведение проводимостей ветвей пути между узлами m и n , проходящего по выбранной ветви;

Δ_r — определитель для системы, полученной из исходной при коротком замыкании (закорачивании) ветвей выбранного пути C_r .

Число членов $C_r \Delta_r$ в числителе формулы (A.21) равно числу возможных путей между узлами m и n графа. В это число не входит путь от m к n через источник питания схемы.

Δ — определитель исходной электрической схемы. Он мог бы быть получен как определитель матрицы проводимостей ветвей схемы, составленной, например, по методу узловых потенциалов.

* Произведение $C_r \Delta_r$ часто обозначают и иначе, например $P_k \Delta_k$ [см. формулу (A.20)] или $P'_k \Delta'_k$. Если это произведение обозначают как $P'_k \Delta'_k$, то слагаемые определителя знаменателя формулы (A.21), т. е. слагаемые Δ , обозначают как $P_k \Delta_k$.

В общем случае роль I в формуле (A.21) может выполнять не только ток, но и напряжение.

Однако такой способ нахождения Δ обычно не употребляется ввиду его громоздкости и излишней трудоемкости. Так, при вычислении Δ путем раскрытия определителя упомянутой матрицы пришлось бы иметь дело с большим количеством слагаемых, часть из которых имела бы одинаковые абсолютные значения, но разные знаки (эти слагаемые соответствуют так называемым избыткам в каждой строке определителя).

Для того чтобы не производить лишней работы, пользуются двумя укороченными (усовершенствованными) способами нахождения Δ . Первый из них основан на разложении определителя Δ по некоторому произвольно выбранному узлу схемы; второй — на разложении определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами.

§ А. 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ПРОИЗВОЛЬНО ВЫБРАННОМУ УЗЛУ

Положим, что к некоторому узлу s подходит n ветвей с проводимостями $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Определитель раскрывается по узлу при помощи формулы

$$\Delta = \sum a_i \Delta_i + \sum a_i a_j \Delta_{ij} + \sum a_i a_j a_k \Delta_{ijk} + \dots + a_i a_j a_k \dots a_n \Delta_{ijnk} \dots n. \quad (\text{А.22})$$

Здесь

$$\sum a_i \Delta_i = a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + a_3 \Delta_3 + \dots + a_n \Delta_n;$$

Δ_k — определитель, получающийся из определителя исходной схемы путем закорачивания ветви a_k и исключения всех остальных ветвей, подходящих к узлу s (т. е. при холостом ходе всех остальных ветвей этого узла);

$$\sum a_i a_j \Delta_{ij} = a_1 a_2 \Delta_{12} + a_1 a_3 \Delta_{13} + a_2 a_3 \Delta_{23} + \dots;$$

Δ_{kr} — определитель, получающийся из определителя исходной системы при одновременном закорачивании ветвей a_k и a_r и исключении из схемы (холостом ходе) всех остальных ветвей, подходящих к узлу s ;

$$\sum a_i a_j a_k \Delta_{ijk} = a_1 a_2 a_3 \Delta_{123} + a_1 a_2 a_4 \Delta_{124} + \dots;$$

Δ_{ijk} — определитель, получающийся из определителя исходной схемы при одновременном закорачивании ветвей i, j, k и при исключении (холостом ходе) всех остальных ветвей, подходящих к узлу, s , по которому производится разложение.

Множитель $\Delta_{i \dots n}$ у последнего слагаемого правой части формулы (А.22) представляет собой определитель схемы при одновременном закорачивании всех ветвей, подходящих к узлу s .

§ А. 9. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ПУТЯМ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОИЗВОЛЬНО ВЫБРАННЫМИ УЗЛАМИ

В качестве узлов следует выбирать узлы, по отношению к которым схема в геометрическом смысле наиболее симметрична. Это упрощает подсчеты. Разложение определителя Δ по этому методу производят при помощи формулы

$$\Delta = \sum P_k \Delta_k, \quad (\text{А.23})$$

где P_k — произведение проводимостей k -го пути между выбранными узлами;

Δ_k — минор k -го пути, подсчитанный по схеме, полученной из исходящей при закорачивании ветвей, по которым проходит k -й путь.

Пример 81. Найдем определитель Δ двумя методами для одной и той же мостовой скрещенной схемы рис. А.17, а. Сначала найдем Δ путем разложения по узлу 1. К этому узлу подходят три ветви $[a, d, f$ вместо a_1, a_2, a_3 в формуле (А.22)], поэтому

$$\Delta = a \Delta_a + d \Delta_d + f \Delta_f + a f \Delta_{af} + a d \Delta_{ad} + d f \Delta_{df} + a d f \cdot 1.$$

Δ_a находим для подграфа рис. А.17, б. Он получен из графа рис. А.17, а путем закорачивания ветви a и размыкания ветвей d и f . $\Delta_a = ce + cb + eb$ (попарное произ-

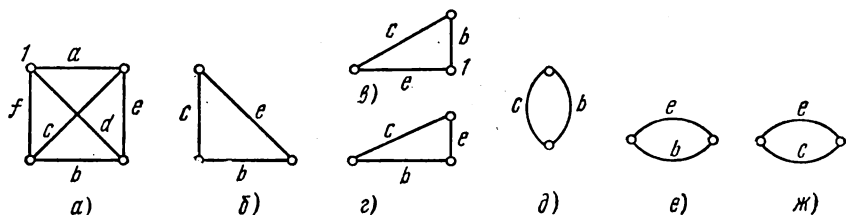


Рис. А.17

ведение проводимостей ветвей см. § А.11). Для определения Δ_d служит рис. А.17, в и для определения Δ_f — рис. А.17, г:

$$\Delta_d = \Delta_f = \Delta_a.$$

В соответствии с рис. А.17, д, е, ж

$$\Delta_{ad} = b + c; \Delta_{af} = b + e; \Delta_{df} = c + e; \Delta_{adf} = 1.$$

Таким образом,

$$\Delta = (a + d + f)(ce + cb + be) + ad(b + c) + af(b + e) + df(c + e) + adf. \quad (a)$$

Теперь найдем Δ для схемы рис. А.17, а разложением по путям между узлами 1 и 4 (зачерненные кружки на рис. А.18, а). На рис. А.18, б, в, г, д, е показаны пять возможных путей между узлами 1 и 4 и соответствующие им подсхемы (подграфы) для нахождения Δ_k .

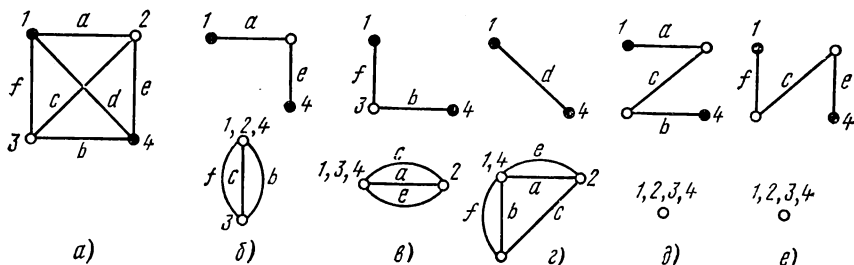


Рис. А.18

Для первого пути по ветвям a и e P_1 равно произведению проводимостей ветвей этого пути: $P_1 = ae$. При закорачивании ветвей a и e подграф будет представлять собой параллельное соединение ветвей f, c, b . Следовательно, $\Delta_1 = f + c + b$.

Для второго пути (рис. А.18, в) по ветвям f, b

$$P_2 = fb, \Delta_2 = a + e + c.$$

Для третьего пути по ветви d (рис. А.18, г)

$$P_3 = d; \Delta_3 = (a + e)c + (a + e)(f + b) + c(f + b).$$

Для четвертого пути по ветвям a, c, b (рис. А.18, д)

$$P_4 = acb;$$

$\Delta_4 = 1$, так как при закорачивании ветвей a, c, b граф вырождается в точку.

Для пятого пути по ветвям f, c, e (рис. А.18, e)

$$P_5 = fce, \Delta_5 = 1.$$

Таким образом,

$$\Delta = \sum P_k \Delta_k = ae(f+c+b) + fb(a+e+c) + d[(a+e)c + (a+e)(f+b) + (f+b)c] + acb + fce. \quad (6)$$

Результаты подсчета Δ обоими методами совпадают.

§ А. 10. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ

Как говорилось в § А.7, формулу (А.21) применяют для определения входной и взаимной проводимостей, передачи по току, передачи по напряжению и др.

Рассмотрим вопрос о том, как ею следует пользоваться. Обозначим через m и n узлы графа, к которым присоединяется ветвь, содержащая источник питания схемы. В дальнейшем будем полагать, что источником питания является либо источник э. д. с., либо источник тока, поскольку к ним можно свести любой реальный источник питания. Кроме того, будем полагать, что источник питания только один. Если же источников питания будет несколько, то надо будет воспользоваться принципом наложения, последовательно находя искомую величину от действия каждого из источников, учитывая при подсчетах внутренние сопротивления последних.

Под B_{mn} в формуле (А.21) подразумевается либо величина напряжения источника питания E_{mn} , если в качестве последнего взят источник э. д. с., либо ток I_{mn} источника тока, если в качестве источника питания схемы взят источник тока. В качестве тока I в числителе левой части формулы (А.21) берут ток по той ветви, по отношению к которой надо найти искомую величину. Так, если надо найти передачу от источника питания к некоторой s -й ветви, то под I понимают ток в s -й ветви.

Число слагаемых в числителе формулы (А.21) равно числу возможных путей между узлами m и n , причем каждый из них должен проходить по выбранной s -й ветви (как уже говорилось, путь через источник питания не учитывают).

В сумму $\sum C_r \Delta_r$ часть слагаемых может входить со знаком плюс, часть со знаком минус, так как C_r может иметь знак либо плюс, либо минус. Для того чтобы определить, какой знак будет иметь C_r , руководствуясь следующим: произвольно выбирают положительное направление вдоль ветви s (ставят стрелку на ветви s). Если при прохождении пути C_r пройдем по ветви s согласно с положительным направлением этой ветви (по стрелке на ветви s), то это C_r берется со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

Вычисляя определитель системы Δ , следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания схемы. При питании схемы от источника э. д. с. Δ подсчитывают при закороченных узлах mn (внутреннее сопротивление источника э. д. с. равно нулю). При питании схемы от источника тока ветвь mn , в которой включен источник, при подсчете Δ разрывают.

Пример 82. Определим взаимную проводимость ветви с источником э. д. с. (подключенной к узлам mn) и ветви с проводимостью e — см. рис. А.19, а. Для учета знака C_r примем за положительное направление ветви e , указанное стрелкой. Тогда

$$\frac{I_e}{E_{вх}} = \frac{\sum C_r \Delta_r}{\Delta}.$$

В графе есть два пути между узлами m и n , которые проходят через ветвь e .

Первый путь изображен на рис. А.19, б: $C_1 = aeb$. Этот путь берется со знаком плюс, так как при прохождении его по ветви e проходим согласно с направлением стрелки в ветви e . Поскольку при закорачивании ветвей a, e, b (ветвей этого пути) граф вырождается в точку, то $\Delta_1 = 1$.

Второй путь C_2 проходит по ветвям d, e, c (рис. А.19, в). Так как при прохождении этого пути по ветви e проходим встречно стрелке в этой ветви (ср. рис. А.19, б и в), то $C_2 = -dec$. При закорачивании ветвей d, e, c граф вырождается в точку, поэтому $\Delta_2 = 1$.

Для нахождения определителя системы Δ закорачиваем узлы m и n (схема питания от источника э. д. с.) и получаем граф рис. А.19, г. От последнего переходим к графу рис. А.19, д.

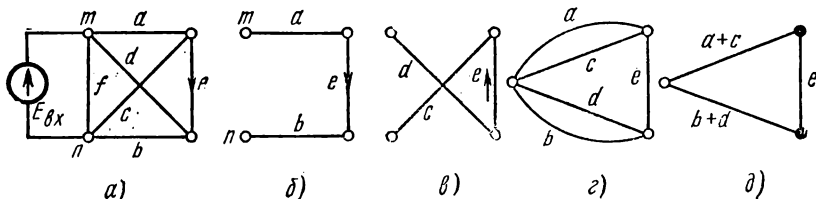


Рис. А.19

Для вычисления Δ графа рис. А.19, д воспользуемся разложением его по путям между жирно нарисованными точками. Между этими точками два пути: первый — по ветви e , второй — по ветвям $(a+c)$, $(b+d)$; поэтому $\Delta = e(a+c+b+d) + (a+c)(b+d) \cdot 1$.

Таким образом,

$$\frac{I_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} = \frac{C_1 \Delta_1 + C_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{aeb - dec}{e(a+c+b+d) + (a+c)(b+d)}. \quad (\text{А.24})$$

Для нахождения коэффициента передачи схемы рис. А.19, а по напряжению между входной ветвью (ветвью с источником э. д. с. между узлами m и n) и выходной (e) воспользуемся тем, что выходное напряжение на зажимах ветви e равно току $I_{\text{вых}}$ ветви e , деленному на проводимость этой ветви.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{U_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} &= K_u = \frac{I_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} = \\ &= \frac{ab - dc}{e(a+b+c+d) + (a+c)(b+d)}. \end{aligned}$$

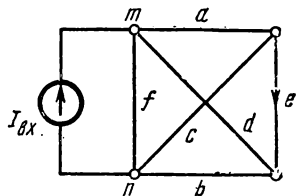


Рис. А.20

Пример 83. Рассмотрим, какие изменения произошли бы в вычислениях, если бы та же схема питалась не от источника э. д. с., а от источника тока (рис. А.20) и требовалось бы найти передачу по току к ветви e и отношение напряжения на выходе (на ветви e) к входному току. Выходной ветвью по-прежнему является ветвь e , по ней протекает ток $I_{\text{вых}}$. Положительное направление для прохождения по этой ветви (см. стрелку) то же, что и в примере 82.

В отличие от примера 82 входной величиной является теперь входной ток $I_{\text{вх}}$. Поэтому

$$\frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{\sum C_r \Delta_r}{\Delta}. \quad (\text{А.25})$$

Числитель правой части выражения (А.25) такой же, как и числитель правой части формулы (А.24). Определитель Δ в (А.25) отличен от определителя Δ в (А.24) за счет того, что для формулы (А.24) он подсчитывается при питании схемы от источника э. д. с., тогда как в рассматриваемом случае он должен быть подсчитан при питании схемы от источника тока. Для подсчета в этих условиях ветвь с источником тока следует считать разомкнутой. Определитель Δ для этого случая был подсчитан ранее [см. формулу (а) в § А.9]. Поэтому

$$\frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{aeb - dec}{(a+d+f)(ce+cb+be) + ad(b+c) + af(b+e) + df(c+e) + adf}.$$

Отношение выходного напряжения на ветви e к входному току

$$\frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{\frac{I_{\text{вых}}}{e}}{I_{\text{вх}}} = \frac{ab - dc}{(a+d+f)(ce+cb+be) + ad(b+c) + af(b+e) + df(c+b) + adf}.$$

Для определения входной проводимости схемы, питающейся от источника э. д. с. в числителе формулы (А.21) должны быть учтены все возможные пути между узлами m и n (путь через источник э. д. с. исключается). Так, например, для вычисления

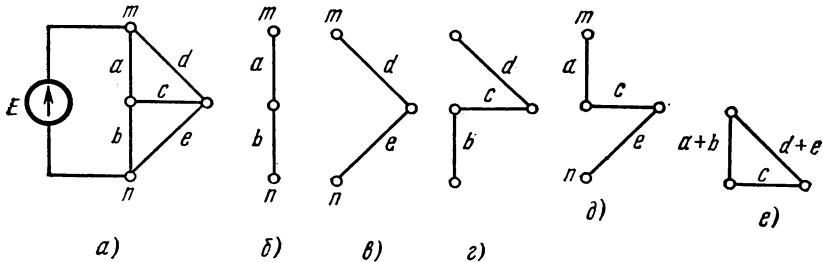


Рис. А.21

входной проводимости схемы рис. А.21, a в числителе формулы (А.21) должно быть взято четыре слагаемых в соответствии с тем, что возможны четыре пути между узлами m и n (см. рис. А.21, б, в, г, д):

$$\frac{I_{\text{вх}}}{E_{\text{вх}}} = \frac{\sum C_r \Delta_r}{\Delta} = \frac{ab(d+c+e) + de(a+c+b) + dc b \cdot 1 + ace \cdot 1}{(a+b)(d+e) + (a+b)c + (d+e)c}.$$

Все C_r в числителе со знаком плюс, потому что направления всех четырех путей взяты в виде продолжения по часовой стрелке направления входного тока. Определитель Δ (схема питается от источника э. д. с.) подсчитан в соответствии с А.21, е.

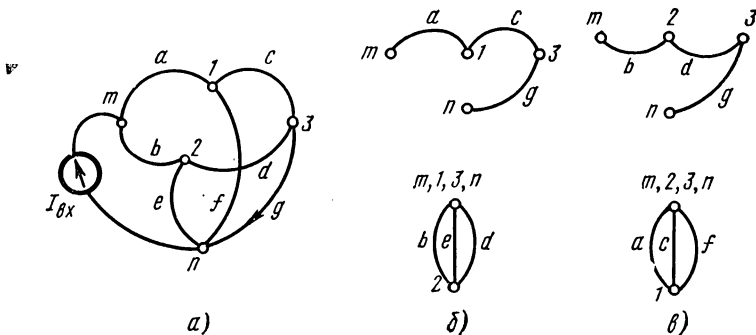


Рис. А.22

Пример 84. Найдем передачу по току в двойном Т-мосте, изображенном на рис. А.22, а. Схема питается от источника тока $I_{\text{вх}}$. Выходной ветвью является ветвь g . По ней протекает ток $I_{\text{вых}}$, положительное направление которого показано стрелкой.

На рис. А. 22, б и в показаны два пути C_1 и C_2 с передачами $C_1 = acg$ и $C_2 = bdg$ и соответствующие им подграфы для нахождения миноров $\Delta_1 = b + e + d$ и $\Delta_2 = a + c + f$.

Определитель графа Δ рис. А.23, а найдем по методу разложения его по ветвям между двумя узлами 1 и 2 (зачернены). Между этими узлами имеются пять путей в соответствии с рис. А.23, б, в, г, д, е.

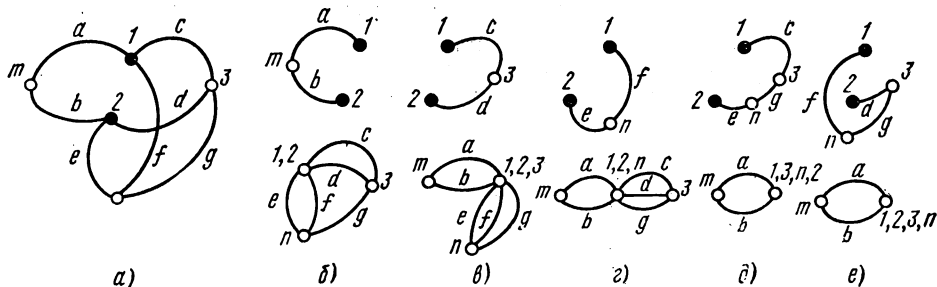


Рис. А.23

Подграфы этих путей изображены на тех же рисунках. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} &= \frac{C_1 \Delta_1 + C_2 \Delta_2}{\Delta} = \\ &= \frac{acg(b+e+d) + bdg(a+c+f)}{ab[(e+f)g + (e+f)(c+d) + (c+d)g] + cd(a+b)(e+f+g) + \dots} \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \frac{acg(b+e+d) + bdg(a+c+f)}{+ef(a+b)(c+d+g) + cge(a+b) + fgd(a+b)}. \end{aligned}$$

§ А.11. ПОНЯТИЕ О ДЕРЕВЕ И О ВЕЛИЧИНЕ ДЕРЕВА

В топологии применяют два термина, до сих пор не упоминавшиеся, — дерево и величина дерева. Под *деревом* понимают совокупность ветвей, которые касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Из одного и того же графа можно образовать несколько деревьев. Так, для простейшего графа рис. А.24, а

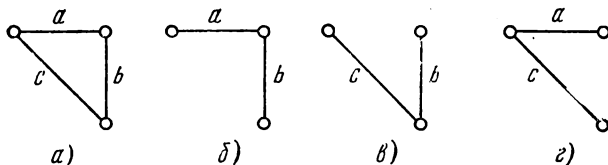


Рис. А.24

образуемые из него деревья изображены на рис. А.24, б, в, г. *Величиной дерева* называют произведение проводимостей ветвей этого дерева. Величина дерева рис. А.24, б равна ab , величина дерева рис. А.24, в — bc , величина дерева рис. А.24, г — ac . Сумма величин всех возможных для данного графа деревьев равна определителю Δ графа. Остальные ветви графа, не вошедшие в данное дерево, называют *хордами*.

В заключение отметим следующее:

1. В направленных и в ненаправленных графах расчет состоит из простых и наглядных операций, в которых при известном навыке мала вероятность ошибки.
2. По сравнению с обычными алгебраическими методами решения систем уравнений решение при помощи графов дает некоторую экономию времени.
3. При составлении определителя системы Δ ненаправленного графа отпадает необходимость подсчитывать взаимно уничтожающие друг друга слагаемые, которые

появляются при раскрытии определителя Δ матрицы проводимостей системы уравнений, составленных по методу узловых потенциалов.

4. Сопоставим направленные и ненаправленные графы.

Преимущество направленных графов — это простота нахождения передачи по формуле (А.4). Однако, поскольку граф в готовом виде не задан, сначала надо построить граф.

Преимущество ненаправленных графов в том, что не требуется составлять никаких уравнений и строить граф (так как графом является сама электрическая схема); однако определение передачи по формуле (А.21) требует несколько больше времени, чем применение формулы (А.4).

Приложение Б

ДУАЛЬНЫЕ ЦЕПИ

§ Б.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Две электрические цепи называют дуальными, если закон изменения контурных токов в одной из них подобен закону изменения узловых потенциалов в другой*.

В качестве простейшего примера на рис. Б.1 изображены две дуальные цепи.

Схема рис. Б.1, а состоит из источника э. д. с. \dot{E} и последовательно с ним включенных активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (R , L , C).

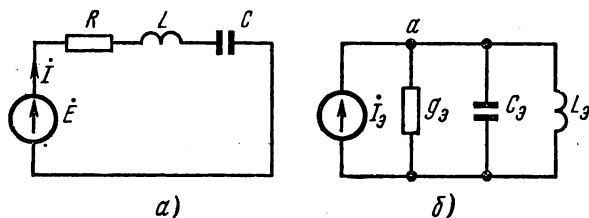


Рис. Б.1

Схема рис. Б.1, б состоит из источника тока \dot{I}_3 и трех параллельных ветвей. Первая ветвь содержит активную проводимость g_3 , вторая — емкость C_3 , третья — индуктивность L_3 .

Для того чтобы показать, какого рода соответствие имеет место в дуальных цепях, составим для схемы рис. Б.1, а уравнение по методу контурных токов:

$$\dot{I} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{E}, \quad (\text{Б.1})$$

а для схемы рис. Б.1, б — по методу узловых потенциалов**, обозначив потенциал точки а через ϕ_a :

$$\dot{\phi}_a \left(g_3 + \frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_3 \right) = \dot{I}_3. \quad (\text{Б.2})$$

Если параметры схемы рис. Б.1, б (т. е. g_3 , L_3 и C_3) согласовать с параметрами схемы Б.1, а (т. е. с R , L и C) таким образом, что

$$\frac{R}{g_3} = \frac{L}{C_3} = \frac{L_3}{C} = k, \quad (\text{Б.3})$$

* Здесь рассмотрены вопросы дуальности только для таких цепей, которые путем изменения их начертания могут быть изображены на плоскости без взаимного пересечения ветвей (такие цепи называют *планарными*)

** Потенциал второго узла схемы рис. Б.1, б принят равным нулю.

где k — некоторое произвольное число, ом^2 , то

$$g_3 + \frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_3 = \frac{R}{k} + \frac{1}{kj\omega C} + \frac{j\omega L}{k} = \frac{1}{k} \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right). \quad (\text{Б.4})$$

С учетом равенства (Б.4) перепишем уравнение (Б.2) следующим образом:

$$\dot{\varphi}_a \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = k \dot{I}_3. \quad (\text{Б.5})$$

Из сопоставления уравнений (Б.5) и (Б.1) следует, что если ток I_3 источника тока в схеме рис. Б.1, б будет изменяться с той же угловой частотой, что и э. д. с. \dot{E} в схеме рис. Б.1, а, и численно будет равен \dot{E} , а параметры обеих схем согласованы в соответствии с уравнением (Б.3), то при $k = 1 \text{ ом}^2$ закон изменения во времени потенциала $\dot{\varphi}_a$ в схеме рис. Б.1, б будет совпадать с законом изменения во времени тока I в схеме рис. Б.1, а.

Если свойства какой-либо из схем изучены, то они полностью могут быть перенесены на дуальную ей схему.

Между входным сопротивлением $Z_{\text{исх}}$ исходного двухполюсника и входной проводимостью $Y_{\text{дуал}}$ дуального ему двухполюсника существует соотношение $Z_{\text{исх}} = k Y_{\text{дуал}}$.

Из формулы (Б.4) получаем соотношение между частотной характеристикой чисто реактивного исходного двухполюсника $X_{\text{исх}}(\omega)$ и частотной характеристикой дуального ему тоже чисто реактивного двухполюсника $b_{\text{дуал}}(\omega)$. Действительно, так как $Z_{\text{исх}} = jX_{\text{исх}}(\omega)$, а $Y_{\text{дуал}} = -jb_{\text{дуал}}(\omega)$, то $X_{\text{исх}}(\omega) = -kb_{\text{дуал}}(\omega)$, т. е. частотная характеристика дуального двухполюсника получается из частотной характеристики исходного путем опрокидывания ее относительно оси ω и умножения на масштабный множитель k .

Каждому элементу исходной схемы (схемы с источниками э. д. с. E и параметрами R, L, C) отвечает свой элемент эквивалентной дуальной схемы (схемы с источниками тока I_3 и параметрами g_3, C_3, L_3).

§ Б. 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНОЙ СХЕМЫ В ДУАЛЬНУЮ

Каждому независимому контуру исходной схемы (а также области, являющейся внешней по отношению к схеме) соответствует свой узел дуальной схемы.

Если в какой-либо ветви исходной схемы, являющейся смежной между двумя контурами, имеется n последовательно включенных элементов, то этой ветви соответствует n параллельных ветвей, соединяющих узлы дуальной схемы, которые отвечают этим контурам.

Так, источнику э. д. с. E исходной схемы (рис. Б.2, а) отвечает в дуальной схеме источник тока I_3 (рис. Б.2, б), а источнику тока — источник э. д. с.; активному сопротивлению R — проводимости g_3 ; индуктивности L — емкости C_3 ; емкости C — индуктивности L_3 .

Для преобразования исходной схемы в дуальную поступают следующим образом.

Внутри каждого независимого контура (и во внешней области) ставят точки и называют их. Эти точки будут являться узлами эквивалентной дуальной схемы.

В схеме рис. Б.3, а три независимых контура, поэтому внутри них ставим точки 1, 2, 3 (точка 1 соответствует первому контуру, точка 2 — второму, точка 3 — третьему).

Во внешней по отношению к схеме области ставим точку 4. Между полученными четырьмя узлами проводим пунктирные линии — ветви дуальной схемы. Эти линии

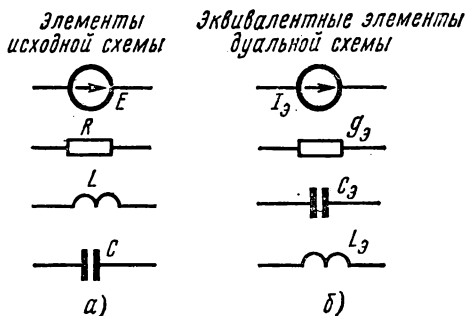


Рис. Б.2

проводим через элементы исходной схемы (через R, L, C, E) и в дуальной схеме рис. Б.3, б включаем в них соответствующие эквиваленты.

Узел 1 рис. Б.3, а соединен с узлом 4 одной пунктирной линией, так как в ветви, являющейся смежной между первым и внешним контуром, включено лишь одно сопротивление (активное сопротивление R_1). На схеме рис. Б.3, б между узлом 1 и узлом 4 включена активная проводимость $g_{31} = \frac{R_1}{k}$.

Узел 1 и узел 2 на рис. Б.3, а соединены двумя пунктирными линиями (одна из них проходит через источник э. д. с. \dot{E}_5 , другая — через индуктивность L_5), поскольку в ветви, являющейся смежной между 1 и 2 контурами, последовательно

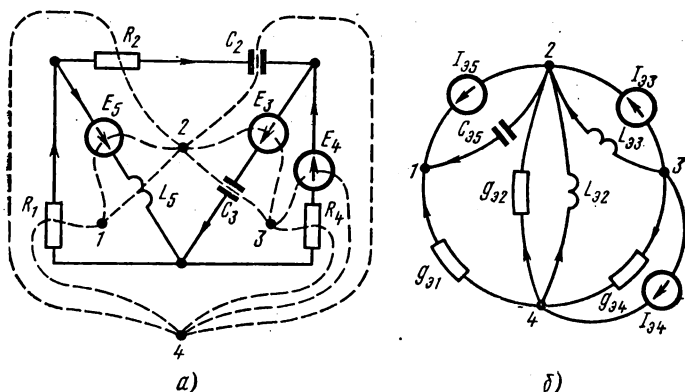


Рис. Б.3

соединены два элемента схемы (\dot{E}_5 и L_5). Узел 1 и узел 2 на схеме рис. Б.3, б соединены двумя ветвями. В одну из них включен источник тока I_{35} , в другую — емкость $C_{35} = \frac{L_5}{k}$ (элементы, дуальные \dot{E}_5 и L_5).

Положительные направления токов источников тока должны быть согласованы с положительными направлениями э. д. с. источников э. д. с.

Если при обходе k -контура по часовой стрелке какая-то э. д. с. этого контура будет совпадать с направлением обхода контура, то ток эквивалентного ей источника тока должен быть направлен к k -узлу.

Если ток по некоторой ветви исходной схемы совпадает по направлению с направлением обхода k -контура, то в дуальной схеме стрелку на соответствующей ветви направляют к k -узлу. Последнее замечание следует иметь в виду при составлении K и Q матриц взаимно дуальных схем (см. § В.3).

Исходная схема и дуальная ей называются взаимно обратными.

Приложение В

МАТРИЦЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

§ В.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ

Матрица — это совокупность величин, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Чтобы отличать матрицу по внешнему виду от определителя, ее заключают в квадратные скобки [] или в двойные вертикальные черты ||. Каждый элемент матрицы часто снабжают двумя индексами: первый соответствует номеру строки, второй — номеру столбца.

Матрицу называют квадратной, если число строк в ней равно числу столбцов; например,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Диагональной называют матрицу, у которой элементы главной диагонали не равны нулю, а все остальные — нули; например,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Матрицу, у которой элементы, расположенные по главной диагонали, равны единице, а все остальные — нули, называют единичной; например,

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Неопределенной называют матрицу, в которой сумма элементов любой строки и любого столбца равна нулю.

Две матрицы равны, если равны соответствующие элементы этих матриц. Так, матрица $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ равна матрице $[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

У равных матриц равны определители. Для рассмотренного примера $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$, но из равенства определителей двух матриц еще не следует равенства самих матриц.

Операции над матрицами (сложение их, умножение) постулированы из соображений рациональности. При сложении (вычитании) матриц следует сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц. Например,

$$[A] + [C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} + c_{12} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + c_{22} \end{bmatrix}.$$

Умножение двух матриц (число столбцов первой должно быть равно числу строк второй) производится по правилу « i -строка первой матрицы умножается на k -столбец второй». Для иллюстрации этого правила умножим две матрицы, элементами которых являются числа:

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix}.$$

Руководствуясь приведенным правилом, нетрудно убедиться в том, что $[A][B] \neq [B][A]$, т. е. результирующая матрица зависит от последовательности расположения матриц сомножителей.

По отношению к матрице $[A]$, если определитель ее не равен нулю, можно составить обратную матрицу $[A]^{-1}$. Для этого необходимо: а) каждый элемент исходной матрицы $[A]$ заменить его алгебраическим дополнением; б) транспонировать полученную матрицу, т. е. строки сделать столбцами; в) разделить транспонированную матрицу на определитель исходной матрицы $[A]$.

Пример 85. Пусть $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, требуется найти $[A]^{-1}$. Заменяя элементы матрицы $[A]$ на алгебраические дополнения, получим матрицу $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$. После транспонирования будем иметь $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$[A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$$[A][A]^{-1}=[1]=1.$$

Для решения уравнения $[A][B]=[C]$ относительно матрицы $[B]$ следует обе части этого уравнения умножить на $[A]^{-1}$: $[A]^{-1} \cdot [A][B]=[A]^{-1} \cdot [C]$ и учесть, что $[A]^{-1} \cdot [A]=1$. Получим $[B]=[A]^{-1} \cdot [C]$.

В матричном уравнении $[A][X]=0$ можно переставлять столбцы в матрице $[A]$ при одновременной перестановке строк в матрице $[X]$.

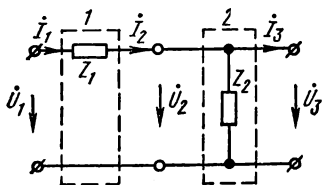


Рис. В.1

§ В.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЦ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Матрицы применяют:

а) для сокращенной записи систем уравнений (см. § 12.1);

б) для упорядочения решения систем уравнений;

в) при исследовании топологических свойств электрических цепей (см., например, [19]), в теории графов, при синтезе цепей, при использовании ЭВМ и т. д.

Упорядочение решения систем уравнений при помощи матриц осуществим на примере составного четырехполюсника.

Пример 86. Найдем матрицы $[A_1]$ и $[A_2]$ двух каскадно соединенных четырехполюсников 1 и 2 рис. В.1 и матрицу $[A]$ эквивалентного им четырехполюсника.

Для первого

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Z_1 i_2, \quad i_1 = i_2.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad (a)$$

где

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для второго $\dot{U}_2 = \dot{U}_3$

$$i_2 = \frac{\dot{U}_3}{Z_2} + i_3, \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = [A_2] \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ i_3 \end{bmatrix}, \quad (б)$$

где

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Заменив $\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$ в правой части уравнения (а) на его эквивалент из (б), получим

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [A_1][A_2] \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ i_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица двух каскадно соединенных четырехполюсников

$$[A] = [A_1][A_2] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \dot{U}_3 + Z_1 i_3 \quad \text{и} \quad i_1 = \frac{1}{Z_2} \dot{U}_3 + 1 \cdot i_3.$$

§ В.3. ОСНОВЫ МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Пронумеруем ветви и узлы в заданной схеме. Так, в схеме рис. В.2, а 4 узла и 6 ветвей. Произвольно покажем на них стрелками положительные направления отсчета токов и напряжений. Выберем одно из возможных деревьев в схеме рис. В.2, б. Ветви изобразим сплошными, а хорды — пунктирными линиями.

Фундаментальными контурами называют контуры, в каждый из которых входит только по одной хорде. Так, для дерева рис. В.2, б имеем три контура *a*, *b*, *c* на рис. В.2, в.

Матрицей фундаментальных контуров *K* называют таблицу из чисел 1, —1, 0 в которой строки (индекс *i*) соответствуют контурам, а столбцы (индекс *j*) — ветвям.

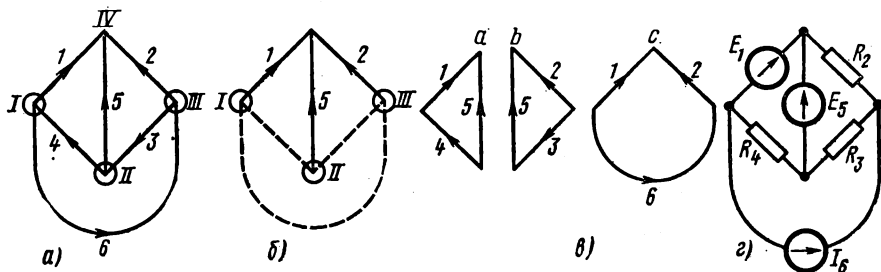


Рис. В.2

Если при обходе *i*-контура стрелка на *j*-ветви направлена согласно с обходом контура, то в соответствующей клетке таблицы ставят 1, если встречно, то —1, если ветвь не встретится — 0. Для рассматриваемого примера

$$K = \begin{matrix} & \text{Ветви} \\ \text{Контур} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрицу *K* используют для записи уравнений по второму закону Кирхгофа. Для того чтобы от заданной схемы прийти к выбранному дереву, например от рис. В.2, а к рис. В.2, б, надо отсечь часть ветвей, т. е. сделать их хордами. Каждая ветвь отсекается в двух местах около узлов, к которым она подходит. В примере надо сделать три отсечения, они показаны кружками на рис. В.2, а и б и обозначены цифрами I, II, III.

Матрицей отсечений, или *Q*-матрицей, называют таблицу, составленную из числа 1, —1, 0 так, что номер строки *i* соответствует номеру отсечения, а номер столбца *j* — номеру ветви. Если *j*-ветвь пересекается *i*-отсечением (кружком) и стрелка на ней направлена внутрь этого кружка, то в соответствующей клетке таблицы ставят 1, если из кружка, то —1, если ветвь не затронута отсечением — 0. Для рассматриваемого примера

$$Q = \begin{matrix} & \text{Ветви} \\ \text{Отсечения} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (a)$$

Q-матрица служит для записи уравнений по первому закону Кирхгофа. Известно, что с каждой исходной схемой можно сопоставить дуальную (см. § Б.1). Если узлы дуальной схемы взять соответствующими фундаментальными контурами исходной, то *Q*-матрица дуальной схемы и *K*-матрица исходной схемы будут одинаковы.

Кроме *K*- и *Q*-матриц, в матричной теории графов используют *M*- и *H*-матрицы. *M*-матрицу, или *матрицу контуров*, составляют так же, как и *K*-матрицу, но для

всех возможных контуров схемы. *H-матрицу*, или *матрицу инцидентий* (узловую матрицу), составляют так же, как и *Q-матрицу*, но для всех узлов схемы.

Запись уравнений связи напряжений и токов на ветвях через сопротивления или проводимости ветвей в комплексной или операторной формах, т. е. запись уравнений по закону Ома, осуществляют при помощи *матрицы полюсных уравнений* (название обусловлено тем, что каждая ветвь имеет два зажима или полюса).

Схема рис. В.2, *г* повторяет схему рис. В.2, *а*. В ветвях 1 и 5 ее включены источники \mathcal{E} , д. с., в ветви 6 — источник тока, а в остальных — активные сопротивления. Для них имеем: $R_2 I_2 = U_2$, $R_3 I_3 = U_3$, $R_4 I_4 = U_4$.

С помощью матрицы полюсных уравнений эти соотношения запишем так:

$$\begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При решении электротехнических задач за основные обычно принимают уравнения для напряжений вдоль фундаментальных контуров — алгебраическая сумма напряжения вдоль каждого из них равна нулю, либо уравнения для токов, составленные для отсечений, — алгебраическая сумма токов для каждого отсечения равна нулю.

В процессе совместного решения уравнений оказывается полезным разделять матрицы на подматрицы или блоки, с тем чтобы одну группу токов или напряжений выражать через другую (одну группу неизвестных через другую).

Для образования необходимых подматриц переставляют строки и столбцы матриц.

Пример 86а. Для схемы рис. В.2, *г*, полагая известными U_1 , U_5 , I_6 , R_2 , R_3 , R_4 , составить уравнения для определения токов I_1 , I_5 и напряжения U_6 ($U_1 = \mathcal{E}_1$, $U_5 = \mathcal{E}_5$).

Используя *K-матрицу*, запишем равенство нулю напряжений вдоль трех фундаментальных контуров рис. В.2, *а*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0.$$

Переставляем строки и столбцы так, чтобы можно было выделить подматрицы

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0 \text{ или}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (в)$$

Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов, охваченных отсечениями I, II, III на рис. В.2, *а*, используя *Q-матрицу*:

$$\begin{array}{c} \text{Отсечения} \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{I} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{II} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{III} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \end{array} = 0. \quad (г)$$

Переставим строки и столбцы в (г) так, чтобы не требующиеся по условию задачи токи I_2, I_3, I_4 можно было выразить через I_1, I_5, I_6 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \dots \\ I_1 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{или}$$

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (\text{д})$$

Заменим матрицу $\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$ в уравнении (в) на ее эквивалент из (б) и в полученном выражении матрицу $\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$ заменим на правую часть (д):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{е})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последовательно умножаем четыре матрицы. Окончательно

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(R_2+R_3) & -(R_2+R_3) & -R_3 \\ -R_4 & 0 & -R_4 \\ R_2 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0.$$

Рассмотрим матричный метод, часто используемый в литературе по радиоэлектронике. Заземленный узел обозначим через 0; входные зажимы — через 1 и 0; выходные — через 2 и 0. Положительные направления для токов и напряжений выберем как в системе А-параметров. Составим уравнения по методу узловых потенциалов $[I] = [Y][\Phi]$. В матрицу узловых проводимостей $[Y]$ не включена проводимость нагрузки y_n ; при этом $\dot{\Phi}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} I_2$; $\dot{\Phi}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} I_2$; $I_2 = y_n \dot{\Phi}_2$. Δ — определитель матрицы $[Y]$. Δ_{km} получается из Δ , если вычеркнуть k -строку и m -столбец и умножить на $(-1)^{k+m}$. Используем формулу $\frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta} = \Delta_{11,22}$.

Двойное алгебраическое дополнение $\Delta_{11,22}$ получают из Δ , вычеркивая строки 1 и 2 и столбцы 1 и 2 и умножая на $(-1)^{1+1+2+2}$. Тогда

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{\Phi}_2}{\Phi_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + y_n \Delta_{11,22}}; \quad \dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\Delta_{12} y_n}{\Delta + \Delta_{22} y_n};$$

$$Z_{\text{вх } 1-0} = \frac{\Delta_{11} + y_n \Delta_{11,22}}{\Delta + \Delta_{22} y_n}.$$

Приложение Г

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В НЕЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ-АНАЛОГАХ

Исследование процессов в неэлектрических системах (механических, акустических, тепловых, гидравлических и др.) или в частично неэлектрических (например, в электромеханических) часто производят на электрических моделях-аналогах.

Стремление использовать для этой цели электрические модели объясняется тем, что: 1) электрические параметры можно легко изменять в широких пределах; 2) токи и напряжения можно измерять с большой точностью; 3) токи и напряжения относительно просто записать на осциллографе. В качестве неэлектрических будем рассматривать механические системы.

Механические системы подразделяют на системы поступательного, вращательного, поступательно-вращательного движения. В каждой из этих систем могут быть активные и пассивные элементы.

Активными являются источники силы f и источники скорости v для систем поступательного движения и источники вращающего момента M и угловой скорости ω для систем вращательного движения.

Пассивными элементами являются элементы упругости, трения и массы. Как и при рассмотрении электрических цепей, эти элементы часто идеализируют, например считают, что идеальная пружина обладает только упругостью и не обладает массой.

Для заданной механической системы сначала составляют схему замещения, а затем, используя аналогию между механическими и электрическими величинами (о которой будет сказано далее), образуют электрическую схему-аналог, которую и подвергают исследованию (экспериментальному или теоретическому).

Перед составлением схемы замещения механической системы необходимо:

- 1) выбрать систему отсчета для сил и скоростей (или соответственно для вращающих моментов и угловых скоростей);
- 2) соединить между собой узлы, имеющие одинаковую скорость или одинаковую величину смещения;
- 3) соединить неподвижные узлы в один узел;
- 4) на схеме замещения между соответствующими узлами изобразить активные и пассивные элементы, имеющиеся в изучаемой системе.

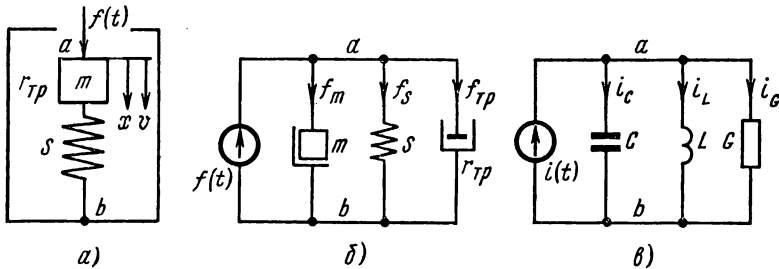


Рис. Г.1

Рассмотрим простейший пример.

Механическая система рис. Г.1, а образована телом массой m , опирающимся на пружину упругости S ($S = \frac{1}{e}$, где e — податливость). На тело действует внешняя сила $f(t)$, являющаяся функцией времени t . При движении тела в вертикальном направлении возникает вязкое трение о среду. Сила вязкого трения пропорциональна скорости v перемещения тела. В схеме всего два узла: подвижный a и неподвижный b .

Выберем положительное направление для отсчета величины перемещения тела x , считая за исходное положение тела при отсутствии силы $f(t)$. Положительное направление для скорости v выберем вниз, как это показано на рис. Г.1, а. Схема замещения

изображена на рис. Г.1, б. В ней четыре ветви. В первой включен источник силы $f(t)$, во второй — масса m , в третьей — идеальная пружина упругости S , в четвертой — сопротивление трения $r_{\text{тр}}$.

Для схемы замещения составим уравнение по первому закону механики. Согласно этому закону сумма всех внешних сил, действующих в некотором узле, должна быть равна сумме сил реакций в этом же узле. В узле a действуют три силы реакции:

$$f_m = m \frac{dv}{dt} \text{ — реакция системы, обусловленная силой инерции;}$$

$$f_S = \frac{1}{e} \int v dt \text{ — реакция системы, обусловленная деформацией пружины;}$$

$$f_{\text{тр}} = r_{\text{тр}} v \text{ — реакция системы, обусловленная трением.}$$

По первому закону механики,

$$f_m + f_S + f_{\text{тр}} = f(t) \text{ или } m \frac{dv}{dt} + \frac{1}{e} \int v dt + r_{\text{тр}} v = f(t).$$

Между отдельными элементами механической системы и элементами соответствующей ей электрической модели (системы) может быть аналогия двух типов в соответствии с тем, что для каждой электрической цепи может быть составлена дуальная ей цепь.

В первом типе аналогий сопоставимыми величинами являются:

сила f — напряжение u ,

скорость v — ток i ,

масса m — индуктивность L ,

податливость пружины e — емкость C ,

сопротивление трения $r_{\text{тр}}$ — электрическое сопротивление R .

Во втором типе аналогий сопоставимыми величинами являются:

сила f — ток i ,

скорость v — напряжение u ,

масса m — емкость C ,

податливость e — индуктивность L ,

сопротивление трения $r_{\text{тр}}$ — электрическая проводимость G .

На рис. Г.1, в изображена электрическая схема по второму типу аналогий, соответствующая схеме замещения механической системы рис. Г.1, б.

Для схемы рис. Г.1, в

$$i_C + i_L + i_G = i(t) \text{ или } C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt + Gu = i(t),$$

где u — напряжение между узлами a и b .

Закон изменения напряжения u во времени в схеме рис. Г.1, в соответствует закону изменения скорости v в системе рис. Г.1, а, если параметры электрической схемы соответствующим образом подобраны.

Приложение Д

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Цепи, образованные источниками постоянной э. д. с., сопротивлениями и идеальными конденсаторами и находящиеся в установившемся режиме работы, когда токи через конденсаторы не протекают, называют *электростатическими цепями* (э. ц.). Идеальные конденсаторы — это конденсаторы без утечки. Сопротивление между обкладками их в установившемся режиме в цепях с постоянными э. д. с. равно бесконечности. Когда говорят о расчете э. ц., то имеют в виду нахождение распределения напряжений и зарядов на конденсаторах. Расчет производят следующим образом:

1. Произвольно выбирают положительные направления отсчета для напряжений на конденсаторах. Положительное направление напряжения связано с распределением зарядов на пластинах в соответствии с рис. Д.1, б.

2. Исходя из того, что в любом узле схемы по первому закону Кирхгофа $\sum i = 0$, а $i = \frac{dq}{dt}$, имеем $\frac{d}{dt} \sum q = 0$. Отсюда следует, что в любом узле схемы $\sum q = 0$ или $\sum q = q_n$, где q_n — начальный заряд, который был на пластинах, присоединенных к рассматриваемому узлу, в начале процесса, приведшего к установившемуся режиму.

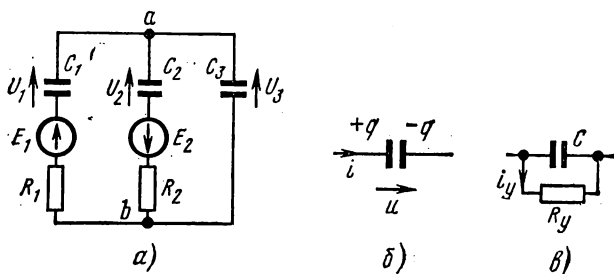


Рис. Д.1

3. Для любого контура схемы по второму закону Кирхгофа $\sum u = \sum E$.

4. Учитываем, что заряд и напряжение на конденсаторе связаны соотношением $q = Cu$.

Уравнения п. 2 и 4 аналогичны соответственно первому закону Кирхгофа $\sum I = 0$ и закону Ома для цепи постоянного тока $I = gu$, где g — проводимость. В уравнениях электростатических цепей емкость C и заряд q формально играют ту же роль, какую играют проводимость g и ток I в уравнениях электрических цепей постоянного тока. Эта аналогия позволяет использовать для расчета электростатических цепей формулы, выведенные в гл. I (только надо токи заменить на заряды, а проводимости — на емкости).

Наиболее приспособленными для расчета э. ц. являются метод узловых потенциалов и вытекающий из него метод двух узлов.

Пример 87. В схеме рис. Д.1, а $E_1 = 100$ в, $E_2 = 80$ в; $C_1 = 60$; $C_2 = 40$ и $C_3 = 20$ мкф. Начальный заряд $q_n = 0$. Найти напряжения и заряды на обкладках. Принимаем положительные направления для напряжений на конденсаторах в соответствии с рис. Д.1, а. По формуле (1.20), заменив в ней проводимости на емкости, имеем:

$$U_{ab} = \frac{E_1 C_1 - E_2 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{100 \cdot 60 - 80 \cdot 40}{60 + 40 + 20} = 23,3 \text{ в};$$

$$U_1 = E_1 - U_{ab} = 76,7 \text{ в}, \quad U_2 = -E_2 - U_{ab} = -103,3 \text{ в}; \quad U_3 = -U_{ab} = -23,3 \text{ в};$$

$$q_1 = U_1 C_1 = 76,7 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ к}, \quad q_2 = 4,13 \cdot 10^{-3} \text{ к},$$

$$q_3 = 0,466 \cdot 10^{-3} \text{ к}.$$

В заключение заметим, что у неидеального конденсатора сопротивление R_y (рис. Д.1, в) между обкладками не равно бесконечности и составляет величину порядка десятка или сотен мегом. В установившемся режиме в цепях с постоянными э. д. с. через эти сопротивления текут токи утечки i_y так же, как и в обычных цепях постоянного тока. Распределение напряжений между конденсаторами в этом случае зависит от величины сопротивлений утечек и не зависит от величины емкости конденсаторов.

ЧАСТЬ II

Глава восьмая

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Они возникают при четырех различных режимах работы электрических цепей (и при сочетаниях этих режимов):

1) когда источник э. д. с. или источник тока дает несинусоидальную э. д. с. или соответственно несинусоидальный ток, а все элементы цепи — активные сопротивления, индуктивности и емкости — линейны, т. е. от величины тока не зависят;

2) если источник э. д. с. или источник тока дает синусоидальную э. д. с. или синусоидальный ток, но один или несколько элементов цепи нелинейны;

3) когда источник э. д. с. или источник тока дает несинусоидальную э. д. с. или несинусоидальный ток, а в состав электрической цепи входят одно или несколько нелинейных сопротивлений;

4) если источник э. д. с. дает постоянную или синусоидальную э. д. с., а один или несколько элементов цепи периодически изменяются во времени.

В данной главе рассматриваются методика расчета и особенности работы линейных электрических цепей при воздействии на них несинусоидальных э. д. с. и токов — первый из перечисленных режимов работы. Второй и частично третий режимы работы обсуждаются в гл. IX, четвертый режим работы — в приложении А.

§ 8.2. ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ

Из курса математики известно, что любую периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , удовлетворяющую условиям Дирихле*, можно разложить в ряд Фурье.

* Все периодические функции, с которыми имеют дело в электротехнике, условиям Дирихле удовлетворяют. Поэтому производить проверку на выполнение условий Дирихле не требуется.

Кривые, для которых выполнимо это условие, называют *симметричными относительно оси абсцисс*. Если кривую рис. 8.1, а сместить по оси x на полпериода и зеркально отразить относительно оси x , то полученная кривая совпадает с кривой $f(x)$.

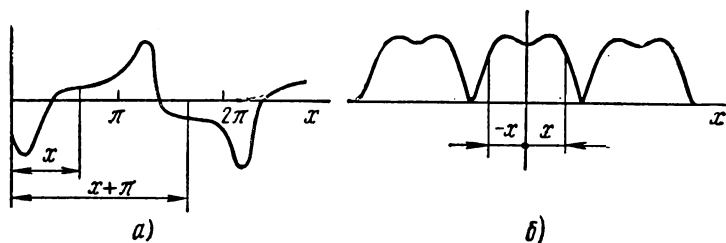


Рис. 8.1

При разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т. е. равны нулю коэффициенты

$$A_0 = A_2 = A_2' = A_4 = A_4' = \dots = 0.$$

Поэтому кривые типа кривой рис. 8.1, а раскладываются в ряд

$$f(x) = A_1' \sin x + A_1'' \cos x + A_3' \sin 3x + A_3'' \cos 3x + \dots$$

Каждое слагаемое этого ряда удовлетворяет условию $-f(x + \pi) = f(x)$. Так, например, $-\sin(x + \pi) = \sin x$.

Кривая, подобная кривой рис. 8.1, б, обладает *симметрией относительно оси ординат* и удовлетворяет условию

$$f(-x) = f(x).$$

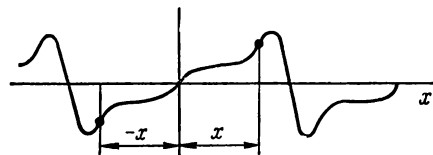


Рис. 8.2

Если кривую, лежащую левее оси ординат, зеркально отразить относительно оси ординат, то полученная кривая совпадает с кривой, лежащей правее оси ординат. В разложении таких кривых в ряд Фурье отсутствуют синусные составляющие (т. е. $A_1' = A_2' = A_3' = \dots = 0$) и присутствуют лишь косинусные составляющие и постоянная составляющая.

Таким образом, кривые типа кривой рис. 8.1, б можно разложить в ряд

$$f(x) = A_0 + A_1'' \cos x + A_2'' \cos 2x + A_3'' \cos 3x + \dots$$

Кривые типа кривой рис. 8.2 удовлетворяют условию $-f(-x) = f(x)$; их называют кривыми, *симметричными относительно начала координат*. Разложение их в ряд Фурье имеет такой вид:

$$f(x) = A_1' \sin x + A_2' \sin 2x + A_3' \sin 3x + \dots$$

§ 8.4. О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ФУРЬЕ КРИВЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ПРАВИЛЬНОЙ И НЕПРАВИЛЬНОЙ ФОРМ

Встречающиеся в электротехнике периодические кривые можно подразделить на две группы:

Таблица 8.1

	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\alpha\pi} \left(\sin\alpha \sin\omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{8a_m}{\pi^2} \left(\sin\omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos\omega t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\alpha\pi}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \sin \frac{5\alpha\pi}{2} \cos 5\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{2a_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos\omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}a_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\omega t - \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{3a_m}{\pi} \left(1 + \frac{2 \cos 6\omega t}{5 \cdot 7} - \frac{2 \cos 12\omega t}{11 \cdot 13} + \frac{2 \cos 18\omega t}{17 \cdot 19} - \dots \right)$

1) периодические кривые геометрически правильной формы, например трапецидальной, треугольной, прямоугольной и т. п. Разложение их в ряд Фурье дано в табл. 8.1; в ней вместо x записано ωt ;

2) кривые произвольной (геометрически неправильной) формы. Чаще всего они заданы в виде графика. Разложение их в ряд Фурье производят графически (графо-аналитически).

§ 8.5. ГРАФИЧЕСКИЙ (ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ) МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИК РЯДА ФУРЬЕ

Графический метод определения гармоник ряда Фурье основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых. С этой целью период функции $f(x)$, равный 2π , разбивают на n равных частей Δx :

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}$$

и интегралы заменяют суммами.

По определению, постоянная составляющая

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \Delta x = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \frac{2\pi}{n},$$

или

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x), \quad (8.5)$$

где p — текущий индекс; он пробегает значения от 1 до n ;
 $f_p(x)$ — значение функции $f(x)$ при $x = (p - 0,5) \Delta x$, т. е. в середине p -го интервала.

Амплитуда синусной составляющей k -гармоники ряда

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \approx 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \frac{2\pi}{n} \sin_p kx,$$

или

$$A'_k = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \sin_p kx; \quad (8.6)$$

амплитуда косинусной составляющей k -гармоники

$$A''_k = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \cos_p kx. \quad (8.7)$$

Здесь $\sin_p kx$ и $\cos_p kx$ — соответственно значения функций $\sin kx$ и $\cos kx$ при $x = (p - 0,5) \Delta x$, т. е. в середине p -го интервала.

При расчетах по формулам (8.5)—(8.7) обычно достаточно разделить период на $n = 24$ или 18 частей, а в некоторых случаях и на меньшее число частей.

Перед тем как производить графическое разложение в ряд, необходимо выяснить, не обладает ли раскладываемая функция симметрией относительно осей координат (см. § 8.3). Наличие того или иного вида симметрии позволяет до проведения разложения предсказать, какие гармоники следует ожидать. Так, если кривая $f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая A_0 и все четные гармоники отсутствуют, а вычисляя A'_k и A''_k при нечетных k , следует учесть, что сумма $\sum f_p(x) \sin_p kx$ за первый полупериод равна сумме $\sum f_p(x) \sin_p kx$ за второй полупериод.

Знак углов ψ_k в формуле (8.4) зависит от знаков A'_k и A''_k . При построении гармоник на общем графике необходимо учитывать, что масштаб по оси абсцисс для k -гармоники должен быть взят в k раз большим, чем для первой гармоники.

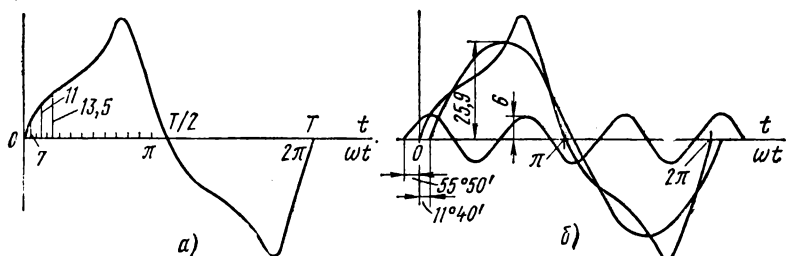


Рис. 8.3

Так, например, если некоторый отрезок по оси абсцисс для первой гармоники выражает собой угол $\pi/3$, то тот же отрезок для третьей гармоники выражает собой угол, в 3 раза больший, т. е.

$$3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi.$$

Пример 88. Найти первую и третью гармоники функции $f(x)$, изображенной на рис. 8.3, а. Значения ординат функции $f_p(x)$ за первый полупериод при разбивке периода на $n = 24$ части следующие:

$p=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_p(x)=7$	11	13,5	15,4	17,4	20,5	25,4	32,5	27,7	19,2	10	5

Решение. Так как кривая симметрична относительно оси абсцисс, то $A_0 = 0$ и ряд будет состоять только из нечетных гармоник. Амплитуда синусной составляющей первой гармоники

$$A'_1 = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \sin_p x = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \sin_p x;$$

$$\begin{aligned} A'_1 = \frac{4}{24} (7 \sin 7^\circ 30' + 11 \sin 22^\circ 30' + 13,5 \sin 37^\circ 30' + \\ + 15,4 \sin 52^\circ 30' + 17,4 \sin 67^\circ 30' + 20,5 \sin 82^\circ 30' + \\ + 25,4 \sin 97^\circ 30' + 32,5 \sin 112^\circ 30' + 27,7 \sin 127^\circ 30' + \\ + 19,2 \sin 142^\circ 30' + 10 \sin 157^\circ 30' + 5 \sin 172^\circ 30') \cong 25,3. \end{aligned}$$

Амплитуда косинусной составляющей первой гармоники

$$A_1'' = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \cos_p x \approx -5,23.$$

Амплитуда синусной составляющей третьей гармоники

$$A_3' = \frac{4}{24} \sum_{p=1}^{12} f_p(x) \sin_p 3x \approx 3,47.$$

Амплитуда косинусной составляющей третьей гармоники

$$A_3'' = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{12} f_p(x) \cos_p 3x \approx 5,1.$$

Амплитуда первой гармоники $A_1 = \sqrt{(A_1')^2 + (A_1'')^2} = 25,9$. Тангенс угла ψ_1 , на который начало первой гармоники смещено по отношению к началу кривой $f(x)$,

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{A_1''}{A_1'} = \frac{-5,23}{25,3} = -0,206; \psi_1 = -11^\circ 40'.$$

Амплитуда третьей гармоники $A_3 = \sqrt{(A_3')^2 + (A_3'')^2} = 6$;

$$\operatorname{tg} \psi_3 = \frac{A_3''}{A_3'} = 1,47; \psi_3 = 55^\circ 50'.$$

Следовательно, если ограничиться третьей гармоникой, то

$$f(\omega t) = 25,9 \sin(\omega t - 11^\circ 40') + 6 \sin(3\omega t + 55^\circ 50').$$

На рис. 8.3, б изображены первая и третья гармоники полученного ряда, а также результирующая (суммарная) кривая. Ее можно сопоставить с кривой рис. 8.3, а.

§ 8.6. РАСЧЕТ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКАХ ПИТАНИЯ

До проведения расчета вынуждающие силы (ток источника тока или э. д. с. источника э. д. с.) должны быть представлены рядом Фурье.

Согласно принципу наложения, мгновенное значение тока любой ветви схемы равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Аналогично, мгновенное значение напряжения на любом участке схемы равно сумме мгновенных значений напряжений отдельных гармоник на этом участке. Расчет производят для каждой из гармоник в отдельности с помощью приемов, известных из ч. I учебника.

Сначала рассчитывают токи и напряжения, возникающие от действия постоянной составляющей э. д. с., или источника тока, после этого — токи и напряжения от действия первой гармоники, затем от второй гармоники, от третьей и т. д.

При расчете токов и напряжений, возникающих от действия постоянной составляющей э. д. с., необходимо иметь в виду, что падение напряжения на индуктивности L от постоянного тока равно нулю, а также что постоянный ток через емкость C не проходит.

При расчете следует учитывать, что индуктивное сопротивление X_L растет прямо пропорционально частоте; поэтому для k -гармоники X_{Lk} в k раз больше, чем для первой гармоники X_{L1} :

$$\left. \begin{aligned} X_{Lk} &= k \omega L = k X_{L1}; \\ X_{L1} &= \omega L. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Емкостное сопротивление уменьшается с ростом частоты; поэтому для k -гармоники X_{Ck} в k раз меньше, чем для первой гармоники X_{C1} :

$$\left. \begin{aligned} X_{Ck} &= \frac{1}{k \omega C} = \frac{X_{C1}}{k}; \\ X_{C1} &= \frac{1}{\omega C}. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Для каждой гармоники можно построить векторную диаграмму. Однако откладывать на векторной диаграмме токи и падения напряжения *различных* частот и тем более векторно складывать токи и падения напряжения различных частот недопустимо, поскольку угловые скорости вращения векторов разных частот неодинаковы.

Активные сопротивления, если частоты не очень велики, полагают от частоты независимыми *.

При расчете каждую гармонику выражают комплексным числом. Суммирование одноименных гармоник производят путем сложения комплексных чисел или векторов на комплексной плоскости, т. е. так же, как это делалось в ч. I учебника.

Пример 89. В левой ветви схемы рис. 8.4, а имеется источник тока $i_k(t) = I_{km} \cos 2\omega t$, в средней (второй) — источник э. д. с. $e(t) = E_0 + E_m \sin \omega t$. Индуктивность L_4 магнитно связана с индуктивностью L_3 . Взаимная индуктивность между ними M . Определить мгновенное значение тока i_3 и напряжения u_{ba} на зажимах L_4 . Дано: $I_{km} = 5$ а; $\omega = 1000$ рад/сек; $E_0 = 3$ в; $E_m = 6$ в; $R_1 = 3$ ом, $L_3 = 3$ мГн; $M = 1$ мГн.

Решение. Положительные направления для токов выберем в соответствии с рис. 8.4, а.

По второму закону Кирхгофа,

$$u_{ba} - L_4 \frac{di_4}{dt} + M \frac{di_3}{dt} = 0,$$

но $i_4 = 0$; поэтому $u_{ba} = -M \frac{di_3}{dt}$.

Воспользуемся принципом наложения и найдем составляющие тока i_3 от каждого из источников в отдельности.

* Строго говоря, величина активного сопротивления зависит от частоты вследствие явления поверхностного эффекта. Явление поверхностного эффекта (см. ч. III учебника) здесь не учитывается.

Схема рис. 8.4, б служит для расчета токов от действия постоянной составляющей э. д. с. Левая ветвь схемы разомкнута, так как в ней

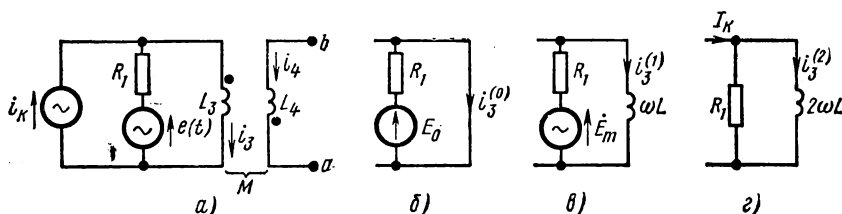


Рис. 8.4

включен источник тока. Третья ветвь короткозамкнута, так как индуктивность для постоянного тока имеет нулевое сопротивление. При этом

$$i_3^{(0)} = \frac{E_0}{R_1} = 1 \text{ а.}$$

Первую гармонику тока $i_3^{(1)}$ находим, используя схему рис. 8.4, в:

$$I_{3m}^{(1)} = \frac{6}{3 + 3j} = 1,41 \text{ е}^{-j 45^\circ}.$$

Вторую гармонику тока $i_3^{(2)}$ находим в соответствии со схемой рис. 8.4, г:

$$I_{3m}^{(2)} = I_{km} \frac{R_1}{R_1 + j2\omega L} = 5 \text{ е}^{j90^\circ} \frac{3}{3 + j6} = 2,23 \text{ е}^{j26^\circ 40'}.$$

Мгновенное значение тока i_3 равно сумме мгновенных значений:

$$i_3 = i_3^{(0)} + i_3^{(1)} + i_3^{(2)} = 1 + 1,41 \sin(\omega t - 45^\circ) + 2,23 \sin(2\omega t + 26^\circ 40') \text{ а.}$$

Напряжение

$$u_{ba} = -M \frac{di_3}{dt} = -1,41 \cos(\omega t - 45^\circ) - 4,46 \cos(2\omega t + 26^\circ 40') \text{ в.}$$

§ 8.7. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ

Как известно из ч. I учебника, резонансным режимом работы электрической цепи, содержащей одну или несколько индуктивностей и одну или несколько емкостей, называют такой режим ее работы, при котором ток на входе этой цепи совпадает по фазе с действующей на входе э. д. с.

Если воздействующая э. д. с. несинусоидальна, то в электрической цепи могут возникать резонансные режимы (резонансы токов или резонансы напряжений) не только на первой гармонике, но и на высших гармониках.

Условимся под резонансом на k -гармонике понимать такой режим работы, при котором ток k -гармоники на входе цепи по фазе совпадает с k -гармоникой, действующей на входе э. д. с. (но при этом токи остальных гармоник не совпадают по фазе с вызвавшими их э. д. с.)

Если учитывать активные сопротивления индуктивных катушек, то условие возникновения резонанса для какой-либо гармоники заключается в том, что реактивная составляющая входного сопротивления для этой гармоники должна быть равна нулю.

Исследование резонансных явлений при несинусоидальных токах часто производят, полагая активные сопротивления индуктивных катушек равными нулю.

В последнем случае входное сопротивление при резонансе токов равно бесконечности, а входное сопротивление при резонансе напряжений равно нулю.

При возникновении резонансного и близкого к нему режима на какой-либо высшей гармонике токи и (или) напряжения этой гармоники могут оказаться большими, чем токи и напряжения первой гармоники на тех участках цепи, несмотря на то что амплитуда соответствующей высшей гармоники э. д. с. на входе схемы может быть в несколько раз меньше амплитуды первой гармоники э. д. с.

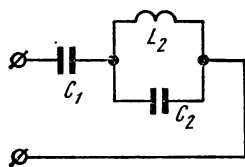


Рис. 8.5

Пример 90. В схеме рис. 8.5 задана индуктивность L_2 . Полагая активное сопротивление индуктивной катушки равным нулю, найти, при каких значениях емкостей C_1 и C_2 входное сопротивление схемы для первой гармоники равняется нулю, а для девятой гармоники равно бесконечности.

Решение. Запишем выражение входного сопротивления схемы для первой гармоники и приравняем его нулю:

$$Z = \frac{-j}{\omega C_1} + \frac{j\omega L_2 \left(\frac{-j}{\omega C_2} \right)}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} = 0.$$

Приравняем бесконечности входное сопротивление для девятой гармоники:

$$Z_9 = \frac{-j}{9\omega C_1} + \frac{j9\omega L_2 \left(\frac{-j}{9\omega C_2} \right)}{j \left(9\omega L_2 - \frac{1}{9\omega C_2} \right)} = \infty.$$

Совместное решение дает

$$\frac{1}{\omega C_2} = 81\omega L_2 \text{ и } \frac{1}{\omega C_1} = \frac{81}{80} \omega L_2.$$

§ 8.8. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА И НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

По определению (см. § 5.2), квадрат действующего значения тока I выражается через мгновенное значение тока i следующим образом:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

Если ток

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots,$$

то

$$i^2 = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) + \\ + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} I_{pm} I_{qm} \sin(p\omega t + \psi_p) \sin(q\omega t + \psi_q).$$

Но

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt &= \frac{T}{2}; \\ \int_0^T \sin(p\omega t + \psi_p) \sin(q\omega t + \psi_q) dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Поэтому

$$I^2 = I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \frac{I_{3m}^2}{2} + \dots$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots}$$

Так как амплитуда k -гармоники тока I_{km} в $\sqrt{2}$ раз больше действующего значения k -гармоники I_k , то

$$\frac{I_{km}^2}{2} = \frac{I_{km}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{km}}{\sqrt{2}} = I_k^2$$

и

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (8.11')$$

Следовательно, действующее значение несинусоидального тока равно квадратному корню из суммы квадратов постоянной составляющей тока и действующих значений отдельных гармоник. От сдвигов фаз ψ_k действующее значение не зависит.

Аналогичным образом действующее значение несинусоидального напряжения U равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений отдельных гармоник:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \quad (8.11)$$

Пример 91. На входе двухполюсника напряжение и ток равны:

$$u = 100 + 80 \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 50 \sin(5\omega t + 45^\circ) \text{ в},$$

$$i = 33,3 + 17,87 \sin(\omega t - 18^\circ) + 5,59 \sin(5\omega t + 120^\circ) \text{ а}.$$

Найти их действующие значения.

Р е ш е н и е.

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,87^2}{2} + \frac{5,59^2}{2}} = 35,6 \text{ а};$$

$$E = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127,1 \text{ в}.$$

§ 8.9. СРЕДНЕЕ ПО МОДУЛЮ ЗНАЧЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Под средним по модулю значением функции понимается среднее значение, определяемое следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\omega t)| d\omega t. \quad (8.12)$$

В отличие от действующего значения оно зависит от углов ψ_k .

Пример 92. Записать выражение для среднего по модулю значения несинусоидальной функции, не содержащей постоянной составляющей и четных гармоник и не изменяющей знака в течение каждого полупериода:

$$i = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + I_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

После интегрирования получим

$$I_{\text{ср. по модулю}} = \frac{2}{\pi} \left(I_{1m} \cos \psi_1 + \frac{1}{3} I_{3m} \cos \psi_3 + \frac{1}{5} I_{5m} \cos \psi_5 + \dots \right). \quad (8.13)$$

§ 8.10. ВЕЛИЧИНЫ, НА КОТОРЫЕ РЕАГИРУЮТ АМПЕРМЕТРЫ И ВОЛЬТМЕТРЫ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ

Несинусоидальные токи и напряжения измеряют приборами различных систем. Принципы действия этих приборов рассматривают в курсе электрических измерений. Поэтому здесь упомянем лишь, на какие величины реагируют вольтметры и амперметры различных систем.

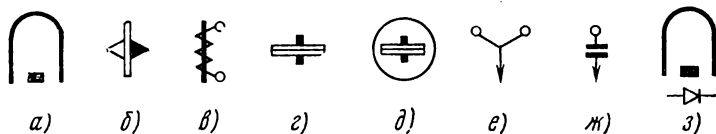


Рис. 8.6

Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующее значение, магнитоэлектрические приборы с выпрямителем — на среднее по модулю значение величины, магнитоэлектрические без выпрямителя — на постоянную составляющую, амплитудные электронные вольтметры — на максимальное значение функции.

Напомним, что на лицевой стороне прибора всегда имеется условный значок, свидетельствующий о том, какой системы данный прибор. На рис. 8.6 приведены эти условные значки: а — магнитоэлектрическая с подвижной рамкой; б — магни-

тоэлектрическая с подвижным магнитом; θ — электромагнитная; ε — электродинамическая; δ — ферродинамическая; e — тепловая; κ — электростатическая; ε — магнитоэлектрическая с выпрямителем.

§ 8.11. АКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Под активной мощностью P несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt.$$

Если представить напряжение u и ток i рядами Фурье:

$$\begin{aligned} u &= U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots; \\ i &= I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \\ &\quad + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots, \end{aligned}$$

подставить эти ряды под знак интеграла и проинтегрировать, учтя соотношения (8.10), то получим

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots \quad (8.14)$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.

Полная мощность S равна произведению действующего значения несинусоидального напряжения на действующее значение несинусоидального тока:

$$S = UI, \quad (8.15)$$

где

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}; \\ I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}. \end{aligned}$$

Пример 92а. Найти P и S , если

$$u = 25,9 \sin(\omega t - 11^\circ 40') + 6 \sin(3\omega t + 53^\circ 50') \text{ в};$$

$$i = 3 \sin(\omega t - 40^\circ) + 0,9\sqrt{2} \sin(3\omega t + 125^\circ) \text{ а}.$$

Решение.

$$U_1 = \frac{25,9}{\sqrt{2}} = 18,3 \text{ в}; \quad U_3 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,26 \text{ в};$$

$$I_1 = 2,13 \text{ а}; \quad I_3 = 0,9 \text{ а};$$

$$\varphi_1 = -11^\circ 40' - (-40^\circ) = 28^\circ 20'; \quad \varphi_3 = -71^\circ 10';$$

$$P = 18,3 \cdot 2,13 \cos 28^\circ 20' + 4,26 \cdot 0,9 \cos(-71^\circ 10') = 35,5 \text{ вт};$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{18,3^2 + 4,26^2} = 18,55 \text{ в};$$

$$I = \sqrt{2,13^2 + 0,9^2} = 2,31 \text{ а}; \quad S = UI = 18,55 \cdot 2,31 = 42,8 \text{ ва}.$$

§ 8.12. ЗАМЕНА НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ СИНУСОИДАЛЬНЫМИ

При изучении некоторых простейших свойств нелинейных электрических цепей (см. гл. IX) несинусоидальные токи и напряжения, не содержащие постоянных составляющих, заменяют эквивалентными синусоидальными. Замену производят таким образом, что действующее значение синусоидального тока принимают равным действующему значению заменяемого несинусоидального тока, а действующее значение синусоидального напряжения — равным действующему значению несинусоидального напряжения.

Угол сдвига фаз φ_3 между эквивалентными синусоидами напряжения и тока берут таким, чтобы активная мощность эквивалентного синусоидального тока была равна активной мощности несинусоидального тока:

$$\cos \varphi_3 = \frac{P}{UI}. \quad (8.16)$$

Пример 93. Заменить несинусоидальные ток и напряжение примера 92а эквивалентными синусоидальными и найти угол сдвига фаз φ_3 между ними.

Решение. Действующее значение синусоидального напряжения $U = 18,55$ в. Действующее значение синусоидального тока $I = 2,31$ а;

$$\cos \varphi_3 = \frac{35,5}{18,55 \cdot 2,31} = 0,828; \quad \varphi_3 = 34^\circ.$$

§ 8.13. ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ГАРМОНИКАМИ, КРАТНЫМИ ТРЕМ *

Электродвижущие силы каждой фазы трехфазного трансформатора или трехфазного генератора часто оказываются несинусоидальными. Каждая э. д. с. (e_A , e_B , e_C) повторяет по форме остальные со сдвигом на одну треть периода $T/3$ и может быть разложена на гармоники. Постоянная составляющая обычно отсутствует.

Пусть k -гармоника э. д. с. фазы A

$$e_{kA} = E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Так как э. д. с. фазы B отстает от э. д. с. фазы A на $T/3$, а э. д. с. фазы C опережает э. д. с. фазы A на $T/3$, то k -гармоники э. д. с. в фазе B и в фазе C равны соответственно:

$$e_{kB} = E_{km} \sin \left[k\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_k \right] = E_{km} \sin(k\omega t - 120^\circ k + \psi_k);$$

$$e_{kC} = E_{km} \sin \left[k\omega \left(t + \frac{T}{3} \right) + \psi_k \right] = E_{km} \sin(k\omega t + 120^\circ k + \psi_k);$$

$$k\omega \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{3} = 120^\circ k.$$

* Материал § 8.13 особенно необходим студентам электроэнергетических и электромеханических специальностей.

Если k принимает значения 1, 4, 7, 10, то k -гармоника э. д. с. B фазы отстает на 120° от гармоники э. д. с. фазы A . Следовательно, 1-, 4-, 7-, 10-я гармоники образуют систему прямой последовательности фаз (что понимают под прямой последовательностью фаз, см. в § 7.20).

Если $k = 2, 5, 8, 11$, то k -гармоника э. д. с. фазы B опережает k -гармонику фазы A на 120° . Следовательно, 2-, 5-, 8-я и т. д. гармоники образуют системы обратной последовательности.

Гармоники, кратные трем ($k = 3, 6, 9, \dots$), образуют систему нулевой последовательности, т. е. третьи гармоники во всех трех фазах совпадают по фазе ($3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$):

$$e_{3A} = e_{3B} = e_{3C} = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3);$$

шестые гармоники также совпадают по фазе и т. д.

Совпадение по фазе третьих гармоник во всех трех фазах проиллюстрируем графически.

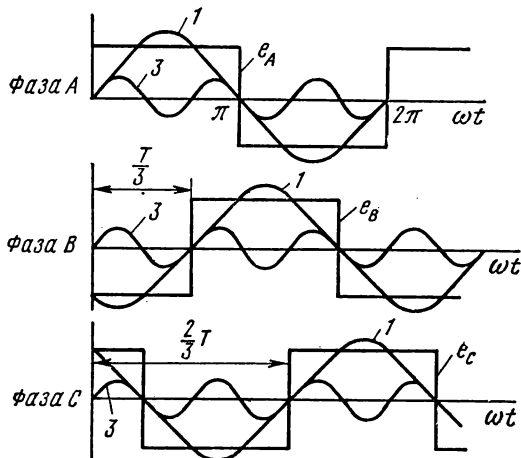


Рис. 8.7

На рис. 8.7 э. д. с. e_A, e_B, e_C представляют собой три фазные э. д. с. трехфазного генератора. Они имеют прямоугольную форму и сдвинуты по отношению друг к другу на одну треть периода основной частоты.

На том же рисунке показаны первая и третья гармоники каждой э. д. с. Из рисунка видно, что третьи гармоники действительно находятся в фазе.

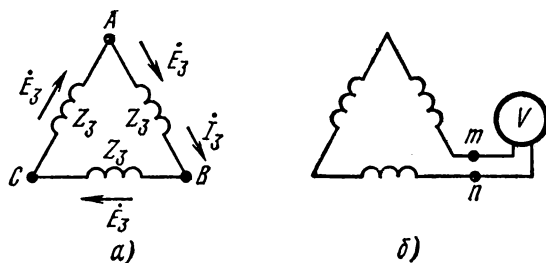


Рис. 8.8

Рассмотрим особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем.

1. При соединении обмоток трехфазного генератора или трехфазного трансформатора в треугольник (рис. 8.8, а) по ним будут

протекать токи гармоник, кратных трем, даже при отсутствии внешней нагрузки.

Алгебраическая сумма третьих гармоник э. д. с. в треугольнике равна $3E_3^*$. Обозначим сопротивление обмотки каждой фазы для третьей гармоники через Z_3 , тогда ток третьей гармоники в треугольнике

$$I_3 = \frac{3\dot{E}_3}{3Z_3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3};$$

аналогично ток шестой гармоники

$$I_6 = \frac{\dot{E}_6}{Z_6},$$

где \dot{E}_6 — действующее значение шестой гармоники фазной э. д. с.; Z_6 — сопротивление фазы по шестой гармонике.

Действующее значение тока, протекающего по замкнутому треугольнику в схеме рис. 8.8, а,

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$

2. Если соединить обмотки трехфазного генератора или трехфазного трансформатора в открытый треугольник (рис. 8.8, б), то при наличии в фазных э. д. с. гармоник, кратных трем, на зажимах m и n будет напряжение, равное сумме э. д. с. гармоник, кратных трем:

$$u_{mn} = 3E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + 3E_{6m} \sin(6\omega t + \psi_6) + \dots$$

Показание вольтметра в схеме рис. 8.8, б равно

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + \dots}$$

3. В линейном напряжении независимо от того, в звезду или треугольник соединены обмотки генератора или трансформатора, кратные трем гармоники отсутствуют.

Третье свойство докажем для случая холостого хода генератора или трансформатора, т. е. когда внешняя нагрузка отсутствует. Однако это свойство справедливо и при наличии нагрузки.

Рассмотрим сначала схему соединения в треугольник (см. рис. 8.8, а). Обозначив $\dot{\varphi}_{A3}$ — потенциал точки A и $\dot{\varphi}_{B3}$ — потенциал точки B по третьей гармонике, получим

$$\dot{\varphi}_{A3} = \dot{\varphi}_{B3} - \dot{E}_3 + I_3 Z_3.$$

Но $\dot{E}_3 = I_3 Z_3$; следовательно, $\dot{\varphi}_{A3} = \dot{\varphi}_{B3}$.

При соединении в звезду (рис. 8.9) линейное напряжение третьей гармоники равно разности соответствующих фазовых напряжений. Так как третьи гармоники в фазовых напряжениях совпадают по фазе, то при составлении этой разности они вычитаются.

* Алгебраическая сумма первых гармоник э. д. с. и всех гармоник э. д. с., не кратных трем, равна нулю; поэтому от перечисленных гармоник при отсутствии нагрузки по замкнутому треугольнику ток протекать не будет.

В фазовом напряжении могут присутствовать все гармоники (постоянная составляющая обычно отсутствует). Следовательно, действующее значение фазового напряжения

$$U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}$$

В линейном напряжении схемы рис. 8.9 отсутствуют гармоники, кратные трем; поэтому

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots}$$

Отношение $\frac{U_{\text{л}}}{U_{\phi}} < \sqrt{3}$, если есть гармоники, кратные 3.

4. При соединении генератора и равномерной нагрузки в звезду и отсутствии нулевого провода токи третьих и других гармоник ну-

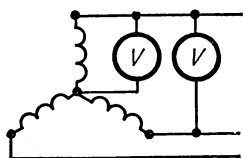


Рис. 8.9

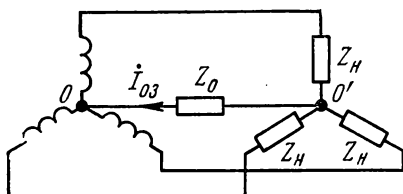


Рис. 8.10

левой последовательности не могут протекать по линейным проводам. Поэтому между нулевыми точками приемника $0'$ и генератора 0 (рис. 8.10 при $Z_0 = \infty$) будет действовать напряжение

$$u_{0'0} = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + E_{6m} \sin(6\omega t + \psi_6) + \dots;$$

действующее значение его

$$U_{0'0} = \sqrt{\frac{E_{3m}^2}{2} + \frac{E_{6m}^2}{2} + \dots}$$

5. Если в схеме звезда — звезда при равномерной нагрузке фаз сопротивление нагрузки для третьей гармоники обозначить $Z_{н3}$, а сопротивление нулевого провода для третьей гармоники — Z_{03} (рис. 8.10), то по нулевому проводу будет протекать ток третьей гармоники

$$I_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + \frac{Z_{н3}}{3}}^*$$

По каждому из линейных проводов будет протекать ток третьей гармоники $I_{03}/3$.

Аналогично находят токи и от других гармоник, кратных трем.

Пример 94. Дано мгновенное значение напряжения фазы A трехфазного генератора

$$u_A = 127 \sin(\omega t + 10^\circ) + 30 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 20 \sin(11\omega t + 15^\circ) \text{ в.}$$

* Эта формула получена путем составления уравнения по второму закону Кирхгофа для контура, образованного какой-либо фазой и нулевым проводом.

Требуется записать мгновенное значение линейного напряжения u_{AB} при соединении генератора в звезду.

Решение. В линейном напряжении третья гармоника отсутствует.

Первые гармоники фаз A и B по фазе сдвинуты на 120° . Поэтому линейное напряжение \dot{U}_{AB} первой гармоники в $\sqrt{3}$ раз больше фазового напряжения первой гармоники \dot{U}_A и на 30° будет опережать его по фазе.

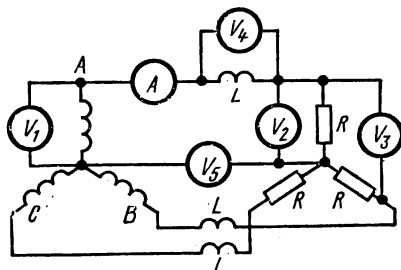


Рис. 8.11

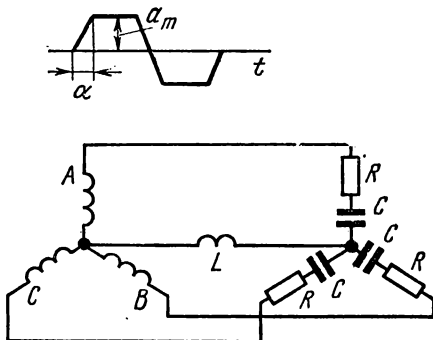


Рис. 8.12

Одиннадцатая гармоника (обратная последовательность фаз) линейного напряжения будет отставать по фазе от одиннадцатой гармоники напряжения фазы A на 30° и будет в $\sqrt{3}$ раз больше ее:

$$u_{AB} = 127\sqrt{3} \sin(\omega t + 40^\circ) + 20\sqrt{3} \sin(11\omega t - 15^\circ) \text{ в.}$$

Пример 95. Э. д. с. фазы A в схеме рис. 8.11

$$e_A = 170 \sin \omega t + 80 \cos 3\omega t + 34 \cos 9\omega t;$$

$$R = 9 \text{ ом}; \quad \omega L = 2 \text{ ом.}$$

Определить показания всех приборов. Приборы электродинамической системы.

Решение. Действующие значения э. д. с.

$$E_1 = \frac{170}{\sqrt{2}} = 121 \text{ в}; \quad E_3 = 56,5 \text{ в}; \quad E_9 = 24,2 \text{ в.}$$

По линейным проводам течет первая гармоника тока

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{121}{9,2} = 13,2 \text{ а.}$$

Показание вольтметра V_1 равно $\sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_9^2} = 136 \text{ в.}$

Показание вольтметра V_2 равно $I_1 R_1 = 13,2 \cdot 9 = 118,5 \text{ в.}$

Показание вольтметра V_3 равно $\sqrt{3} \cdot 118,5 = 205 \text{ в.}$

Показание вольтметра V_4 равно $I_1 \omega L = 26,4 \text{ в.}$

Показание вольтметра V_5 равно $\sqrt{E_3^2 + E_9^2} = 62,3 \text{ в.}$

Пример 96. Э. д. с. каждой фазы генератора (рис. 8.12) изменяется по трапецеидальному закону; $a_m = 220$ в; $\alpha = 10^\circ$; нагрузка равномерная; $R = 6$ ом; $\omega L = 0,5$ ом; $1/\omega C = 12$ ом.

Записать мгновенное значение тока по нулевому проводу, пренебрегая гармониками тока выше седьмой.

Решение. С помощью табл. 8.1 записываем разложение трапецеидальной э. д. с.:

$$e_A = \frac{4 \cdot 220}{\frac{\pi}{18} \cdot \pi} \left(\sin 10^\circ \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 30^\circ \sin 3\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin 50^\circ \sin 5\omega t + \frac{1}{49} \sin 70^\circ \sin 7\omega t \right).$$

Следовательно,

$$e_A = 274 \sin \omega t + 89,3 \sin 3\omega t + 49,5 \sin 5\omega t + 30,9 \sin 7\omega t.$$

По нулевому проводу будет протекать только третья гармоника тока

$$i_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + \frac{Z_{н3}}{3}};$$

здесь $E_3 = \frac{89,3}{\sqrt{2}} = 63,3$ в; $Z_{03} = 1,5$ j; $Z_{н3} = 6 - 4$ j;

$$\frac{Z_{н3}}{3} = 2 - j1,33; \quad \dot{i}_{03} = \frac{63,3}{1,5j + 2 - j1,33} = 31,8 e^{-j4^\circ 40'} \text{ а.}$$

Мгновенное значение тока $i_{03} = 44,8 \sin (3\omega t - 4^\circ 40') \text{ а.}$

§ 8.14. БИЕНИЯ

Колебательный процесс, получающийся в результате сложения двух синусоидальных колебаний с равными амплитудами A и близкими, но не равными частотами ω_1 и ω_2 , дает колебание, которое называют биением. Пусть

$$f(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t.$$

Воспользуемся известным тригонометрическим преобразованием

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

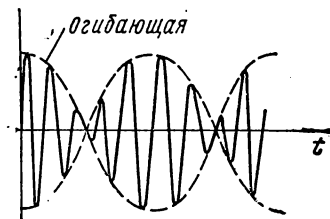


Рис. 8.13

Следовательно, $f(t)$ можно представить следующим образом:

$$f(t) = 2A \cos \Omega t \sin \omega t,$$

где

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (\Omega \ll \omega).$$

График результирующего колебания изображен на рис. 8.13. Амплитуда колебания изменяется по закону $2A \cos \Omega t$. Огибающая колебаний нанесена пунктиром.

Возникновение биений при сложении двух синусоидальных колебаний с равными амплитудами и близкими (но не равными) частотами используется на практике в различных целях, в частности для того, чтобы установить, что складываемые колебания имеют неодинаковые частоты.

§ 8.15. МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В телефонии и радиотехнике очень широко применяют модулированные колебания. Модулированным колебанием $f(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ называют колебание, в котором амплитуда A , частота ω , фаза ψ или и те и другие вместе изменяются во времени.

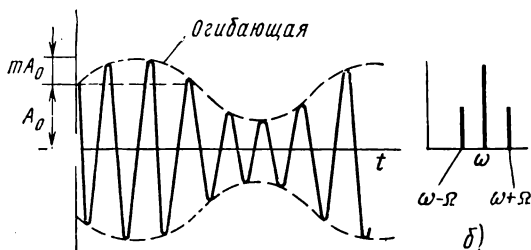


Рис. 8.14

Колебание, в котором изменяется только амплитуда A , а угловая частота ω и фаза ψ неизменны, называют колебанием, модулированным по амплитуде.

Колебание с изменяющейся угловой частотой ω , но неизменными амплитудой A и фазой ψ называют колебанием, модулированным по частоте.

Колебание, в котором изменяется только фаза ψ , а амплитуда A и угловая частота ω неизменны, называют колебанием, модулированным по фазе.

Простейшим амплитудно-модулированным (АМ) является колебание, в котором амплитуда модулирована по закону синуса:

$$f(t) = A_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin (\omega t + \psi),$$

где $\Omega \ll \omega$; m называют глубиной модуляции; как правило, $m < 1$.

График колебания изображен на рис. 8.14, а (огибающая дана пунктиром).

Если воспользоваться известным из тригонометрии тождеством

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

то колебание $A_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin (\omega t + \psi)$ можно представить в виде суммы трех колебаний:

$$f(t) = A_0 \sin (\omega t + \psi) + \frac{mA_0}{2} \cos [(\omega - \Omega) t + \psi] - \frac{mA_0}{2} \cos [(\omega + \Omega) t + \psi].$$

Частоту ω называют несущей, а частоты $(\omega - \Omega)$ и $(\omega + \Omega)$ — боковыми. Спектр АМ-колебания изображен на рис. 8.14, б.

Пример 97. Разложить на составляющие функцию

$$f(t) = 20(1 + 0,6 \sin 10^3 t) \sin 10^5 t.$$

Решение.

$$\omega - \Omega = 99 \cdot 10^3; \quad \omega + \Omega = 101 \cdot 10^3; \quad \frac{mA_0}{2} = 6.$$

Следовательно,

$$f(t) = 20 \sin 10^5 t + 6 \cos(99 \cdot 10^3 t) - 6 \cos(101 \cdot 10^3 t).$$

Амплитуды колебаний боковых частот при АМ-колебании зависят от глубины модуляции m , но не зависят от частоты модуляции Ω . Ширина полосы частот, занимаемой АМ-колебанием, также не зависит от m и равна $(\omega + \Omega) - (\omega - \Omega) = 2\Omega$.

Рассмотрим спектры частотно-модулированных (ЧМ) и фазо-модулированных (ФМ) колебаний. Аргумент синусоидально изменяющейся функции $f(t)$ обозначим через $\alpha(t)$:

$$f(t) = A \sin[\alpha(t)]. \quad (a)$$

$\alpha(t)$ можно интерпретировать как угол, на который повернется вращающийся вектор на комплексной плоскости за время t . Угловая частота поворота этого вектора $\omega = \frac{d\alpha(t)}{dt}$. В том случае, когда ω постоянна и равна ω_0 ,

$$\alpha(t) = \int \omega_0 dt = \omega_0 t \quad \text{и} \quad f(t) = A \sin \omega_0 t.$$

При частотной модуляции частота ω изменяется и равна $\omega_0 + \Delta\omega(t)$. При этом

$$\alpha(t) = \int [\omega_0 + \Delta\omega(t)] dt = \omega_0 t + \Delta\omega \int \varphi(t) dt.$$

При $\varphi(t) = \cos \Omega t$

$$\alpha(t) = \omega_0 t + \gamma \sin \Omega t, \quad (б)$$

где $\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$ — глубина модуляции.

Таким образом,

$$\frac{f(t)}{A} = \sin(\omega_0 t + \gamma \sin \Omega t) = \sin \omega_0 t \cos(\gamma \sin \Omega t) + \cos \omega_0 t \sin(\gamma \sin \Omega t).$$

Но

$$\sin(\gamma \sin \Omega t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\gamma) \sin(2n+1) \Omega t;$$

$$\cos(\gamma \sin \Omega t) = J_0(\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma) \cos 2n \Omega t,$$

где $J_k(\gamma)$ — бесселева функция k -порядка от действительного аргумента γ . После преобразований

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{A} = & J_0(\gamma) \sin \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(\gamma) \sin(\omega_0 - k\Omega) t + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\gamma) \sin(\omega_0 + k\Omega) t. \end{aligned} \quad (в)$$

Теоретически полоса частот, занимаемых ЧМ-колебанием, равна бесконечности. Однако если учесть, что с ростом k значение $J_k(\gamma)$ быстро уменьшается, и в равен-

стве (в) отбросить слагаемые рядов, амплитуды которых меньше 0,01, что имеет место при $k \geq \gamma$, то ЧМ-колебание практически занимает полосу частот

$$(\omega_0 + k\Omega) - (\omega_0 - k\Omega) = 2k\Omega \approx 2\gamma\Omega = 2 \frac{\Delta\omega}{\Omega} \cdot \Omega = 2\Delta\omega.$$

Ширина ее зависит от глубины модуляции $\Delta\omega$ и не зависит от частоты модуляции Ω . Амплитуды боковых частот зависят от $\Delta\omega$ и Ω .

При фазовой модуляции угловая частота ω_0 неизменна и меняется только фаза $\psi(t)$. Следовательно, $\alpha(t) = \omega_0 t + \psi(t)$. Приняв $\psi(t) = \psi_m \cos \Omega t$, получим

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + \psi_m \cos \Omega t).$$

ψ_m от частоты Ω не зависит.

Опустив выкладки, найдем, что амплитуды боковых частот зависят от ψ_m , а ширина полосы частот $2k\Omega \approx 2\psi_m\Omega$ — от ψ_m и Ω .

§ 8.16. РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Расчет токов и напряжений в линейных электрических цепях при воздействии на них модулированных колебаний производят путем разложения модулированных колебаний на составляющие, расчета токов и напряжений от каждой составляющей в отдельности и затем суммирования соответствующих токов и напряжений на основании принципа наложения.

В радиотехнике, где широко используют модулированные колебания и требуется знать результаты воздействия их на резонансные системы, разработаны упрощенные методы получения огибающей отклика системы на воздействующее модулированное колебание (см., например, [24]).

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 9. 1. ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ НА ТРИ ОСНОВНЫЕ ГРУППЫ

Нелинейными электрическими цепями переменного тока называют электрические цепи переменного тока, в состав которых входят одно или несколько нелинейных сопротивлений.

Как известно из ч. I учебника, прохождению переменного тока оказывают сопротивление не только активные сопротивления, но и индуктивности и емкости. В соответствии с этим нелинейные сопротивления для переменного тока можно подразделить на три группы: 1) активные, 2) индуктивные и 3) емкостные сопротивления. Каждую из этих групп можно подразделить на управляемые и неуправляемые.

Управляемые нелинейные сопротивления обычно имеют один или несколько управляющих электродов (зажимов) или управляющих обмоток, включаемых в управляющую цепь или цепи, воздействуя на ток или напряжение которых можно управлять величиной сопротивления в главной цепи. При отсутствии специальных управляющих электродов или обмоток управляющий ток или напряжение могут воздействовать на нелинейное сопротивление через электроды или обмотки главной цепи.

§ 9. 2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Наиболее широкое распространение в качестве управляемых нелинейных активных сопротивлений получили трех- (и более) электродные лампы, полупроводниковые триоды (транзисторы) и тиристоры. Свойства, принцип работы, характеристики и применение их рассмотрены в § 9.27—9.43.

Неуправляемыми нелинейными активными сопротивлениями являются электрическая дуга, германиевые и кремниевые, меднозакисные и селеновые выпрямители, тиритовые и вилитовые сопротивления, термисторы, бареттеры, лампы накаливания и др. Основные свойства и вольтамперные характеристики их обсуждались в гл. II.

Нелинейные активные сопротивления можно классифицировать также по степени влияния температуры нагрева сопротивления, обусловленной протекающим по сопротивлению током, на форму вольтамперной характеристики.

Так как тепловые процессы (процессы нагрева и остывания) являются процессами инерционными, то сопротивления, нелинейность вольтамперных характеристик которых в основном обусловлена изменением температуры в результате нагрева протекающим через сопротивления ток, принято называть *инерционными*.

Сопротивления, нелинейность вольтамперных характеристик которых обусловлена иными (не тепловыми) процессами, принято называть *безынерционными* или почти безынерционными.

К группе инерционных сопротивлений относятся электрические лампы накаливания, термисторы, бареттеры; к группе безынерционных или почти безынерционных сопротивлений — электронные лампы, полупроводниковые диоды и триоды.

Если постоянная времени нагрева инерционного сопротивления много больше периода переменного тока, то величина сопротивления за период переменного тока практически не меняется и определяется не мгновенным, а действующим значением переменного тока. Если к нелинейному инерционному сопротивлению подвести синусоидальное напряжение (при условии, что постоянная времени нагрева сопротивления значительно больше периода синусоидального напряжения), то ток через него будет практически синусоидальным.

Можно сказать, что инерционные нелинейные сопротивления занимают промежуточное положение между линейными и нелинейными сопротивлениями. К нелинейным они тяготеют вследствие того, что сопротивление их является функцией действующего значения тока; к линейным — потому, что в установившемся режиме работы сопротивление их для различных моментов времени внутри периода воздействующей на схему э. д. с. остается практически неизменным.

§ 9. 3. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНДУКТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Под нелинейными индуктивными сопротивлениями, или нелинейными индуктивностями, понимают катушки индуктивности с обмотками, намотанными на замкнутых сердечниках из ферромагнитного материала, для которых зависимость магнитного потока в сердечнике от протекающего по обмотке тока нелинейна. Индуктивное сопротивление таких катушек, оказываемое прохождению переменного тока, непостоянно; оно зависит от величины переменного тока.

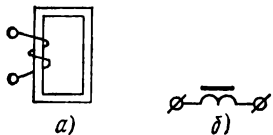


Рис. 9.1

Катушку индуктивности со стальным сердечником в литературе называют иногда дросселем со стальным сердечником.

Нелинейные индуктивности подразделяют на управляемые и неуправляемые, но деление на безынерционные и инерционные на них не распространяется, так как нелинейность их обусловлена свойствами ферромагнитного материала, а не тепловым эффектом.

На электрических схемах нелинейную индуктивность изображают либо в виде замкнутого сердечника с обмоткой, как на рис. 9.1, а, либо в соответствии с рис. 9.1, б.

Сердечники нелинейных индуктивностей при относительно низких частотах делают обычно двух типов: пакетные и спиральные.

Пакетные сердечники состоят из тонких пластин ферромагнитного материала кольцевой или П-, или Ш-образной формы.

Спиральные сердечники изготовляют из тонкой ферромагнитной ленты, по форме в виде туго навитой часовой пружины.

Пластины пакетного сердечника и отдельные витки спирального сердечника изолируют друг от друга эмалевым лаком, жидким стеклом или каким-либо иным изолирующим составом и запекают. Изоляция необходима для уменьшения потерь энергии в сердечнике от вихревых токов (см. § 9.4).

При высоких частотах резко возрастают потери в листовых сердечниках; поэтому сердечники, предназначенные для работы на высоких частотах, выполняют обычно из феррита (о свойствах феррита см. § 3.6, ч. I учебника).

§ 9. 4. ПОТЕРИ В СЕРДЕЧНИКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ОТ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ

Если по катушке индуктивности со стальным сердечником проходит переменный ток, то в сердечнике возникает переменный магнитный поток, под действием которого в листах сердечника образуются вихревые токи. На рис. 9.2 изображен один лист сердечника. Пусть магнитный поток, увеличиваясь, направлен вверх (вдоль листа). В плоскости листа, перпендикулярной магнитному потоку, по закону электромагнитной индукции наводится э. д. с. Эта э. д. с. вызывает в нем ток, который называют вихревым. Контур, по которому замыкается вихревой ток, изображен пунктиром на рис. 9.2. Вихревые токи по закону Ленца стремятся создать поток, встречный по отношению к вызвавшему их потоку.

Потери энергии в листе на вихревые токи пропорциональны квадрату наведенной в контурах листа э. д. с. и обратно пропорциональны сопротивлению контуров. Электродвижущие силы, наводимые в контурах, по которым замыкаются вихревые токи, при заданной ширине листа пропорциональны толщине листа a , амплитудному значению индукции и частоте. В свою очередь сопротивление контура пропорционально периметру контура и удельному сопротивлению. При $b \gg a$ периметр контура почти не зависит от толщины листа. Поэтому потери энергии на вихревые токи пропорциональны квадрату амплитудного значения индукции, квадрату частоты и квадрату толщины листа.

Уменьшить потери в листовом сердечнике на вихревые токи можно двумя путями: 1) изготовлением сердечника из тонких изолированных друг от друга листов (см. § 9.3) и 2) добавлением в ферромагнитный материал примесей, увеличивающих его удельное сопротивление.

При частоте 50 гц толщина листов обычно 0,35—0,5 мм; при высоких частотах — до 0,005 мм.

Кроме потерь от вихревых токов, в сердечнике есть еще потери, обусловленные гистерезисом.

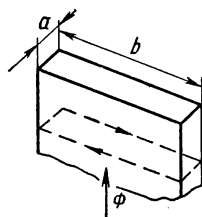


Рис. 9.2

§ 9. 5. ПОТЕРИ НА ГИСТЕРЕЗИС

Из § 3.4 известно, что ферромагнитному материалу присуще явление гистерезиса. Площадь гистерезисной петли в координатах B , H (B — индукция, H — напряженность поля), снятая при достаточно медленном изменении магнитного поля во времени (когда вихревые токи практически отсутствуют), характеризует энергию, выделяющуюся в единице объема ферромагнитного материала за один период переменного тока (за одно перемагничивание). Потери в сердечнике, обусловленные гистерезисом, пропорциональны объему сердечника, первой степени частоты и площади гистерезисной петли. От толщины листов потери на гистерезис не зависят*.

Гистерезисные петли, снятые при достаточно быстром изменении магнитного поля во времени, называют *динамическими*. Динамические петли шире соответствующих статических за счет вихревых токов и магнитной вязкости.

Степень отличия динамической петли от соответствующей статической зависит от скорости перемагничивания (от частоты), удельного электрического сопротивления материала, толщины листов, температуры и от наличия в магнитном потоке высших гармоник.

§ 9. 6. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

В расчетном отношении нелинейную индуктивность рис. 9.1, *a* можно представить в виде схемы рис. 9.3, *a*. В ней параллельно с идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивностью включено сопротивление $R_{г.в}$, потери в котором имитируют потери энергии в сердечнике на гистерезис и вихревые токи,

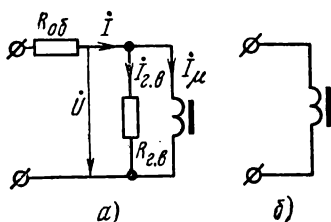


Рис. 9.3

а последовательно включено активное сопротивление самой обмотки $R_{0\delta}$; U — напряжение на нелинейной индуктивности.

Как уже отмечалось, потери энергии на гистерезис и вихревые токи $P_{г.в}$ зависят от качества ферромагнитного материала и толщины листов сердечника.

Если сердечник выполнен из высококачественного магнитного материала, то потери в нем относительно велики, а сопротивление $R_{г.в}$ достаточно мало и ток $I_{г.в} = \frac{U}{R_{г.в}}$ может оказаться соизмеримым с током I_{μ} , протекающим по идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивности; в этом случае ветвь с сопротивлением $R_{г.в}$ необходимо учитывать в расчете.

Если же сердечник изготовлен из тонких листов высококачественного мягкого магнитного материала, то потери в сердечнике малы,

* Явление поверхностного эффекта (см. ч. III учебника) не учитываем.

а сопротивление $R_{г.в} = \frac{U^2}{P_{г.в}}$ очень велико и потому ветвь с сопротивлением $R_{г.в}$ можно не учитывать, т. е. считать, что ее нет.

Часто вводят еще одно упрощение: полагают активное сопротивление обмотки $R_{об}$ настолько небольшим, что с падением напряжения в нем можно не считаться. Аналогичное упрощение часто делалось и при расчете линейных индуктивностей. В этом случае сопротивление катушки со стальным сердечником оказывается чисто индуктивным (соответствующая схема замещения представлена на рис. 9.3, б).

Переход от схемы замещения рис. 9.3, а к схеме замещения рис. 9.3, б вызван стремлением облегчить расчеты цепей. При этом учитывают основной полезный нелинейный эффект — нелинейность между индукцией B и напряженностью H и пренебрегают побочным вредным эффектом — потерями, обусловленными гистерезисом и вихревыми токами в сердечнике.

При периодическом процессе нелинейность между B и H учитывают, ведя расчет по кривой, абсциссы которой равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли (рис. 9.4).

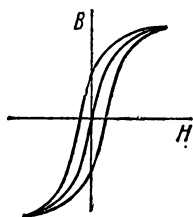


Рис. 9.4

§ 9.7. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЕМКОСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

В обычных конденсаторах обкладки разделены веществом, диэлектрическая проницаемость которого не является функцией напряженности электрического поля. Для них зависимость мгновенного значения заряда q на одной обкладке от мгновенного значения напря-

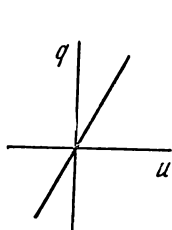


Рис. 9.5

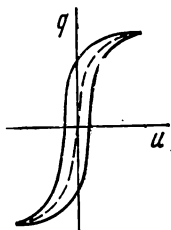


Рис. 9.6

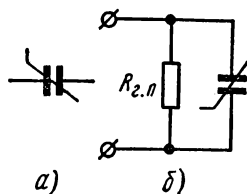


Рис. 9.7

жения u между обкладками (кулонвольтовая характеристика) представляет собой прямую линию (рис. 9.5), а емкость их не зависит от напряжения u . Для нелинейных конденсаторов зависимость q от u нелинейна (рис. 9.6).

Нелинейные конденсаторы называют еще варикондами. На электрических схемах вариконды изображают в соответствии с рис. 9.7, а. Пространство между обкладками вариконда заполняют сегнетодиэ-

лектриком. Сегнетодиэлектриками называют вещества, диэлектрическая проницаемость которых является функцией величины напряженности электрического поля. Название «сегнетодиэлектрики» им присвоено потому, что впервые это свойство было обнаружено у кристаллов сегнетовой соли.

Сегнетодиэлектрики, подобно ферромагнитным веществам, обладают гистерезисом. Электрическим гистерезисом называют явление отставания изменения электрического смещения D от изменения напряженности поля E . Как и в ферромагнитных веществах, площадь гистерезисной петли в координатах D, E при медленном изменении поля характеризует потери на электрический гистерезис в единице объема сегнетодиэлектрика за один период изменения E .

Кроме потерь на гистерезис, в варикондах есть еще потери, обусловленные тем, что проводимость сегнетодиэлектрика не равна нулю, а также вязкостью процессов поляризации.

На схеме замещения вариконд можно представить в виде параллельного соединения идеализированного (без потерь) вариконда и ветви с активным сопротивлением $R_{г.н}$, потери в котором имитируют в расчетном отношении активные потери в вариконде (рис. 9.7, б).

Наличие потерь в варикондах является вредным побочным эффектом. Чем выше качество сегнетодиэлектрика, тем уже петля гистерезиса и меньше потери в нем. Для облегчения исследования свойств электрических цепей, содержащих вариконды, гистерезисом и потерями обычно пренебрегают и зависимость $q = f(u)$ принимают в виде пунктирной кривой рис. 9.6. Абсциссы ее равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли. Лишь при исследовании схем, в основе действия которых лежит явление гистерезиса, например при анализе работы некоторых запоминающих и счетных устройств, гистерезис необходимо учитывать.

§ 9. 8. НЕЛИНЕЙНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАК ГЕНЕРАТОРЫ ВЫСШИХ ГАРМОНИК ТОКА И НАПЯЖЕНИЯ

Если нелинейное сопротивление присоединить к генератору синусоидального напряжения, то протекающий через сопротивление ток

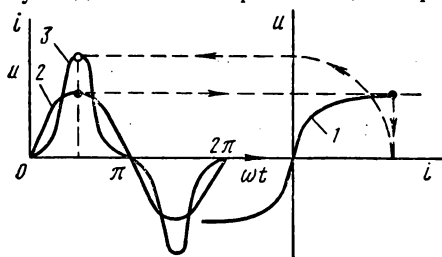


Рис. 9.8

будет иметь несинусоидальную форму и потому нелинейное сопротивление будет являться генератором высших гармоник тока. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим рис. 9.8. На нем кривая 1 — вольтамперная характеристика сопротивления, кривая 2 — синусоидальное напряжение на нем, кривая 3 — ток через сопротивление.

Для построения кривой $i = f(\omega t)$ последовательно придаем ωt значения, например равные $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и т. д.; для каждого из

них находим напряжение u , переносим соответствующее значение u на кривую $u = f(i)$ и из нее определяем значение тока i для взятого момента времени. Найденное значение тока i откладываем на той ординате, которой соответствует выбранный момент времени.

Эти операции показаны на рис. 9.8 стрелками. Так, по точкам строят кривую 3. Она имеет пикообразную форму и может быть разложена на гармоники.

Аналогично, если через нелинейное сопротивление пропустить синусоидальный ток, то напряжение на нем будем иметь несинусоидальную форму. Соответствующие построения приведены на рис. 9.9. Следовательно, нелинейное сопротивление будет являться генератором высших гармоник напряжения.

Амплитуды первой и высших гармоник токов нелинейно зависят от амплитуд первой и высших гармоник напряжений на нелинейных сопротивлениях.

Все это затрудняет анализ и расчет нелинейных цепей и в то же время позволяет осуществить с их помощью ряд важных в практическом отношении преобразований, принципиально невыполнимых с помощью линейных электрических цепей при неизменных во времени параметрах.

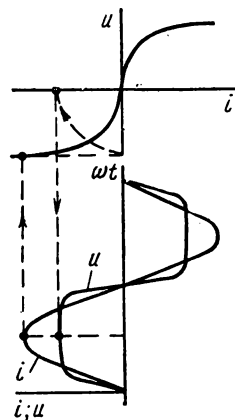


Рис. 9.9

§ 9. 9. ОСНОВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

На рис. 9.10, а схематически изображен четырехполюсник, в состав которого входят одно или несколько нелинейных сопротивлений. Будем называть такой четырехполюсник нелинейным (НЧ).

На рис. 9.10, б представлен нелинейный шестиполюсник (НШ). В от-

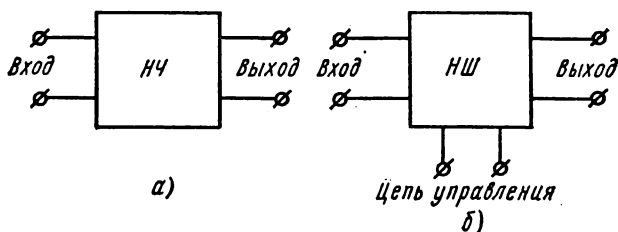


Рис. 9.10

личие от четырехполюсника он имеет еще два зажима («полюса»), к которым присоединяется источник управляющего напряжения или тока.

С помощью нелинейных четырехполюсников и шестиполюсников можно осуществить ряд очень важных преобразований:

1. Преобразовать переменный ток в постоянный. Устройства, предназначенные для этого, называют выпрямителями (см. § 9.54).

2. Преобразовать постоянный ток в переменный с помощью устройств, которые называют автогенераторами (см. § 9.55) и инверторами.

3. Осуществить умножение частоты, т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение, частота которого в несколько раз больше частоты входного напряжения. Четырехполюсники, с помощью которых производят умножение частоты, называют умножителями частоты; устройство, удваивающее частоту, — удвоителем частоты; устройство, утраивающее частоту, — утроителем и т. д.

4. Осуществить деление частоты, т. е. выполнить операцию, обратную умножению частоты. Четырехполюсники, используемые для этого, называют делителями частоты. Работа их здесь не рассматривается; с ней можно ознакомиться, например, по [34].

5. Стабилизировать напряжение или ток, т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение или ток, почти не изменяющийся по величине при значительном изменении величины входного напряжения. Такие четырехполюсники называют стабилизаторами напряжения (или тока). Устройства для стабилизации напряжения в цепях постоянного тока рассмотрены в гл. II, в цепях переменного тока — в § 9.62.

6. Осуществить триггерный эффект, т. е. эффект резкого (скачкообразного) изменения выходной величины при незначительном изменении входной величины. Триггерный эффект рассмотрен в § 9.58 и 9.61.

7. Произвести модуляцию. Как уже говорилось в § 8.15, модуляция есть процесс, при котором амплитуда (фаза или частота) высокочастотного колебания, поступающего на вход четырехполюсника, преобразуется таким образом, что характер изменения ее повторяет характер изменения управляющего низкочастотного сигнала. Устройства, предназначенные для этого, называют модуляторами.

8. Осуществить демодуляцию, т. е. выделить из высокочастотного модулированного колебания запечатленный в нем низкочастотный управляющий сигнал. Устройства для демодуляции называют демодуляторами, или детекторами.

9. Преобразовать желаемым образом форму входного напряжения. Так, например, при подаче на вход нелинейного четырехполюсника напряжения синусоидальной формы на выходе его можно получить напряжение прямоугольной или пикообразной формы.

10. Осуществить усиление напряжения (или тока), т. е. получить на выходе нелинейного устройства напряжение значительно большей величины, чем управляющее напряжение на входе его. Управляющее напряжение может быть постоянного и переменного тока.

С помощью трансформаторов также можно усиливать напряжение, однако в усилителях напряжения на нелинейных сопротивлениях энергия, потребляемая управляющей цепью, может быть в сотни, тысячи и даже сотни тысяч раз меньше энергии на выходе усилителя, тогда как в обычных трансформаторах эти энергии почти равны.

Усилители напряжения на нелинейных сопротивлениях позволяют усиливать не только переменное, но и постоянное напряжение и при этом с плавным изменением коэффициента усиления. Простейший усилитель напряжения постоянного тока рассмотрен в § 2.14.

11. Осуществить усиление мощности, т. е. выделить на выходе устройства (в нагрузке) мощность, значительно большую мощности, поступающей в управляющую цепь.

Процесс усиления мощности требует дополнительных пояснений. Энергия, поступающая на вход усилителя мощности (на вход четырехполосника рис. 9.10, а), доставляется находящимся вне четырехполосника источником сигнала и расходуется на управление режимом работы нелинейного сопротивления, входящего в состав четырехполосника.

Выделяющаяся в нагрузке энергия поступает совсем от иного источника — от источника энергии, либо находящегося внутри рассматриваемого четырехполосника, либо включаемого на выходе четырехполосника последовательно с нагрузкой.

Когда говорят об усилении мощности, то имеют в виду, что приращение мощности, выделяющейся в нагрузке, оказывается больше приращения мощности, потребовавшейся для изменения режима работы нелинейного сопротивления.

12. Осуществить степенное и логарифмическое преобразование входного напряжения и тока.

С помощью нелинейных электрических цепей, кроме перечисленных, можно осуществить и другие нелинейные преобразования. К их числу относится, например, плавное преобразование частоты с помощью нелинейных четырехполосников и шестиполосников, не содержащих подвижных частей. Рассмотрение этого преобразования выходит за рамки курса (с ним можно ознакомиться по [35]).

Нелинейные устройства широко применяют для умножения электрическим путем двух, трех и большего числа функций, а также в электрических счетных и запоминающих устройствах (часть магнитных устройств такого рода рассмотрена в [34]), в качестве нелинейных фильтров, логических устройств и т. п. Несомненно, что по мере развития техники и изучения свойств нелинейных цепей последние будут находить применение для выполнения и других функций.

Многие из перечисленных в данном параграфе типов преобразований (преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, модуляция и демодуляция, усиление тока, напряжения, мощности) осуществляют с помощью нелинейных устройств, и в этом смысле они являются нелинейными преобразованиями. Однако при определенных условиях в относительно небольшом диапазоне изменений входной величины эти преобразователи могут обладать почти линейной зависимостью амплитуды (действующего или среднего значения) выходной величины от амплитуды (действующего или среднего значения) входной величины.

Вне этого диапазона зависимость выходной величины от входной является в той или иной степени (часто в очень значительной) нелинейной.

Для многих других типов преобразователей (например, логарифмических и степенных) зависимость выходной величины от входной не может быть линейной, так как это противоречило бы самому назначению и самому принципу работы преобразователей этого типа.

Если же зависимость выходной величины от входной может быть линейной или близкой к линейной, то в большинстве случаев стремятся выбрать режим работы преобразователя таким образом, чтобы работа его проходила именно на линейном участке. Так поступают, в частности, при использовании электронных, полупроводниковых и магнитных усилителей тока, напряжения, мощности.

§ 9. 10. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ, НАБЛЮДАЕМЫЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

В электрических цепях переменного тока, содержащих нелинейные индуктивности и линейные емкости или нелинейные емкости и линейные индуктивности, а также нелинейные индуктивности и нелинейные емкости, при определенных условиях (далеко не всегда!) могут возникать физические явления, которые не могут возникать в линейных цепях *. Таких явлений довольно много. Ограничимся кратким рассмотрением только некоторых, наиболее важных, из них:

1. Возникновение интенсивных колебаний в цепи на высшей гармонике при отсутствии этой гармоники во входном напряжении.

В линейных цепях возникновение интенсивных колебаний на высшей гармонике может быть только при наличии этой гармоники во входном напряжении.

2. Возникновение субгармонических колебаний.

Под субгармоникой понимают гармонику, частота которой в целое число раз меньше частоты источника э. д. с. Субгармонические колебания представляют собой колебания какой-либо из субгармоник. Чаще всего они наблюдаются на частотах $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{5}$ и т. д. (ω — частота источника э. д. с.).

3. Возникновение колебаний в цепи на гармонике с частотой $\frac{m}{n} \omega$, где m и n — целые числа (ω — частота источника э. д. с.).

4. Зависимость характера установившегося режима в нелинейной цепи переменного тока от предшествовавшего этому режиму состояния схемы и начальной фазы источника э. д. с., от которого питается схема.

Это явление может наблюдаться в нелинейных электрических цепях в зоне существования триггерного эффекта, о котором было упомянуто в § 9.9. Суть явления состоит в том, что при подключении нелинейной резонансной цепи к источнику э. д. с. в ней может возникнуть один из двух возможных режимов. Какой из двух режимов возникнет, зависит от начальной фазы генератора и состояния цепи, предшествовавшего включению (см. § 9.58).

5. Возникновение автомодуляции.

Автомодуляция представляет собой процесс периодического или почти периодического изменения амплитуд токов и напряжений в нелинейных электрических цепях без воздействия на них внешнего модулирующего фактора, т. е. без воздействия на них низкочастотного сигнала.

Перечисленные физические явления имеют место в резонансных цепях только в определенных для каждой схемы диапазонах параметров, которые, как правило, оказываются такими, что практически эти явления наблюдаются сравнительно редко. Кроме того, исследование

* Имеются в виду «обычные» линейные цепи, параметры которых не являются функцией времени. О линейных цепях с непостоянными во времени параметрами см. в приложении Е.

условий возникновения этих явлений часто связано с весьма громоздкими математическими выкладками, поэтому в курсе с достаточной полнотой отразить эти явления трудно. Подробнее можно ознакомиться с этими явлениями по [34] и [35].

§ 9.11. РАЗДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПО СТЕПЕНИ СИММЕТРИИ ХАРАКТЕРИСТИК ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ КООРДИНАТ

Кроме деления на активные, индуктивные и емкостные, управляемые и неуправляемые (а активных — еще на безынерционные и инерционные), нелинейные сопротивления можно классифицировать еще по одному признаку — по степени симметрии характеристик для мгновенных значений относительно осей координат.

Пусть x и y будут величины, характеризующие режим работы нелинейного сопротивления. Условимся через x обозначать величину, откладываемую по оси ординат декартовой системы, а через y — величину, откладываемую по оси абсцисс.

Характеристики, для которых выполняется условие $-y(-x) = y(x)$, принято называть симметричными; характеристики, не удовлетворяющие этому условию, — несимметричными.

Симметричными характеристиками обладают нелинейные индуктивности и нелинейные емкости, а из активных сопротивлений — тиритовые и вилитовые сопротивления, электрическая дуга с однородными электродами и некоторые другие типы сопротивлений.

Однако основные типы нелинейных активных сопротивлений — электронная лампа, полупроводниковый триод (транзистор) и тиристор — имеют несимметричные характеристики.

В ближайших 13 параграфах (исключение составляет § 9.18) рассматриваются основные особенности работы нелинейных сопротивлений с симметричными характеристиками.

Основные особенности работы нелинейных сопротивлений с несимметричными характеристиками — электронной лампы и полупроводникового триода (транзистора) — излагаются в § 9.27—9.43.

§ 9.12. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Для проведения математического анализа нелинейных цепей переменного тока и изучения их общих свойств целесообразно выразить аналитически зависимость между мгновенными значениями u и i для нелинейного активного сопротивления, зависимость между V и I для нелинейной индуктивности, зависимость q и u для нелинейной емкости. Приближенное аналитическое описание характеристик нелинейных сопротивлений принято называть аппроксимацией характеристик.

§ 9.13. АППРОКСИМАЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ СИНУСОМ

При исследовании свойств электрических цепей явлением гистерезиса, как правило, можно пренебречь. Лишь при исследовании схем, в основе действия которых лежит это явление (например, работы запоминающих магнитных устройств с прямоугольной петлей гистерезиса), гистерезис необходимо учитывать.

На рис. 9.11, *a* изображена типичная симметричная характеристика $y = f(x)$.

Для нелинейной индуктивности роль x играет мгновенное значение индукции B ; роль y — мгновенное значение напряженности поля H . Для нелинейной емкости роль u играет напряжение u , роль x — за-

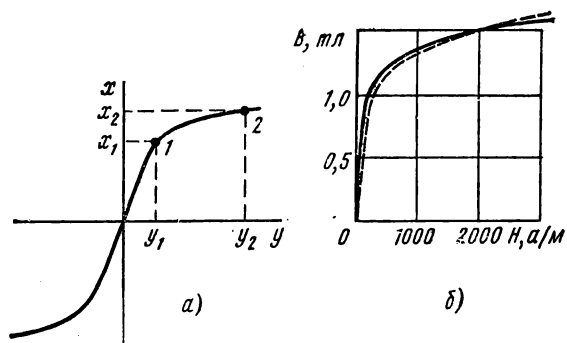


Рис. 9.11

ряд q . Для нелинейных активных сопротивлений (например, тиристовых и вилитовых сопротивлений) роль x играет напряжение, роль y — ток.

Существует большое количество различных аналитических выражений, в той или иной мере пригодных для аналитического описания характеристик нелинейных сопротивлений [34] и [36]. При выборе наиболее подходящего аналитического выражения для функции $y = f(x)$ исходят не только из того, что кривая, описываемая аналитическим выражением, должна достаточно близко всеми своими точками располагаться к опытным путем полученной кривой в предполагаемом диапазоне перемещений рабочей точки на ней, но учитывают и те возможности, которые выбранное аналитическое выражение дает при анализе свойств электрических цепей. В дальнейшем для аналитического описания характеристик симметричных сопротивлений по типу рис. 9.11, *a* будем пользоваться гиперболическим синусом

$$y = \alpha \operatorname{sh} \beta x. \quad (9.1)$$

В этом выражении α и β — числовые коэффициенты; α измеряется в тех же единицах, что и y ; β измеряется в единицах, обратных единицам измерения x , так что произведение βx есть величина

безразмерная. Для определения двух неизвестных коэффициентов α и β следует на полученной опытным путем зависимости $y = f(x)$ в предполагаемом рабочем диапазоне произвольно выбрать две наиболее характерные точки, через которые должна пройти аналитическая кривая, подставить координаты этих точек в уравнение (9.1) и затем решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть координаты этих точек будут: y_1, x_1 и y_2, x_2 (см. рис. 9.11, а). Тогда

$$y_1 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_1; \quad y_2 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_2.$$

Поделим их:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\operatorname{sh} \beta x_2}{\operatorname{sh} \beta x_1}. \quad (9.2)$$

Трансцендентное уравнение (9.2) служит для определения коэффициента β . После этого определяется коэффициент α :

$$\alpha = \frac{y_2}{\operatorname{sh} \beta x_2}. \quad (9.3)$$

Пример 98. Кривая намагничивания трансформаторной стали Э41 изображена на рис. 9.11, б. Найти коэффициенты α и β .

Решение. Выбираем две точки на кривой: $H_1 = 200$ а/м, $B_1 = 1,1$ тл; $H_2 = 2400$ а/м; $B_2 = 1,532$ тл.

По уравнению (9.2) имеем $\frac{\operatorname{sh}(1,532\beta)}{\operatorname{sh}(1,1\beta)} = 12$. Задаемся произвольными значениями β и производим подсчеты:

β	6	5,22	4,57	3,92	3,26
βB_2	9,2	8	7	6	5
βB_1	6,6	5,74	5,03	4,32	3,59
$\frac{\operatorname{sh} \beta B_2}{\operatorname{sh} \beta B_1}$	13,5	9,58	7,25	6,24	4,1

По результатам подсчетов строим кривую $\frac{\operatorname{sh} \beta B_2}{\operatorname{sh} \beta B_1} = f(\beta)$ и по кривой находим $\beta = 5,75$ тл⁻¹. Далее определяем

$$\alpha = \frac{H_2}{\operatorname{sh} \beta B_2} = \frac{2400}{\operatorname{sh} 8,82} = \frac{1200}{1690} = 0,71 \text{ а/м}.$$

Пунктирная кривая рис. 9.11, б построена по уравнению

$$H = 0,71 \operatorname{sh}(5,75 B).$$

§ 9.14. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ

При анализе нелинейных цепей широко пользуются функциями Бесселя, которые являются решением уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (9.4)$$

Функции Бесселя выражаются степенными рядами и для них тоже составлены таблицы. Функцию Бесселя от аргумента x обозначают $J_p(x)$, где индекс p означает

порядок функции Бесселя. Общее выражение для $J_p(x)$ в виде степенного ряда такое:

$$J_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{0! p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1! (p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2! (p+2)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+6}}{3! (p+3)!} + \dots \quad (9.5)$$

Наибольший интерес для гл. IX представляют функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Для получения их в общем выражение (9.5) вместо x следует подставить jx , где $j = \sqrt{-1}$.

Обратим внимание на то, что в табл. 9.1 дана не функция $J_1(jx)$, а функция $-jJ_1(jx)$; вместо функции $J_3(jx)$ — зависимость $jJ_3(jx) = f(x)$. Сделано это потому, что функции $J_1(jx)$, $J_3(jx)$, $J_5(jx)$ без дополнительного множителя j не встречаются.

Так как функция $J_2(jx) = f(x)$ отрицательна, в таблице дана зависимость $-J_2(jx) = f(x)$. При $x = 0$ не равна нулю только функция Бесселя нулевого порядка ($J_0(0) = 1$).

По табл. 9.1 для функций Бесселя построены кривые рис. 9.12.

Из табл. 9.1 и рис. 9.12 видно, что с ростом x значения функций увеличиваются.

Чем выше порядок функций Бесселя, тем меньше ее значение при одном и том же x .

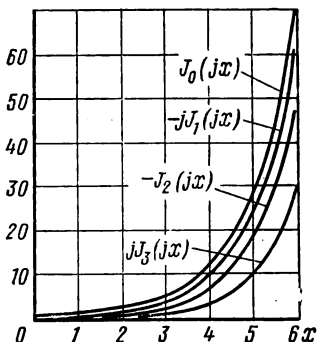


Рис. 9.12

Таблица 9.1

Значения бesselевых функций мнимого аргумента

x	$J_0(jx)$	$-jJ_1(jx)$	$-J_2(jx)$	$jJ_3(jx)$	$J_4(jx)$
0,0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,4	1,04	0,20	0,02	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,67 \cdot 10^{-4}$
0,8	1,16	0,43	0,08	0,01	$0,11 \cdot 10^{-2}$
1,2	1,39	0,72	0,20	0,04	$0,58 \cdot 10^{-2}$
1,6	1,75	1,08	0,39	0,10	0,019
2,0	2,28	1,59	0,69	0,21	0,051
2,4	3,05	2,30	1,13	0,41	0,114
2,8	4,16	3,30	1,80	0,73	0,234
3,2	5,75	4,73	2,79	1,25	0,446
3,6	8,03	6,79	4,25	2,07	0,810
4,0	11,30	9,76	6,42	3,34	1,416
4,4	16,01	14,04	9,63	5,29	2,405
4,8	22,79	20,25	14,35	8,29	3,992
5,2	32,58	29,25	21,33	12,84	6,510
5,6	46,73	42,32	31,62	19,74	10,468
6,0	67,23	61,34	46,78	30,15	16,63
7	168,6	156	124	85,17	51,0
8	427,56	399,87	327,6	236,07	150,5
9	1093,59	1030,91	864,50	646,69	433,3
10	2815,7	2671	2281	1758	1226
11	7288	6948,9	6025	4758	3430
12	18948	18142	15924	12834	9507

§ 9.15. РАЗЛОЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИНУСА И КОСИНУСА ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА В РЯДЫ ФУРЬЕ

Если аргумент x изменяется по периодическому закону, например по закону синуса $x = x_m \sin \omega t$, где x_m — амплитуда колебания, то по периодическому закону будут изменяться и функции $\text{sh}(x_m \sin \omega t)$ и $\text{ch}(x_m \sin \omega t)$. Так как периодические функции можно представить рядами Фурье, разложим в ряд Фурье функции $\text{sh}(x_m \sin \omega t)$ и $\text{ch}(x_m \sin \omega t)$. С этой целью в (9.5) надо вместо x подставить $x_m \sin \omega t$, учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad (9.6)$$

$$\sin^3 \alpha = -\frac{1}{4} \sin 3\alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha, \quad (9.7)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha) \text{ и т. д.}, \quad (9.8)$$

сгруппировать все слагаемые с $\sin \omega t$ и все слагаемые с $\sin 3\omega t$, а также отдельно выделить постоянную составляющую. В результате группировки окажется, что коэффициентами при тригонометрических функциях будут ряды, которыми изображаются функции Бесселя различных порядков от чисто мнимого аргумента jx_m . Окончательно получим:

$$\text{sh}(x_m \sin \omega t) = 2 [-jJ_1(jx_m)] \sin \omega t - 2jJ_3(jx_m) \sin 3\omega t - \dots - 2jJ_5(jx_m) \sin 5\omega t - \dots \quad (9.9)$$

$$\text{ch}(x_m \sin \omega t) = J_0(jx_m) + 2J_2(jx_m) \cos 2\omega t + 2J_4(jx_m) \cos 4\omega t + \dots \quad (9.10)$$

Ряд для $\text{sh}(x_m \sin \omega t)$ состоит только из нечетных гармоник и не имеет постоянной составляющей. Ряд для $\text{ch}(x_m \sin \omega t)$ имеет постоянную составляющую и четные гармоники.

Пример 99. Разложить в ряд Фурье $\text{sh}(4 \sin \omega t)$ и $\text{ch}(4 \sin \omega t)$.

Решение. Значения функций Бесселя берем из таблицы:

$$-jJ_1(j4) = 9,76; \quad jJ_3(j4) = 3,34; \quad J_4(j4) = 1,416;$$

$$-jJ_5(j4) = 0,505; \quad J_0(j4) = 11,3; \quad J_2(j4) = -6,42.$$

В соответствии с формулами (9.9) и (9.10) получаем:

$$\text{sh}(4 \sin \omega t) = 2 \cdot 9,76 \sin \omega t - 2 \cdot 3,34 \sin 3\omega t + 2 \cdot 0,505 \sin 5\omega t - \dots$$

$$\text{ch}(4 \sin \omega t) = 11,3 - 2 \cdot 6,42 \cos 2\omega t + 2 \cdot 1,416 \cos 4\omega t - \dots$$

§ 9.16. РАЗЛОЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СИНУСА ОТ ПОСТОЯННОЙ И СИНУСОИДАЛЬНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ В РЯД ФУРЬЕ

Из § 9.13 известно, что мгновенное значение функции y связано с мгновенным значением x формулой (9.1):

$$y = \alpha \text{sh} \beta x.$$

В этой формуле аргументом гиперболического синуса является не x , как было в § 9.14, а произведение βx . В соответствии с этим для разложения $\text{sh}(\beta x_m \sin \omega t)$ и $\text{ch}(\beta x_m \sin \omega t)$ в формулах (9.9) и (9.10) следует заменить x на βx_m .

Если $x = x_0 + x_m \sin \omega t$, где x_0 — постоянная составляющая и x_m — амплитуда синусоидальной составляющей, то

$$y = \alpha \text{sh}(\beta x_0 + \beta x_m \sin \omega t) = \alpha \text{sh} \beta x_0 \text{ch}(\beta x_m \sin \omega t) + \alpha \text{ch} \beta x_0 \text{sh}(\beta x_m \sin \omega t).$$

Следовательно,

$$y = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 [J_0(j\beta x_m) + 2J_2(j\beta x_m) \cos 2\omega t + 2J_4(j\beta x_m) \cos 4\omega t + \dots] + \alpha \operatorname{ch} \beta x_0 \{ 2[-jJ_1(j\beta x_m)] \sin \omega t - 2jJ_3(j\beta x_m) \sin 3\omega t - \dots \}. \quad (9.11)$$

Из формулы (9.11) следует, что постоянная составляющая функции y

$$y_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 J_0(j\beta x_m). \quad (9.12)$$

Первая гармоника функции y

$$y_1 = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_1(j\beta x_m)] \sin \omega t. \quad (9.13)$$

Вторая гармоника

$$y_2 = 2\alpha \operatorname{sh} \beta x_0 [J_2(j\beta x_m)] \cos 2\omega t. \quad (9.14)$$

Третья гармоника

$$y_3 = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_3(j\beta x_m)] \sin 3\omega t \quad (9.15)$$

и т. д.

Пример 100. Разложить в ряд Фурье функцию

$$\frac{y}{\alpha} = \operatorname{sh} (2 + 4 \sin \omega t).$$

Решение. По табл. 12.1 (стр. 442) находим: $\operatorname{sh} 2 = 3,63$, $\operatorname{ch} 2 = 3,76$. Значения функций Бесселя берем из табл. 9.1. В соответствии с формулой (9.11) имеем

$$\begin{aligned} \frac{y}{\alpha} = \operatorname{sh} (2 + 4 \sin \omega t) = & 3,63 (11,3 - 12,844 \cos 2\omega t + 2,832 \cos 4\omega t - \dots) + \\ & + 3,76 (19,52 \sin \omega t - 6,674 \sin 3\omega t + 1,01 \sin 5\omega t - \dots). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{y_0}{\alpha} = 41,1; \quad \frac{y_{1m}}{\alpha} = 73,4; \quad \frac{y_{2m}}{\alpha} = 46,7.$$

§ 9.17. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Если нелинейное сопротивление с симметричной характеристикой работает в условиях, когда одна из определяющих его состояние величин, например величина x , изменяется во времени по закону $x = x_0 + x_m \sin \omega t$, то в отношении другой определяющей его состояние величины — величины y — можно сделать следующие выводы.

1. Величина постоянной составляющей функции y_0 зависит не только от величины x_0 , но и от x_m . Это следует из формулы (9.12):

$$y_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 J_0(j\beta x_m).$$

2. В кривой $y = f(\omega t)$ появляются четные гармоники, которые исчезают при $x_0 = 0$. Фаза четных гармоник зависит от знака постоянной составляющей (от знака x_0).

3. Путем изменения величины x_0 или y_0 можно изменять амплитуды первой и высших гармоник функций $y(\omega t)$.

Первое из этих свойств поясним графически. Пусть нелинейное сопротивление работает при отсутствии синусоидальной составляющей ($x_m = 0$). Тогда изображением этого процесса на характеристике нелинейного сопротивления будет точка a (рис. 9.13, а). Для нее

$$y = y_0; \quad \beta x = \beta x_0 = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{y_0}{\alpha}. \quad (9.16)$$

Этот результат следует из формулы (9.12), если учесть, что $J_0(0) = 1$.

Напомним, что размерность коэффициента β обратна размерности x , а коэффициент α имеет ту же размерность, что и y ; поэтому произведение βx и частное $\frac{y}{\alpha}$ являются безразмерными величинами.

Если же нелинейное сопротивление будет работать при $x_m \neq 0$, то, для того чтобы постоянную составляющую функции y_0 сохранить прежней, постоянная составляющая x_0 должна быть снижена или снизится сама со значения x'_0 до x''_0 .

Величина $\beta x'_0$ определяется из формулы

$$\beta x'_0 = \text{Ar sh } \frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)}, \quad (9.17)$$

где x'_0 определяется ординатой точки a , расположенной ниже точки b (рис. 9.13, б).

Первое и третье из этих свойств широко используют в теории управляемых нелинейных сопротивлений, второе свойство — в теории умножителей частоты.

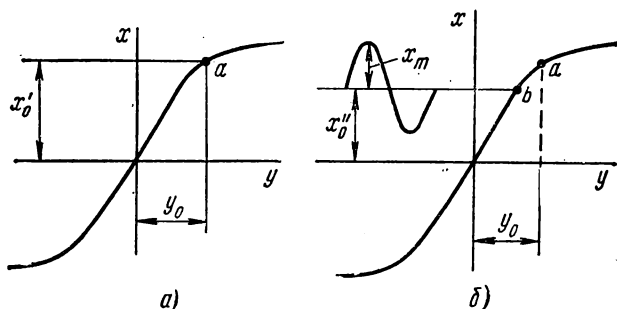


Рис. 9.13

Пример 101. Нелинейное сопротивление с характеристикой $y = \alpha \text{ sh } \beta x$ сначала работало при $\frac{y_0}{\alpha} = 41,1$ и отсутствии переменной составляющей ($\beta x_m = 0$).

Затем режим работы его изменился: постоянная составляющая $\frac{y_0}{\alpha}$ осталась прежней, но появилась переменная составляющая, амплитуда которой $\beta x_m = 4$. Найти постоянные составляющие βx_0 в этих двух режимах.

Решение. В первом режиме

$$\beta x'_0 = \text{Ar sh } 41,1 = 4,41.$$

Во втором режиме

$$\beta x'_0 = \text{Ar sh } \frac{41,1}{J_0(j4)} = \text{Ar sh } 3,63 = 2.$$

Таким образом, при переходе от первого режима ко второму постоянная составляющая βx_0 изменилась с 4,41 до 2, т. е. более чем в 2 раза.

*
* *

В энергетическом отношении общие свойства нелинейной цепи, содержащей одну нелинейную индуктивность (или емкость) с безгистерезисной симметричной характеристикой, в которой действуют генераторы синусоидальных колебаний с частотами f_1 и f_2 и в которой возникают токи и напряжения частот $f_{m,n} = mf_1 + nf_2$ (m и n — простые целые числа; они могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения), для периодических процессов описываются *теоремой Мэнли и Роу*.

Если через $W_{m,n} = \dot{U}_{m,n} i_{m,n}^* + \dot{U}_{m,n}^* i_{m,n}$ обозначить среднюю за период мощность, «втекающую» в нелинейную индуктивность (емкость) на частоте $f_{m,n} = mf_1 + nf_2$, то теорема устанавливает связь между мощностями, «втекающими» в нелинейный элемент на различных частотах. Эту теорему записывают в виде двух соотношений (доказательство см., например, в [34]):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m W_{m,n}}{mf_1 + nf_2} = 0, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n W_{m,n}}{mf_1 + nf_2} = 0. \quad (9.18)$$

§ 9.18. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА НЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Нелинейным сопротивлениям с несимметричными характеристиками также приписаны перечисленные в § 9.17 три общих свойства. Однако в отношении второго свойства между несимметричными и симметричными сопротивлениями имеет место существенное различие: четные гармоники функции y появляются у несимметричного сопротивления и при $x_0 = 0$.

Следует иметь в виду, что формулы, дающие количественную связь между отдельными величинами, для п. 1 и 3 в нелинейных сопротивлениях с симметричными и несимметричными характеристиками различны, поскольку характеристики несимметричных нелинейных сопротивлений не описываются формулой $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$.

§ 9.19. ТИПЫ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

При анализе и расчете электрических цепей с нелинейными сопротивлениями в зависимости от рассматриваемого вопроса используют различные типы характеристик одного и того же нелинейного сопротивления:

- а) характеристики для мгновенных значений;
- б) вольтамперные характеристики по первым гармоникам тока и напряжения;
- в) вольтамперные характеристики для действующих значений.

§ 9.20. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Основным типом характеристик являются характеристики, связывающие мгновенные значения основных определяющих величин: тока и напряжения на нелинейном активном сопротивлении, мгновенные значения индукции и напряженности в сердечнике нелинейной индуктивности, заряда и напряжения на нелинейной емкости. Будем называть их характеристиками для мгновенных значений. Иногда перед этим названием добавляют следующие слова: вольтамперные, веберамперные или кулонвольтные.

§ 9.21. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО ПЕРВЫМ ГАРМОНИКАМ

Под вольтамперными характеристиками по первым гармоникам понимают графическую или аналитическую связь между амплитудой или действующим значением первой гармоники тока и амплитудой

или действующим значением первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении.

Этот тип характеристик подразделяют на две подгруппы.

В первой подгруппе характеристик принимают, что напряжение (поток или заряд) на нелинейном сопротивлении изменяется по синусоидальному закону.

Во второй подгруппе характеристик принимают, что по синусоидальному закону во времени меняется ток через нелинейное активное сопротивление (или напряженность в сердечнике нелинейной индуктивности, или напряжение на нелинейной емкости).

Если воздействующее на нелинейное сопротивление синусоидальное напряжение или синусоидальный ток не содержит постоянной составляющей, то вольтамперная характеристика для первых гармоник данного нелинейного сопротивления изображается какой-то одной кривой. Если же воздействующее напряжение или ток содержат постоянную составляющую, то вольтамперные, веберамперные или кулонвольтные характеристики изображаются семействами кривых, на которых постоянная составляющая тока, напряжения, потока или заряда является параметром.

Этот тип характеристик получают расчетным (аналитическим) или графическим путем по соответствующим характеристикам для мгновенных значений либо снимают экспериментально.

При графическом построении задаются различными значениями амплитуды воздействующего на нелинейное сопротивление напряжения (или тока, индукции, заряда), по точкам строят кривую тока (напряженности, напряжения) в функции времени и путем разложения ее в ряд Фурье находят соответствующие амплитуды первой гармоники тока (напряженности, напряжения).

(Пример графического построения кривой тока в функции времени для управляемой нелинейной индуктивности см. в § 9.24 на рис. 9.17.)

Аналитически построение точек обсуждаемой характеристики производят, используя формулы (9.12) и (9.13) или иные подобные им.

В § 9.23 рассмотрено применение формул (9.12) и (9.13) для получения единых характеристик по первым гармоникам для управляемых симметричных нелинейных сопротивлений.

Для нелинейной индуктивности вольтамперные характеристики по первым гармоникам можно получить опытным путем при помощи схемы рис. 9.14, а, где ИТ1 — источник синусоидальной э. д. с.,

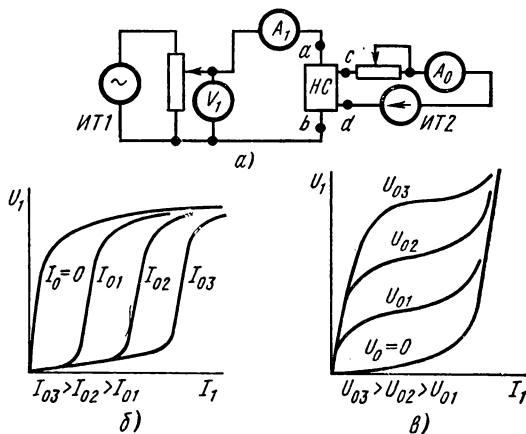


Рис. 9.14

ИТ2 — источник постоянной э. д. с.; *ab* — зажимы управляемой цепи нелинейного сопротивления; *cd* — зажимы управляющей цепи нелинейного сопротивления. Измерительный прибор V_1 реагирует на первую гармонику напряжения, а измерительный прибор A_1 — на первую гармонику тока.

На рис. 9.14, *б* качественно изображены вольтамперные характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам. Параметром на них является ток управления I_0 .

Вольтамперные характеристики по первым гармоникам для управляемой нелинейной емкости изображены на рис. 9.14, *в*. Параметром на них является управляющее постоянное напряжение U_0 .

Снятие характеристик рис. 9.14, *б* производят следующим образом. Устанавливают некоторое произвольное значение тока I_0 в цепи управления, затем плавно повышают напряжение U_1 и для каждого его значения записывают величину тока I_1 . Затем то же проделывают при новом значении I_0 и т. д. Результаты измерений наносят на график, и соответствующие точки соединяют плавной кривой.

Вольтамперные характеристики для первых гармоник используют при расчете установившихся режимов в нелинейных цепях, который называют расчетом по первой гармонике (см. § 9.47).

При расчете применяют вольтамперные характеристики той подгруппы, которая более подходит по условиям работы данного нелинейного сопротивления.

§ 9.22. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ДЕЙСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

Под вольтамперными характеристиками для действующих значений понимают зависимость между действующим значением синусоидального (или несинусоидального) напряжения на нелинейном сопротивлении и действующим значением тока, протекающего через нелинейное сопротивление. Если напряжение или ток содержат постоянную составляющую, то вольтамперные характеристики для действующих значений изображаются семейством кривых, на которых постоянная составляющая тока (потока, напряжения или заряда) является параметром.

Эти характеристики получают графическим или аналитическим путем из характеристик для мгновенных значений или снимают опытным путем с помощью схемы рис. 9.14, *а*, но приборы V_1 и A_1 в этом случае должны измерять действующие значения.

Вольтамперные характеристики для действующих значений зависят от формы напряжения на нелинейном сопротивлении и (или) от формы протекающего через него тока, поэтому необходимо указывать, при каких условиях они получены.

При качественном и грубом количественном анализе полагают, что характеристики, снятые при одной форме напряжения на нелинейном сопротивлении, близки к характеристикам, снятым при другой форме напряжения. В действительности же количественное различие

в характеристиках может оказаться значительным. Вольтамперные характеристики для действующих значений используются при расчете, называемом расчетом по вольтамперным характеристикам для действующих значений (см. § 9.48).

§ 9.23. ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИМ ПУТЕМ ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРАВЛЯЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПО ПЕРВЫМ ГАРМОНИКАМ

Как уже отмечалось, нелинейные индуктивности, нелинейные емкости и большая группа нелинейных активных сопротивлений имеют характеристики для мгновенных значений, которые могут быть приближенно описаны формулой $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$.

Для каждого вида нелинейного сопротивления под x и y следует понимать свои величины: для нелинейной индуктивности: x — магнитная индукция, y — напряженность магнитного поля; для нелинейной емкости: x — заряд, y — напряжение; для нелинейного активного сопротивления: x — напряжение (или ток), y — ток (или напряжение).

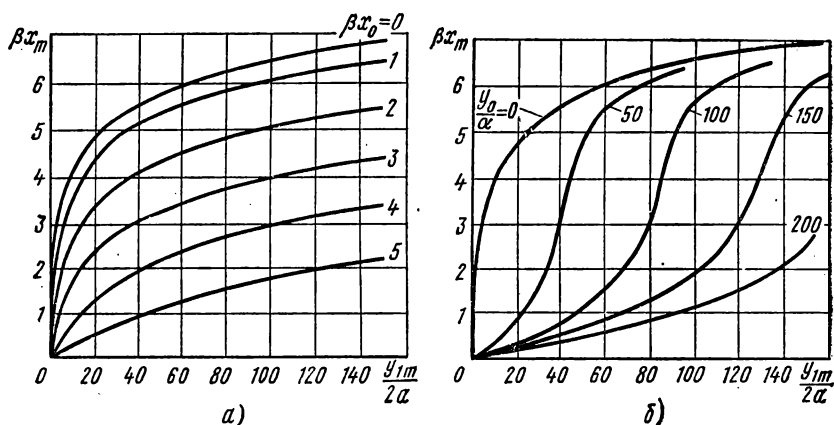


Рис. 9.15

Таким образом, x и y — обобщенные обозначения величин, определяющих работу нелинейного сопротивления.

Для всех перечисленных видов сопротивлений можно построить единые характеристики по первым гармоникам. С этой целью положим $x = x_0 + x_m \sin \omega t$.

Тогда в соответствии с формулой (9.13) амплитуда первой гармоники функции y

$$y_{1m} = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_1(j\beta x_m)]. \quad (9.19)$$

Формула (9.19) устанавливает связь между амплитудой y_{1m} первой гармоники y , амплитудой x_m первой гармоники x и постоянной составляющей x_0 .

На рис. 9.15, а изображены характеристики управляемого нелинейного сопротивления $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\beta x_0 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, построенные по формуле (9.19).

Кривыми рис. 9.15, б можно пользоваться при известном значении параметра βx_0 . Если известно не βx_0 , а постоянная составляющая $\frac{y_0}{\alpha}$, то семейство кривых $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\frac{y_0}{\alpha}$ может быть построено следующим образом: из

формулы (9.12) находим

$$\operatorname{sh} \beta x_0 = \frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)}$$

и вместо $\operatorname{ch} \beta x_0$ в формулу (9.19) подставляем

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \beta x_0} = \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)} \right]^2}.$$

Получаем

$$\frac{y_{1m}}{2\alpha} = \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)} \right]^2} [-jJ_1(j\beta x_m)]. \quad (9.20)$$

Кривые рис. 9.15, б, построенные по формуле (9.20), являются характеристиками управляемого нелинейного сопротивления при значениях параметра $\frac{y_0}{\alpha} = 0, 50, 100, 150$ и 200 . Обратим внимание на то, что $\frac{y_{1m}}{2\alpha}$, βx_m , $\frac{y_0}{\alpha}$ есть безразмерные величины. Если масштабы по осям уменьшить в $\sqrt{2}$ раз, то кривые рис. 9.15, б будут представлять собой характеристики по действующим значениям первых гармоник. Характеристика неуправляемого нелинейного сопротивления изображается одной кривой рис. 9.15, б, для которой $\frac{y_0}{\alpha} = 0$.

§ 9.24. ПРОСТЕЙШАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

Простейшая управляемая нелинейная индуктивность изображена на рис. 9.16. Она состоит из обмоток w_1 и w_0 , намотанных на замкнутый ферромагнитный сердечник. Площадь поперечного сечения сердечника S (м²), длина средней магнитной линии l (м).

Обмотка w_1 включена в цепь переменного тока, и по ней протекает переменный ток i , содержащий первую и высшие гармоники.

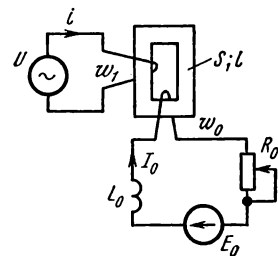
Обмотка управления (или подмагничивания) w_0 присоединена к источнику постоянной э. д. с. E_0 через дополнительную индуктивность L_0 и регулируемое активное сопротивление. По обмотке w_0 протекает постоянный ток

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0},$$

где R_0 — активное сопротивление цепи подмагничивания.

Хотя переменный магнитный поток и наводит в обмотке w_0 переменную э. д. с., но переменного тока по ней практически не протекает, так как дополнительная индуктивность L_0 образует для переменного тока достаточно большое индуктивное сопротивление.

Рис. 9.16



Пусть приложенное к обмотке ω_1 напряжение равно $U_m \cos \omega t$. Это напряжение равно э. д. с. самоиндукции, взятой с обратным знаком (активное сопротивление обмотки ω_1 считаем весьма малым):

$$u = -e_L = \omega_1 \frac{d\Phi}{dt} = U_m \cos \omega t.$$

Отсюда магнитный поток

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega \omega_1} \sin \omega t + \Phi_0 = \Phi_m \sin \omega t + \Phi_0, \quad (9.21)$$

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega \omega_1}, \quad (9.22)$$

где Φ_m — амплитуда переменной составляющей магнитного потока; Φ_0 — постоянная составляющая магнитного потока.

Управляемая нелинейная индуктивность позволяет путем изменения величины постоянного тока I_0 в обмотке ω_0 управлять величиной переменного тока i .

Принцип управления режимом работы нелинейной индуктивности и характер изменения во времени отдельных величин поясним с помощью рис. 9.17, *а* и *б*, где кривые $\Phi = f(Hl)$ представляют собой зависимости потока Φ в сердечнике от произведения напряженности магнитного поля H на длину средней магнитной линии l сердечника.

Построения на рис. 9.17, *а* соответствуют случаю, когда $I_0 = 0$, а на рис. 9.17, *б* — когда $I_0 \neq 0$. На обоих рисунках переменная составляющая потока $\Phi_m \sin \omega t$ одинакова. Для рис. 9.17, *а* постоянная составляющая потока $\Phi_0 = 0$, а для рис. 9.17, *б* $\Phi_0 \neq 0$. На кривых $\Phi = f(\omega t)$, $\Phi = f(Hl)$ и $i\omega_1 = f(\omega t)$ наиболее характерные соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми буквами.

Построения производим в следующей последовательности.

Сначала откладываем значение постоянной составляющей потока Φ_0 и строим кривую $\Phi_m \sin \omega t = f(\omega t)$ (для рис. 9.17, *а* $\Phi_0 = 0$).

Затем произвольно задаемся различными моментами времени, например равными $\omega t = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi$, и для каждого значения ωt с помощью кривой $\Phi = f(Hl)$ находим соответствующие значения Hl и строим кривую $i\omega_1 + I_0\omega_0 = f(\omega t)$ (для рис. 9.17, *а* $I_0\omega_0 = 0$). Ось времени для этой кривой направлена вертикально вниз и проходит через точки *а*, *с*, *е* в нижней части рисунка.

Ток i не содержит постоянной составляющей, так как в цепи обмотки ω_1 нет источника постоянной э. д. с. и выпрямителей.

Прямая $A - A$ рис. 9.17, *б* является нулевой линией для кривой $i\omega_1 = f(\omega t)$. Ток i колеблется около этой прямой так, что среднее значение его за период от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$ равно нулю. Другими словами, проводим прямую $A - A$ так, чтобы площадь S_1 была равна площади S_2 . Расстояние, на которое удалена прямая $A - A$ от оси ординат, равно $I_0\omega_0$.

Полезно сопоставить выводы § 9.17, сделанные в общей форме, с выводами, которые применительно к нелинейной индуктивности можно сделать при рассмотрении рис. 9.17, *а* и *б*. Сопоставимыми величинами являются $x - \Phi$; $y - (i\omega_1 + I_0\omega_0)$; $x_0 - \Phi_0$; $x_m - \Phi_m$; $y_0 - I_0\omega_0$; $y = f(\omega t) - (i\omega_1 + I_0\omega_0) = f(\omega t)$.

В § 9.17 говорилось:

а) что путем изменения величины y_0 можно изменять амплитуды первой и высших гармоник функции $y = f(\omega t)$. Этот вывод подтверждается построенными рис. 9.17, а и б — амплитуды первой и высших гармоник функции $i\omega_1 = f(\omega t)$ зависят от величины $I_0\omega_0$. Чем больше $I_0\omega_0$, тем больше амплитуда первой гармоники тока i ;

б) что y_0 зависит не только от x_0 , но и от x_m . В свою очередь из построений рис. 9.17, а и б следует, что величина $I_0\omega_0$ зависит не только от Φ_0 , но и от Φ_m ;

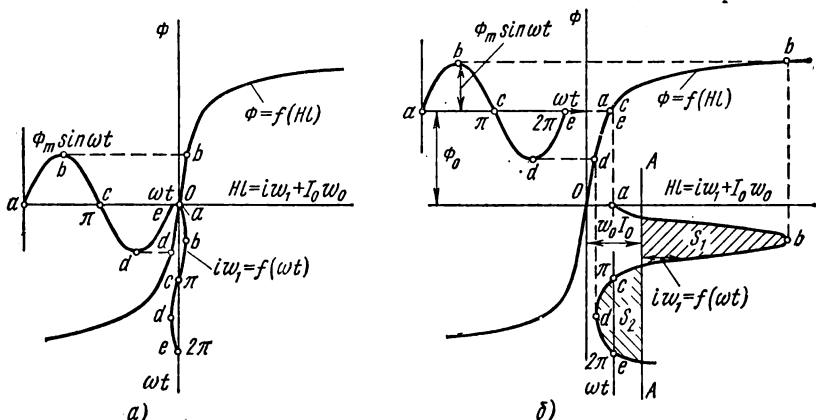


Рис. 9.17

в) что при наличии постоянной составляющей в составе функции x в кривой $y = f(\omega t)$ появляются четные гармоники. Из рис. 9.17, б следует, что при наличии постоянной составляющей Φ_0 в составе магнитного потока Φ в кривой $i\omega_1 = f(\omega t)$ появляются четные гармоники — кривая $i\omega_1 = f(\omega t)$ несимметрична относительно прямой $A - A$.

Запишем потоки через индукции и сечения:

$$\Phi_m = B_m S; \quad (9.23)$$

$$\Phi_0 = B_0 S, \quad (9.24)$$

где B_m — амплитуда переменной составляющей индукции;

B_0 — постоянная составляющая индукции.

Из формул (9.21) и (9.23) следует, что

$$B_m = \frac{U_m}{\omega \omega_1 S}. \quad (9.25)$$

Если магнитную индукцию измерять в гауссах, S — в см^2 , U_m заменить на $U \sqrt{2}$, где U — действующее значение напряжения на обмотке ω_1 , то

$$B_m = \frac{\sqrt{2}U \cdot 10^8}{2\pi f \omega_1 S} = \frac{U \cdot 10^8}{4,44 f \omega_1 S}. \quad (9.26)$$

Формула (9.25) дает возможность найти амплитуду переменной составляющей магнитной индукции по амплитуде синусоидального напряжения U_m , частоте f , числу витков ω_1 и сечению S .

По закону полного тока, произведение напряженности поля H на длину средней магнитной линии l должно равняться алгебраической сумме м. д. с. Следовательно,

$$i\omega_1 + I_0\omega_0 = Hl. \quad (9.27)$$

Так как ток i содержит первую и высшие гармоники, то уравнение (9.27) распадается на ряд уравнений: на уравнение для постоянных составляющих, на уравнение для первой гармоники, второй гармоники и т. д.

Уравнение для постоянных составляющих

$$I_0\omega_0 = H_0l, \quad (9.28)$$

где H_0 — постоянная составляющая напряженности поля.

Переменный ток i содержит первую, вторую и другие высшие гармоники, но постоянной составляющей не содержит, так как в цепи обмотки ω_1 нет источника постоянной э. д. с. и выпрямителей.

Уравнение для первой гармоники

$$I_{1m}\omega_1 = H_{1m}l, \quad (9.29)$$

где I_{1m} — амплитуда первой гармоники тока i ;

H_{1m} — амплитуда первой гармоники напряженности поля.

Аналогично,

$$I_{2m}\omega_1 = H_{2m}l. \quad (9.30)$$

Из (9.28) — (9.29) следует, что

$$H_0 = \frac{I_0\omega_0}{l}, \quad (9.31)$$

$$H_{1m} = \frac{I_{1m}\omega_1}{l}, \quad (9.32)$$

$$H_{2m} = \frac{I_{2m}\omega_1}{l} \quad (9.33)$$

и т. д.

Формула (9.31) дает возможность определить постоянную составляющую напряженности поля H_0 через постоянную составляющую тока I_0 . Формула (9.32) позволяет найти H_{1m} через I_{1m} и т. д.

§ 9.25. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЯЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ПО ПЕРВЫМ ГАРМОНИКАМ

Под вольтамперными характеристиками управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники переменного напряжения U_1 на обмотке ω_1 нелинейной индуктивности от действующего значения первой гармоники переменного тока I_1 при постоянном токе I_0 , взятом в качестве параметра.

Как уже говорилось в § 9.21, вольтамперные характеристики нелинейной индуктивности можно получить либо опытным путем с помощью схемы рис. 2.14, а, либо расчетным путем.

Рассмотрим расчетный путь, основанный на использовании обобщенных характеристик, о чем говорилось в § 9.23.

Примем, что зависимость между мгновенным значением напряженности магнитного поля H и мгновенным значением магнитной индукции B выражается гиперболическим синусом:

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B. \quad (9.34)$$

В формуле (9.34) H играет ту же роль, что y в формуле (9.1), а B — ту же, что и x .

На основании аналогии между формулами (9.34) и (9.1) ясно, что характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам будут полностью совпадать с характеристиками рис. 9.15, б, только необходимо βx_m заменить на βB_m , $\frac{y_{1m}}{2\alpha}$ — на $\frac{H_{1m}}{2\alpha}$ и параметр $\frac{y_0}{\alpha}$ — на $\frac{H_0}{\alpha}$.

Из формулы (9.25) следует, что

$$\beta B_m = \frac{\beta U_m}{\omega \omega_1 S} = \frac{\beta \sqrt{2} U}{\omega \omega_1 S},$$

или

$$U = \beta B_m \frac{\omega \omega_1 S}{\beta \sqrt{2}}. \quad (9.35)$$

Кроме того, из (9.32) имеем

$$I_{1m} = \sqrt{2} I_1 = \frac{H_{1m} l}{\omega_1}. \quad (9.36)$$

Следовательно,

$$I_1 = \frac{H_{1m}}{2\alpha} \frac{\alpha l \sqrt{2}}{\omega_1}. \quad (9.37)$$

На основании формулы (9.31)

$$I_0 = \frac{H_0}{\alpha} \frac{\alpha l}{\omega_0}. \quad (9.38)$$

Таким образом, для перехода от семейства кривых в безразмерных единицах $\beta B_m = \left(\frac{H_{1m}}{2\alpha} \right)$ при параметре $\frac{H_0}{\alpha}$ к семейству кривых $U_1 = f(I_1)$ при параметре I_0 надо масштаб по оси ординат изменить в $\frac{\omega \omega_1 S}{\beta \sqrt{2}}$ раз, масштаб по оси абсцисс — в $\frac{\alpha l \sqrt{2}}{\omega_1}$ раз и значения параметра — в $\frac{\alpha l}{\omega_0}$ раз.

Пример 102. Управляемая нелинейная индуктивность рис. 9.16 имеет следующие данные: $S = 2,2 \text{ см}^2$; $l = 25 \text{ см}$; $\omega_1 = 250$; $\omega_0 = 1775$.

Аналитическое выражение кривой намагничивания

$$H = 0,71 \operatorname{sh} (5,75 B).$$

Воспользовавшись кривыми $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\frac{y_0}{\alpha}$ (см. рис. 9.15, б), построить для нее семейство в а. х. по первым гармоникам $U_1 = f(I_1)$ при параметре I_0 .

Решение. Подсчитываем коэффициент для перехода от βx_m к напряжению U :

$$\frac{\omega \omega_1 S}{\beta \sqrt{2}} = \frac{314 \cdot 250 \cdot 2,2 \cdot 10^{-4}}{5,75 \sqrt{2}} = 2,13.$$

Таким образом, при переходе от βx_m к напряжению U масштаб по оси ординат на рис. 9.15, б должен быть увеличен в 2,13 раза. Определяем коэффициент для

перехода от $\frac{H_{1m}}{2\alpha}$ к действующему значению первой гармоники тока:

$$\frac{\alpha \sqrt{2}}{\omega_1} = \frac{0,71 \cdot 0,25 \sqrt{2}}{250} = 10^{-3}.$$

Следовательно, масштаб по оси абсцисс должен быть изменен в 10^{-3} раз. Коэффициент для перехода от $\frac{H_0}{\alpha}$ к току I_0 равен

$$\frac{\alpha l}{\omega_0} = \frac{0,71 \cdot 0,25}{1775} = 10^{-4}.$$

Семейство в. а. х. изображено на рис. 9.18.

В литературе, посвященной электрическим цепям с нелинейными индуктивностями, используют термин *индуктивное сопротивление нелинейной индуктивности по первой гармонике*.

Под индуктивным сопротивлением по первой гармонике понимают отношение действующего значения первой гармоники напряжения U_1 на зажимах обмотки нелинейной индуктивности, включенной в цепь переменного тока, к действующему значению первой гармоники тока I_1 , протекающего через эту обмотку:

$$X_1 = \frac{U_1}{I_1},$$

где X_1 — функция величины напряжения U_1 и величины тока подмагничивания I_0 .

Изменение X_1 в функции от U_1 при $I_0 = \text{const}$ и X_1 в функции от I_0 при $U_1 = \text{const}$ можно проанализировать, воспользовавшись кривыми рис. 9.18. Так, если принять $U_1 = 8,52$ в, то при $I_0 = 0$ $I_1 = 0,01$ а и, следовательно,

$$X_1 = \frac{8,52}{0,01} = 852 \text{ ом},$$

при $I_0 = 0,01$ а

$$X_1 = \frac{8,52}{0,084} = 101 \text{ ом};$$

при $I_0 = 0,015$ а

$$X_1 = \frac{8,52}{0,128} = 66,5 \text{ ом}.$$

Таким образом, изменяя величину тока подмагничивания I_0 , можно управлять величиной сопротивления X_1 .

Пример 103. Обмотка ω_1 управляемой индуктивности примера 101 подключена к синусоидальному напряжению $U = 12,2$ в ($f = 50$ гц). Обмотка управления ω_0 подключена к источнику постоянной э. д. с. $E_0 = 1$ в. Активное сопротивление цепи подмагничивания $R_0 = 50$ ом. Определить амплитуду переменной составляющей B_m и постоянную составляющую B_0 магнитной индукции.

Решение. По формуле (9.25),

$$B_m = \frac{12,2 \sqrt{2}}{2\pi \cdot 50 \cdot 250 \cdot 2,2 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ тл}; \quad \beta B_m = 5,75.$$

Постоянная составляющая тока

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ а}.$$

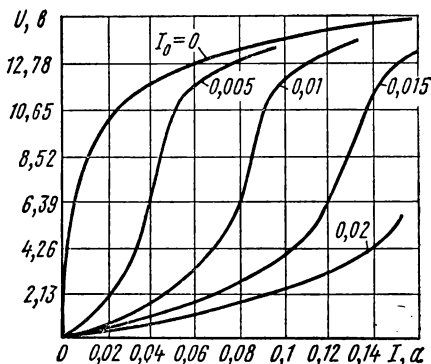


Рис. 9.18

Постоянная составляющая напряженности поля

$$H_0 = \frac{I_0 \omega_0}{l} = 141,5 \text{ а/м.}$$

Параметр

$$\frac{H_0}{\alpha} = \frac{141,5}{0,71} = 200.$$

По формуле (9.17),

$$\beta B_0 = \text{Ar sh } \frac{200}{J_0(j5,75)} = 1,86;$$

$$B_0 = \frac{\beta B_0}{\beta} = \frac{1,86}{5,75} = 0,324 \text{ тл.}$$

§ 9.26. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЯЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТИ ПО ПЕРВЫМ ГАРМОНИКАМ

Кулонвольтную характеристику нелинейной емкости приближенно можно описать гиперболическим синусом:

$$u = \alpha \text{ sh } \beta q. \quad (9.39)$$

Пусть заряд

$$q = Q_0 + Q_m \sin \omega t,$$

где Q_0 — постоянная составляющая заряда;

Q_m — амплитуда первой гармоники заряда.

При этом напряжение на емкости будет иметь постоянную составляющую U_0 , а также первую и высшие гармоники. Формулы (9.12)—(9.15) можно распространить на нелинейную емкость, если заменить y_0 на U_0 ; y_{1m} на U_{1m} ; x_m на Q_m и x_0 на Q_0 . В соответствии с этим постоянная составляющая напряжения на емкости

$$U_0 = \alpha \text{ sh } \beta Q_0 J_0(j\beta Q_m). \quad (9.40)$$

Первая гармоника напряжения на емкости равна

$$2\alpha \text{ ch } \beta Q_0 [-jJ_1(j\beta Q_m)] \sin \omega t.$$

Ток через емкость равен $\frac{dq}{dt}$. Следовательно, первую гармонику тока через емкость можно записать так:

$$\frac{d}{dt} (Q_m \sin \omega t) = \omega Q_m \cos \omega t.$$

Ее амплитуда

$$\omega Q_m = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta},$$

а действующие значения — в $\sqrt{2}$ раз меньше:

$$I_1 = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta \sqrt{2}}. \quad (9.41)$$

Под вольтамперными характеристиками управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники тока через емкость I_1 от действующего значения первой гармоники напряжения U_1 при параметре U_0 .

На основании записанного соответствия между U_0 и y_0 , y_{1m} и U_{1m} и т. д. можно утверждать, что семейство кривых

$$\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$$

при параметре $\frac{U_0}{\alpha}$ полностью повторяет семейство кривых

$$\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$$

при параметре $\frac{y_0}{\alpha}$, изображенное на рис. 9.15, б.

Для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ к семейству вольтамперных характеристик управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам надо учесть формулу (9.41), учесть, что действующее значение первой гармоники напряжения на емкости

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{2\alpha} \alpha \sqrt{2} \quad \text{и} \quad U_0 = \frac{U_0}{\alpha} \alpha.$$

Другими словами, для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\frac{U_0}{\alpha}$ к семейству кривых $I_1 = f(U_1)$ при параметре U_0 необходимо масштаб

по оси ординат изменить в $\frac{\omega}{\beta \sqrt{2}}$ раз, по оси абсцисс — в $\alpha \sqrt{2}$ раз и параметр — в α раз. Подобно тому, как для нелинейной индуктивности вводят понятие индуктивного сопротивления по первой гармонике (см. § 9.25), для нелинейной емкости вводят понятие об *емкостном сопротивлении по первой гармонике*:

$$X_1 = \frac{U_1}{I_1},$$

где U_1 — действующее значение первой гармоники напряжения на нелинейной емкости;

I_1 — действующее значение первой гармоники тока через нелинейную емкость;
 X_1 — функция величины U_1 и величины U_0 .

§ 9.27. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УСТРОЙСТВЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДОВ

В настоящее время большинство полупроводниковых триодов (транзисторов) выполняют из германия или кремния.

Область полупроводникового триода, образованная германием, в который добавлены примеси, легко отдающие электроны (фосфор, сурьма, мышьяк), называют *n*-областью (*n* — первая буква слова *negativ*). Название обусловлено тем, что электропроводность *n*-области создается в основном носителями отрицательных зарядов.

В результате добавления к германию ничтожного количества примесей, имеющих на внешней орбите на один электрон меньше, чем германий (бора, алюминия, галия или индия), образуется избыток носителей положительных зарядов. Область триода с избытком носителей положительных зарядов называют *p*-областью (*p* — первая буква слова *positiv*), электропроводность ее обусловлена в основном носителями положительных зарядов.

Носителями положительных зарядов в полупроводниках являются дырки. Дырками называют незаполненные валентные связи атомов. Дырки способны перемещаться по кристаллической решетке так, как будто они являются положительными зарядами.

Полупроводниковый триод типа $p-n-p$ представляет собой кристалл германия (p -германий), в середине которого имеется весьма тонкая n -прослойка (толщиной 0,02—0,025 мм) (рис. 9.19, а). В менее распространенном и не рассматриваемом здесь типе триода $n-p-n$ средней областью является p -область, а крайними — n -области.

Знаками «+» в p -области условно обозначают носители положительных зарядов, знаками «-» в n -области — носители отрицательных зарядов. Переходный слой между p - и n -областями (таких слоев в триоде два) обладает односторонней проводимостью. Ток через этот слой может течь практически только в том случае, если потенциал p -области выше потенциала n -области.

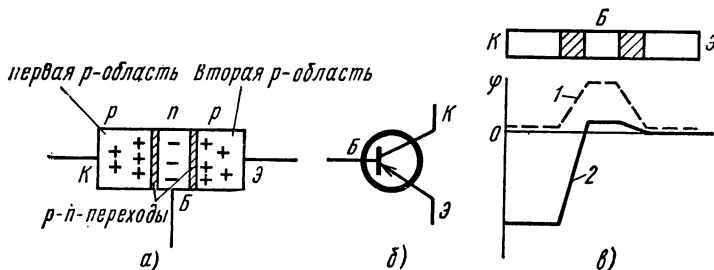


Рис. 9.19

Триоды делятся на плоскостные и точечные. У плоскостных триодов p - и n -области переходят одна в другую через относительно большую площадь. У точечных триодов переход p -области в n -область происходит в месте точечного контакта этих областей, т. е. площадь перехода одной области в другую у точечных триодов очень мала.

В настоящее время применяют главным образом плоскостные триоды.

Триод имеет три вывода. Первый вывод делают от первой p -области и называют коллектором (K), второй вывод — от второй p -области и называют эмиттером ($Э$), третий вывод — от n -области и называют базой ($Б$). На электрических схемах триод изображают как показано на рис. 9.19, б.

§ 9.28. ТРИ ОСНОВНЫХ СПОСОБА ВКЛЮЧЕНИЯ ТРИОДОВ В СХЕМУ

Различают три основных способа включения триодов в схему в зависимости от того, какой из электродов триода является общим для управляющей и управляемой цепей. На рис. 9.20, а изображена схема с общей базой, на рис. 9.20, б — схема с общим эмиттером и на рис. 9.20, в — с общим коллектором.

Во всех схемах E_n — источник э. д. с. в цепи нагрузки; E_y — источник э. д. с. в цепи управления. Для всех схем, в которых используют триоды типа $p-n-p$, полярность источников э. д. с. должна быть такой, чтобы коллектор имел отрицательный потенциал по отношению к базе, а эмиттер — положительный потенциал по отношению к базе.

§ 9.29. ПРИНЦИП РАБОТЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТРИОДА В КАЧЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим принцип работы триода в схеме с общей базой (см. рис. 9.20, а).

В переходном слое между эмиттером и базой и в переходном слое между базой и коллектором имеются объемные заряды (на рис. 9.19, а они не показаны). В p -области объемные заряды отрицательны, а в n -области — положительные.

Объемные заряды в каждом переходном слое создают электрическое поле, вектор напряженности которого направлен от n -области к p -области, т. е. это поле препятствует движению носителей положительных зарядов из p -области в n -область и движению носителей отрицательных зарядов из n -области в p -область.

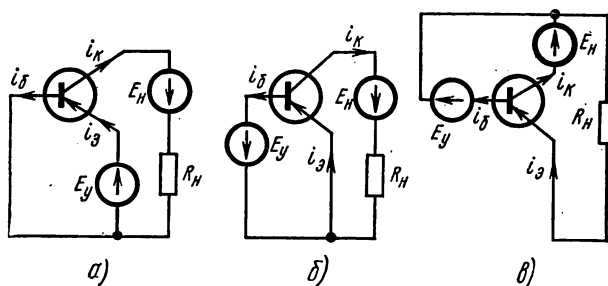


Рис. 9.20

Разность потенциалов на переходном слое между p - и n -областями называют потенциальным барьером. Величины потенциальных барьеров зависят от величины и полярности каждой из э. д. с., включенных в схему.

Так, включение э. д. с. E_y в схеме рис. 9.20, а приводит к уменьшению потенциала барьера между эмиттером и базой по сравнению с разностью потенциалов на этом слое, когда э. д. с. E_y не включена. В свою очередь включение э. д. с. E_n приводит к увеличению потенциального барьера между базой и коллектором по сравнению с величиной разности потенциалов на этом слое, когда E_n не включена.

Объясняется это тем, что результирующая напряженность поля на переходном слое коллектор — база при наличии э. д. с. E_n равна сумме напряженностей от объемных зарядов и от э. д. с. E_n , тогда как на переходном слое эмиттер — база результирующая напряженность поля при наличии э. д. с. E_y равна разности напряженностей от объемных зарядов и от э. д. с. E_y .

Кривая 1 рис. 9.19, в — зависимость изменения потенциала вдоль триода при отсутствии э. д. с. E_n и E_y , кривая 2 — при наличии э. д. с. E_n и E_y . При сниженном потенциальном барьере между эмиттером и базой энергетический уровень части носителей зарядов оказывается достаточным для того, чтобы от эмиттера к базе, соединенной с отри-

кательным полюсом э. д. с. E_y , двигались дырки (носители положительных зарядов)*.

Хотя в n -области при этом и происходит частичная рекомбинация положительных и отрицательных зарядов, однако благодаря малой толщине n -слоя большая часть носителей положительных зарядов успевает продрейфовать к переходному слою между базой и коллектором. В переходном слое между базой и коллектором носители положительных зарядов оказываются под воздействием сильного электрического поля, образованного источником э. д. с. E_n (обычно $E_n \gg E_y$). Под действием этого поля носители положительных зарядов вытягиваются в область коллектора и движутся к электроду коллектора. Таким образом, большая часть носителей положительных зарядов, вышедших из эмиттера и прошедших в n -область, устремляется к коллектору (потенциал коллектора отрицателен по отношению к потенциалу базы и к потенциалу эмиттера).

В результате к электроду базы подходит лишь незначительное количество носителей положительных зарядов из числа тех, которые вышли из области эмиттера и прошли в область базы.

При принятых на рис. 9.20, a положительных направлениях для токов ток эмиттера $i_э$ равен сумме тока коллектора $i_к$ и тока базы $i_б$:

$$i_э = i_к + i_б.$$

Отношение тока коллектора к току эмиттера принято обозначать через α :

$$\alpha = \frac{i_к}{i_э}.$$

В плоскостных триодах $\alpha = 0,95—0,98$ и зависит от режима работы триода. В точечных триодах α может быть и больше единицы. Полупроводниковый триод является управляемым активным сопротивлением. В нем величиной коллекторного тока и величиной падения напряжения между электродами коллекторной цепи можно управлять путем изменения величины э. д. с. E_y .

Следует иметь в виду, что при изменении полярности э. д. с. E_n в схеме рис. 9.20, a триод теряет свойство управляемости и на участке между базой и коллектором работает как обычный неуправляемый диод. Этот режим является ненормальным режимом работы триода.

§ 9.30. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРИОДОВ

Свойства каждого триода вполне определяются двумя семействами его вольтамперных характеристик. Первое семейство характеристик — зависимость тока выходной цепи от напряжения между электродами триода, включенными в выходную цепь, при каком-либо из остальных токов триода, взятом в качестве параметра. В качестве параметра

* Небольшое количество отрицательных зарядов движется при этом от базы к эмиттеру, но ток, создаваемый ими, относительно мал.

может быть взята и какая-либо другая величина, например напряжение между электродами триода, включенными в цепь управления. Это семейство описывает свойства триода по отношению к выходной цепи. Второе семейство характеристик — зависимость тока входной цепи (цепи управления) от напряжения между электродами триода, включенными во входную цепь, при напряжении между электродами триода, включенными в выходную цепь (или при токе выходной цепи, взятом в качестве параметра). Это семейство характеристик описывает свойства триода по отношению к цепи управления.

На рис. 9.21, *а* качественно изображено семейство выходных характеристик $i_k = f(u_{эк})$ при параметре $i_э$ для схемы с общим эмиттером (см. рис. 9.20, *б*). Правее вертикальной пунктирной прямой *А — А* кривые начинают круто подниматься; это свидетельствует

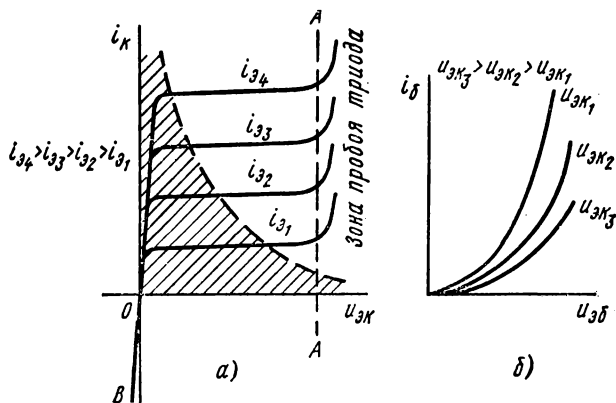


Рис. 9.21

о том, что в данной зоне может произойти пробой триода. Поэтому в зоне правее прямой *А — А* работать нельзя.

Расположенная в третьем квадранте кривая *ОВ* иллюстрирует потерю управляемости триода при изменении полярности э. д. с. в выходной цепи.

При протекании тока по триоду он нагревается выделяющимся в нем теплом. Каждый триод в зависимости от размеров и условий охлаждения может отдавать в окружающее пространство определенное количество тепла. Допустимое количество выделяющегося в триоде тепла характеризуется так называемой мощностью рассеяния $p_k = u_{эк} i_k$ (дается в каталогах). На рис. 9.21, *а* пунктиром нанесена гипербола $i_k = \frac{p_k}{u_{эк}} = f(u_{эк})$. Триод не перегревается в условиях длительного режима в том случае, если рабочая точка находится внутри заштрихованной области на рис. 9.21, *а* (кратковременно можно работать и в области, находящейся выше пунктирной кривой). На рис. 9.21, *б* качественно изображено семейство входных характеристик триода $i_б = f(u_{эб})$ при параметре $u_{эк}$ в схеме с общим эмиттером (см. рис. 9.20, *б*).

Важно обратить внимание на то, что любой ток триода (например, i_k или i_6 является функцией не одной, а двух переменных. Так, ток i_k является функцией $u_{эк}$ и i_3 ; ток i_6 есть функция $u_{эб}$ и $u_{эк}$. (Это положение будет учтено в § 9.34.)

Полупроводниковый триод может быть использован в качестве усилителя тока, усилителя напряжения и усилителя мощности.

§ 9.31. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ ТРИОД В КАЧЕСТВЕ УСИЛИТЕЛЯ ТОКА

Полупроводниковый триод (транзистор) может служить усилителем тока тогда, когда приращение (Δ) тока управляемой цепи (той, где включена э. д. с. E_H) во много раз больше приращения тока управляющей цепи (той, где включена э. д. с. E_Y). Из трех схем рис. 9.20 в качестве усилителя тока могут быть использованы две: схема с общим эмиттером (см. рис. 9.20, б) и схема с общим коллектором (см. рис. 9.20, в). В обеих схемах током управления является ток базы i_6 . Током управляемой цепи в схеме с общим эмиттером является ток коллектора i_k , а в схеме с общим коллектором — ток эмиттера i_3 .

Так как $i_k = \alpha i_3$ (см. § 9.29) и в то же время

$$i_3 = i_k + i_6,$$

то

$$i_6 = i_3 - i_k = (1 - \alpha) i_3.$$

Как уже говорилось в § 9.29, коэффициент α зависит от режима работы триода, т. е. от величины токов триода, и несколько изменяется при переходе от одного режима работы триода к другому.

Однако при нахождении связи между малыми приращениями токов можно в первом приближении принять $\alpha = \text{const}$ и тогда

$$\Delta i_k = \alpha \Delta i_3$$

и

$$\Delta i_6 = (1 - \alpha) \Delta i_3.$$

Коэффициент усиления по току k_i равен отношению приращения тока на выходе к приращению тока на входе. Коэффициент усиления по току для схемы с общим эмиттером, где выходным током является i_k , а входным i_6 ,

$$k_i = \frac{\Delta i_k}{\Delta i_6} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Коэффициент усиления по току для схемы с общим коллектором, где выходной ток i_3 , а входной i_6 ,

$$k_i = \frac{\Delta i_3}{\Delta i_6} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Так как для плоскостных триодов коэффициент $\alpha = 0,95-0,98$, то $k_i \approx 19-50$.

§ 9.32. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ ТРИОД В КАЧЕСТВЕ УСИЛИТЕЛЯ НАПЯЖЕНИЯ

При работе полупроводникового триода (транзистора) в качестве усилителя напряжения важно, чтобы приращение напряжения на нагрузке $\Delta u_{\text{вых}}$, включенной в выходную цепь, было больше приращения напряжения на входе управляющей цепи $\Delta u_{\text{вх}}$.

Коэффициент усиления по напряжению $k_u = \frac{\Delta u_{\text{вых}}}{\Delta u_{\text{вх}}}$. При использовании триода в качестве усилителя напряжения его включают либо по схеме с общей базой (см. рис. 9.20, а), либо по схеме с общим эмиттером (рис. 9.20, б).

Качественно покажем, что коэффициент усиления по напряжению для обеих схем может достигать значений порядка нескольких сотен. С этой целью обратим внимание на два положения: на соотношение между входным и выходным сопротивлениями триода и на соотношение между сопротивлением нагрузки и выходным сопротивлением триода.

1. *Соотношение между входным и выходным сопротивлениями триода.* Входное сопротивление триода $R_{\text{вх}}$ равно отношению приращения напряжения на входных зажимах триода к приращению входного тока.

Выходное сопротивление триода $R_{\text{вых}}$ равно отношению приращения напряжения на выходных зажимах триода к приращению выходного тока.

В схеме с общей базой

$$R_{\text{вх}} = R_{\text{вх}, \text{эб}} = \frac{\Delta u_{\text{эб}}}{\Delta i_{\text{э}}};$$

$$R_{\text{вых}} = R_{\text{вых}, \text{эк}} = \frac{\Delta u_{\text{эк}}}{\Delta i_{\text{к}}}.$$

Для схемы с общей базой $R_{\text{вых}}$ оказывается примерно на 2 порядка больше, чем $R_{\text{вх}}$.

В схеме с общим эмиттером

$$R_{\text{вх}} = R_{\text{вх}, \text{эб}} = \frac{\Delta u_{\text{эб}}}{\Delta i_{\text{б}}};$$

$$R_{\text{вых}} = R_{\text{вых}, \text{эк}} = \frac{\Delta u_{\text{эк}}}{\Delta i_{\text{к}}}.$$

Для схемы с общим эмиттером $R_{\text{вых}}$ обычно в несколько раз больше $R_{\text{вх}}$.

2. *Соотношение между сопротивлением нагрузки и выходным сопротивлением триода.*

При работе триода в качестве усилителя напряжения (и в качестве усилителя мощности) в обеих схемах сопротивления нагрузки $R_{\text{н}}$ берут обычно того же порядка, что и выходное сопротивление триода со стороны зажимов эмиттер — коллектор, т. е.

$$R_{\text{н}} \approx R_{\text{вых}, \text{эк}}.$$

Составим выражения для определения k_u в схеме с общей базой:

$$k_u = \frac{\Delta u_{\text{вых}}}{\Delta u_{\text{вх}}} = \frac{\Delta i_k R_H}{\Delta i_3 R_{\text{вх.эб}}},$$

но

$$\frac{\Delta i_k}{\Delta i_3} = \alpha, \text{ а } \frac{R_H}{R_{\text{вх.эб}}} \approx \frac{R_{\text{вых.эк}}}{R_{\text{вх.эб}}},$$

следовательно,

$$k_u = \alpha \frac{R_{\text{вых.эк}}}{R_{\text{вх.эб}}}.$$

Если учесть, что α близко к 1, то для схемы с общей базой $k_u \approx \frac{R_{\text{вых.эк}}}{R_{\text{вх.эб}}}$ и составляет величину порядка нескольких сотен.

Составим выражения для k_u в схеме с общим эмиттером.

Входным током в схеме с общим эмиттером является ток базы, а выходным — ток коллектора. Поэтому

$$k_u = \frac{\Delta u_{\text{вых}}}{\Delta u_{\text{вх}}} = \frac{\Delta i_k R_H}{\Delta i_3 R_{\text{вх.эб}}} \approx \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{R_{\text{вых.эк}}}{R_{\text{вх.эб}}}.$$

Если учесть, что $\frac{\alpha}{1 - \alpha} \cong 19 \div 49$, а отношение $\frac{R_{\text{вых.эк}}}{R_{\text{вх.эб}}}$ в схеме с общим эмиттером составляет величину порядка нескольких единиц, то для схемы с общим эмиттером k_u составляет величину от нескольких десятков до нескольких сотен.

§ 9.33. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ ТРИОД В КАЧЕСТВЕ УСИЛИТЕЛЯ МОЩНОСТИ

Усиление по мощности достигается во всех схемах включения рис. 9.20. Коэффициент усиления по мощности k_P равен отношению приращения мощности в нагрузке к приращению мощности на входе триода:

$$k_P = \frac{\Delta P_H}{\Delta P_Y}.$$

Для схемы рис. 9.20, а

$$k_P \approx \frac{(\Delta i_k)^2 R_H}{(\Delta i_3)^2 R_{\text{вх.эб}}} \approx \frac{R_{\text{вых.эк}}}{R_{\text{вх.эб}}}.$$

Таким образом, коэффициент усиления по мощности для схемы рис. 9.20, а в первом грубом приближении примерно равен коэффициенту усиления по напряжению для этой схемы. Наибольшее усиление по мощности достигается в схеме с общим эмиттером. Для нее k_P может достигать значений 10^4 и более.

§ 9.34. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРИРАЩЕНИЯМИ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ВЕЛИЧИН ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТРИОДА

Напряжение на входных зажимах триода u_1 и напряжение на выходных зажимах u_2 являются функциями входного i_1 и выходного i_2 токов триода, т. е.

$$u_1 = U_1(i_1, i_2); \quad (9.42a)$$

$$u_2 = U_2(i_1, i_2). \quad (9.42б)$$

Запись $u_1 = U_1(i_1, i_2)$ свидетельствует о том, что U_1 есть функция двух переменных (i_1 и i_2). Условимся исходные значения токов и напряжений обозначать большими буквами U, I , а приращения — через Δi и Δu . Пусть токи получили малые приращения Δi_1 и Δi_2 и стали равными $I_1 + \Delta i_1$ и $I_2 + \Delta i_2$. При этом напряжения также получили приращения и стали равными $U_1 + \Delta u_1$ и $U_2 + \Delta u_2$. Следовательно,

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1(I_1 + \Delta i_1, I_2 + \Delta i_2); \quad (9.43a)$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2(I_1 + \Delta i_1, I_2 + \Delta i_2). \quad (9.43b)$$

Найдем связь между приращениями напряжений Δu_1 и Δu_2 и приращениями токов Δi_1 и Δi_2 . С этой целью разложим правые части равенств (9.43a) и (9.43b) в ряд Тейлора для функции от двух переменных по степеням приращений Δi_1 и Δi_2 и воспользуемся тем, что в силу малости приращений можно пренебречь слагаемыми, содержащими Δi_1 и Δi_2 в степенях выше первой. Получим:

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1(I_1, I_2) + \Delta i_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2} \right)_{I_1, I_2};$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2(I_1, I_2) + \Delta i_1 \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1} \right)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right)_{I_1, I_2},$$

где $\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right)_{I_1, I_2}$ — частная производная U_1 по току i_1 , в которую подставлены значения I_1 и I_2 , определяющие собой исходные значения токов (до получения приращений);

$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2} \right)_{I_1, I_2}$ — частная производная U_1 по i_2 , в которую подставлены значения I_1 и I_2 .

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1} \right)_{I_1, I_2} = R_{11}, \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2} \right)_{I_1, I_2} = R_{12};$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1} \right)_{I_1, I_2} = R_{21}, \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2} \right)_{I_1, I_2} = R_{22}.$$

Обратим внимание на то, что $\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1} \right)_{I_1, I_2} = R_{21}$ не равно $\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2} \right)_{I_1, I_2} = R_{12}$.

Значения R_{11} , R_{12} , R_{21} и R_{22} могут быть найдены графическим путем из характеристик полупроводникового триода или опытным путем, поэтому в дальнейшем будем полагать их известными. Если из уравнения (9.43a) вычесть уравнение (9.42a), а из уравнения (9.43b) — уравнение (9.42b) и затем частные производные заменить соответственно на R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} , то получим:

$$\Delta u_1 = R_{11}\Delta i_1 + R_{12}\Delta i_2; \quad (9.44a)$$

$$\Delta u_2 = R_{21}\Delta i_1 + R_{22}\Delta i_2. \quad (9.44b)$$

Формулы (9.44) связывают малые приращения токов Δi_1 и Δi_2 с малыми приращениями напряжений Δu_1 и Δu_2 . Из формул (9.44) следует, что по отношению к малым приращениям триод, являющийся управляемым нелинейным сопротивлением, можно заменить эквивалентной линейной схемой замещения.

§ 9.35. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТРИОДА ДЛЯ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

В специальной литературе по полупроводниковым триодам в схемы замещения триодов для малых приращений вводят не сопротивления R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} , о которых шла речь, а некоторые расчетные сопротивления — сопротивления базы R_6 , коллектора R_K , эмиттера $R_э$ и некоторый расчетный источник э. д. с., величина э. д. с.

которого равна произведению тока управляющей цепи на расчетное сопротивление R_m .

Значения R_6 , R_K , R_3 и R_m определяют через R_{11} , R_{12} , R_{21} и R_{22} .

Рассмотрим схему замещения триода, когда общим электродом является база. На рис. 9.22 изображена схема с общей базой. Входным током в ней является ток i_1 , равный току эмиттера i_3 , выходным током — ток i_2 , равный взятому с обратным знаком току коллектора: $i_2 = -i_K$ (положительное направление для тока i_2 принято

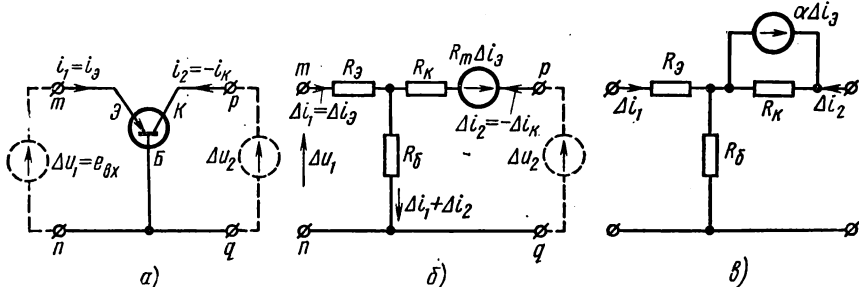


Рис. 9.22

противоположным положительному направлению тока i_K на рис. 9.20, а, см. § 9.34). Схема рис. 9.22, б заменяет схему рис. 9.22, а для малых приращений. По второму закону Кирхгофа составим уравнения для двух контуров схемы рис. 9.22, б:

$$\Delta u_1 = (R_3 + R_6) \Delta i_1 + R_6 \Delta i_2; \quad (9.45a)$$

$$\Delta u_2 - R_m \Delta i_3 = R_6 \Delta i_1 + (R_K + R_6) \Delta i_2; \quad (9.45б)$$

$$\Delta u_1 = u_{mn} = \varphi_m - \varphi_n; \quad \Delta u_2 = u_{pq} = \varphi_p - \varphi_q,$$

где φ_m — потенциал точки m ; φ_n — потенциал точки n и т. д.

При сопоставлении уравнений (9.45) с уравнениями (9.44) получаем:

$$R_3 + R_6 = R_{11}; \quad R_6 = R_{12};$$

$$R_m + R_6 = R_{21}; \quad R_K + R_6 = R_{22}.$$

Последние уравнения дают возможность найти сопротивления R_6 , R_3 , R_K и R_m по известным сопротивлениям R_{11} , R_{21} , R_{12} , R_{22} . Источник э. д. с. $R_m \Delta i_3$ ($\Delta i_3 = \Delta i_1$) введен в схему замещения рис. 9.22, б для того, чтобы учесть в расчете усильтельное действие триода: величина э. д. с. этого источника пропорциональна входному току.

Таким образом, для расчета малых приращений входных и выходных токов в нелинейной схеме рис. 9.22, а, для определения коэффициентов усиления и входных сопротивлений в этой схеме для малых приращений следует произвести расчет линейной схемы рис. 9.22, б, подключив к входным зажимам ее mn источник малой (обычно синусоидальной) э. д. с., а к выходным зажимам pq — нагрузку R_H .

Отметим, что источники э. д. с. (тока), величина э. д. с. (тока) которых зависит от величины входного тока (напряжения), называют *зависимыми источниками*. Источник э. д. с. $R_m \Delta i_3$ в схеме рис. 9.22, б является *зависимым источником э. д. с.*

В заключение остановимся еще на двух положениях.

1. В схемах замещения полупроводниковых триодов (транзисторов) вместо зависимого источника э. д. с. и последовательно с ним включенного сопротивления R_K часто используют *зависимый источник тока* и шунтирующее его сопротивление. Так, в схеме рис. 9.22, в вместо источника э. д. с. $R_m \Delta i_3$ и сопротивления R_K

можно включить источник тока $\frac{R_m}{R_K} \Delta i_3 = \alpha \Delta i_3$ и зашунтировать его сопротивлением R_K (см. рис. 9.22, в).

2. При относительно высоких частотах и при быстро протекающих процессах следует учитывать, что *p-n*-переходы обладают емкостными свойствами и имеет место инерционность основных носителей зарядов. Емкостные свойства учитывают в рас-

чете, шунтируя в схеме замещения коллекторный p - n -переход некоторой емкостью C_K , а инерционность носителей заряда учитывают, вводя зависимость коэффициента усиления триода α от частоты ω (или от оператора p , об операторе p см. гл. X):

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}},$$

где $\omega_0 = R_K C_K$;

α_0 — коэффициент усиления триода на постоянном токе.

Емкость эмиттерного перехода обычно не учитывают, так как она шунтирует относительно малое по сравнению с R_K сопротивление R_3 . Для высокой частоты схема замещения транзистора, собранного по схеме с общей базой, изображена на

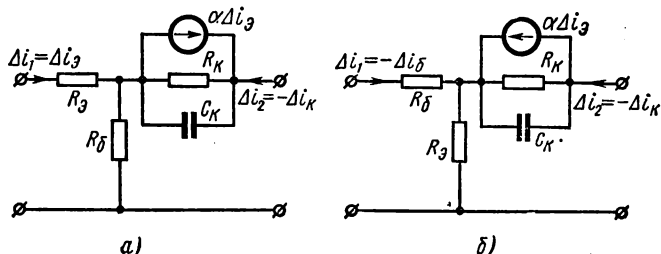


Рис. 9.23

рис. 9.23, а, с общим эмиттером — на рис. 9.23, б. В зависимости от типа триода R_K имеет значение от нескольких десятых мегома до нескольких мегом; R_3 — несколько десятков ом; R_6 — несколько десятков или сотен ом; C_K — от нескольких единиц до нескольких десятков пикофард.

§ 9.36. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СХЕМ НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДАХ

Расчет схем на полупроводниковых триодах (транзисторах) при относительно низких частотах на практике часто производят не с помощью рассмотренных схем замещения, при использовании которых необходимо знать R_3 , R_6 , R_K и R_m , а путем непосредственного использования семейства характеристик триода. Этот способ расчета показан на примере 104.

Пример 104. Определить коэффициент усиления по току, коэффициент усиления по напряжению и коэффициент усиления по мощности схемы рис. 9.24, а, предназначенной для усиления слабых синусоидальных колебаний.

В этой схеме использован триод П14. Его выходные характеристики изображены на рис. 9.24, в, и входные — на рис. 9.24, б. Параметром на рис. 9.24, в является ток i_6 . Сопротивление нагрузки $R_H = 500$ ом. Электродвижущая сила смещения в выходной цепи $E_{K0} = 10$ в. Электродвижущая сила смещения в цепи управления $E_{y0} = 0,25$ в.

Решение. На рис. 9.24, а проводим прямую, представляющую собой в. а. х. нагрузки $R_H = 500$ ом. Эта прямая пройдет через точку $i_K = 0$ и $u_{ЭК} = E_{K0} = 10$ в и через точку $i_K = \frac{E_{K0}}{R_H} = 20$ ма и $u_{ЭК} = 0$.

Семейство входных характеристик триода П14, как это видно из рис. 9.24, б, обладает той особенностью, что в интервале значений $u_{эк} = 0,2—10$ в зависимость тока базы $i_б$ от напряжения между эмиттером и базой изображается одной и той же кривой (практически не зависит от величины $u_{эк}$). Найдем значение тока $i_б = I_{б0}$ при отсутствии синусоидального сигнала на входе, т. е. в режиме, когда на вход цепи управления действует только постоянная э. д. с. $E_{y0} = 0,25$ в (цепь управления замкнута через источник сигнала).

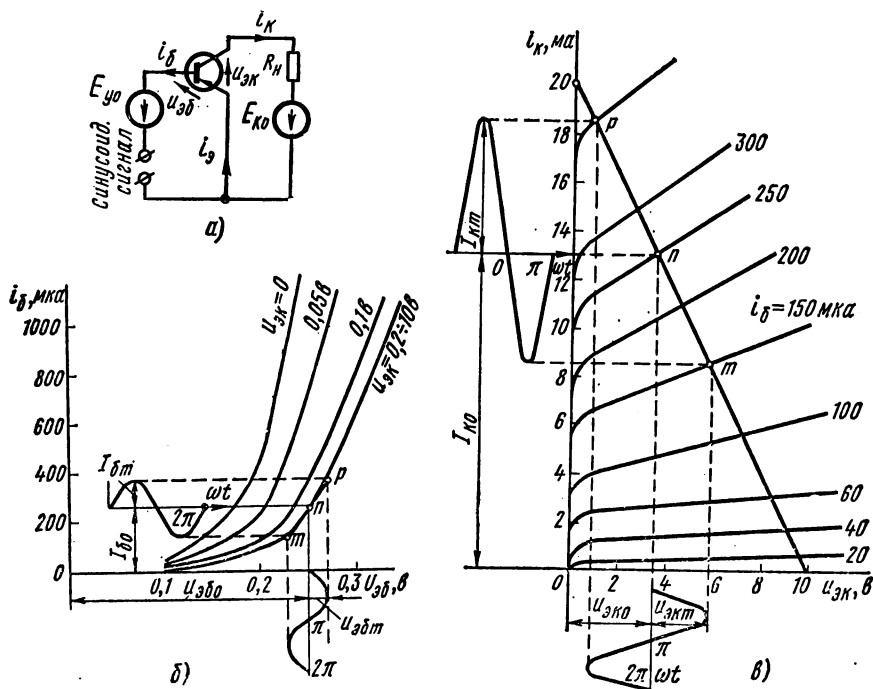


Рис. 9.24

Из рис. 9.24, б следует, что при $u_{эб} = 0,25$ в ток $i_б = I_{б0} = 250$ мка (точка n). Далее найдем ток $i_к = I_{к0}$ и напряжение $u_{эк} = U_{эк0}$ в этом режиме.

На семействе кривых рис. 9.24, в режим работы при $E_y = E_{y0}$ определяется точкой n , полученной в результате пересечения в. а. х. нагрузки с той кривой семейства $i_к = f(u_{эк})$, для которой параметром является $i_б = 250$ мка.

В точке n $i_к = I_{к0} = 13,1$ ма и $u_{эк} = U_{эк0} = 3,5$ в. Линеаризуем входную характеристику в рабочей точке. С этой целью проведем в окрестности точки n (см. рис. 9.24, б) прямую так, чтобы она на возможно большем участке совпала с касательной к кривой $i_б = f(u_{эб})$ в точке n . Крайними точками проведенной прямой будем считать точки p и m . В точке p ток $i_б = 350$ мка и $u_{эб} = 0,27$ в. В точке m

ток $i_6 = 150 \text{ мка}$ и $u_{э6} = 0,23 \text{ в}$. Этим точкам соответствуют одноименные точки p и m на рис. 9.24, $в$.

В точке p (см. рис. 9.24, $в$) $i_k = 18,6 \text{ ма}$, в точке m $i_k = 8,6 \text{ ма}$. Таким образом, при подаче на вход схемы синусоидального напряжения с амплитудой $U_{э6m} = 0,02 \text{ в}$ в цепи управления появится синусоидальная составляющая тока, имеющая амплитуду $I_{6m} = I_{ym} = 100 \text{ мка}$, а в выходной цепи, кроме постоянного тока $I_{к0}$, появится синусоидальный ток с амплитудой $I_{км} = 5,0 \text{ ма}^*$. При этом на выходных зажимах триода будет действовать синусоидальная составляющая напряжения, имеющая амплитуду $U_{экм} = 2,45 \text{ в}$.

Найдем искомые коэффициенты усиления.

Коэффициент усиления по току

$$k_i = \frac{\Delta i_{\text{вых}}}{\Delta i_{\text{вх}}} = \frac{I_{км}}{I_{ym}} = \frac{5,0 \text{ ма}}{100 \text{ мка}} = 50.$$

Коэффициент усиления по напряжению

$$k_u = \frac{\Delta u_{\text{вых}}}{\Delta u_{\text{вх}}} = \frac{R_n I_{км}}{U_{э6m}} = \frac{500 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}}{0,02} = 125.$$

Коэффициент усиления по мощности

$$k_p = \frac{\Delta P_{\text{вых}}}{\Delta P_{\text{вх}}} = \frac{R_n I_{км}^2}{U_{э6m} I_{ym}} = \frac{500 (5,0 \cdot 10^{-3})^2}{0,02 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 6250.$$

Входное сопротивление триода между зажимами эмиттер — база для синусоидальной составляющей

$$R_{\text{вх}, э6} = \frac{U_{э6m}}{I_{ym}} = \frac{0,02 \text{ в}}{100 \text{ мка}} = 200 \text{ ом}.$$

Выходное сопротивление между зажимами эмиттер — коллектор для синусоидальной составляющей

$$R_{\text{вых}, эк} = \frac{U_{экм}}{I_{км}} = \frac{2,45 \text{ в}}{5,0 \text{ ма}} = 490 \text{ ом}.$$

В тепловом отношении триод работает в ненапряженных условиях, так как мощность, выделяемая в самом триоде в режиме, соответствующем точке n (см. рис. 9.24, $б$),

$$U_{эк0} I_{к0} = 3,5 \text{ в} \cdot 13,1 \text{ ма} = 45,8 \text{ мвт},$$

что значительно меньше допустимой для данного триода мощности рассеяния 150 мвт .

§ 9.37. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ ЛАМПЕ

Трехэлектродная лампа (триод) имеет три электрода: катод, анод и сетку. Эти электроды находятся в вакуумированном стеклянном или металлическом баллоне.

* Берем первую гармонику переменной составляющей коллекторного тока.

Катод, подогреваемый нитью накала от вспомогательной батареи (обычно не показываемой на схемах), испускает электроны вследствие явления термоэлектронной эмиссии. Поток электронов направляется по второму (холодному) электроду — аноду — только в том случае, если потенциал анода выше потенциала катода. Если же потенциал анода сделать ниже потенциала катода, то потока электронов от катода к аноду не будет (в этом случае анод будет не притягивать электроны, а отталкивать их). В результате этого электронная лампа обладает несимметричной вольтамперной характеристикой.

Третий электрод — сетка — расположен ближе к катоду, чем анод. Поэтому электрическое поле, создаваемое между сеткой и катодом, даже при малых напряжениях между сеткой и катодом оказывает сильное влияние на поток электронов с катода на анод. Сетка является управляющим электродом. Путем изменения потенциала сетки можно

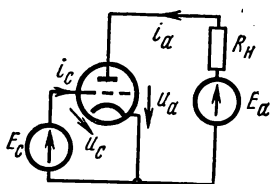


Рис. 9.25

управлять величиной анодного тока лампы. Как и полупроводниковый триод, электронная лампа может быть включена в схему тремя основными способами: с общим катодом, с общей сеткой и с общим анодом (в зависимости от того, какой из электродов является общим для анодной и сеточной цепей).

На рис. 9.25 изображена наиболее часто употребляемая схема — схема с общим катодом. Как и полупроводниковый триод, электронная лампа может служить в качестве усилителя тока, усилителя напряжения и усилителя мощности. Возможность выполнения лампой всех этих функций основывается на том, что изменение разности потенциалов между сеткой и катодом оказывает более сильное влияние на поток электронов с катода на анод, чем изменение (на ту же величину) разности потенциалов между анодом и катодом.

§ 9.38. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ ЛАМПЫ ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Цепь, образованную анодом и катодом трехэлектродной лампы, источником э. д. с. E_a и нагрузкой R_n , называют анодной цепью.

Цепь, образованную сеткой и катодом электронной лампы и источником э. д. с. E_c , называют сеточной цепью.

Напряжение между анодом и катодом u_a называют анодным напряжением, между сеткой и катодом u_c — сеточным напряжением.

Ток в анодной цепи i_a нелинейно зависит от анодного и сеточного напряжения. Ток в сеточной цепи i_c также нелинейно зависит от u_a и u_c .

Под анодными характеристиками трехэлектродной лампы понимают зависимость анодного тока i_a от анодного напряжения u_a при сеточном напряжении u_c , взятом в качестве параметра.

На рис. 9.26 изображено семейство анодных характеристик лампы. Стрелка на рис. 9.26 (а также на рис. 9.27 и 9.28) указывает направление, в котором возрастает параметр.

Если семейство анодных характеристик расчесть прямыми $u_a = \text{const}$, то можно получить семейство кривых $i_a = f(u_c)$ при параметре u_a . Такие кривые называются сеточными (анодно-сеточными) характеристиками трехэлектродной лампы (рис. 9.27). Для них характерно, что ток i_a не равен нулю при $u_c = 0$, а также что имеется область насыщения, в которой ток i_a почти не увеличивается с ростом u_c .

Семейство зависимостей сеточного тока i_c от сеточного напряжения u_c при различных значениях анодного напряжения и положительных значениях u_c для одного из типов ламп изображено на рис. 9.28.

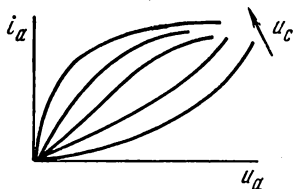


Рис. 9.26

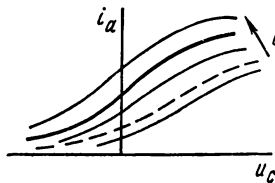


Рис. 9.27

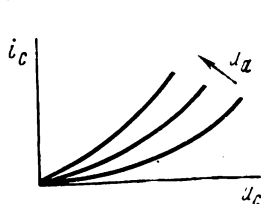


Рис. 9.28

В общем случае при работе лампы одновременно меняются u_a и u_c и изображающая точка на семействах анодных и сеточных характеристик перемещается с одних кривых на другие. В частном случае работы, когда u_a остается неизменным или почти неизменным, $i_a = f(u_c)$ изображается одной кривой семейства кривых рис. 9.27.

Если электронная лампа работает при отрицательных или сравнительно малых положительных напряжениях на сетке, то сеточный ток имеет малую величину и его в расчете, как правило, не учитывают.

Следует отметить своеобразие сеточной характеристики по сравнению с обычными вольтамперными: сеточная характеристика дает связь не между током через нелинейное сопротивление и напряжением на нем, что характерно для «обычных» в. а. х., а между мгновенным значением тока через нелинейное сопротивление и мгновенным значением управляющего напряжения на этом сопротивлении.

§ 9.39. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛАМПЫ

Сеточная характеристика при $u_a = \text{const}$ может быть приближенно представлена отрезками прямых (рис. 9.29). Часть сеточных характеристик, например характеристика, выделенная жирной линией на рис. 9.27, может быть описана полиномом третьей степени:

$$i_a = i_{a0} + au_c - bu_c^3.$$

Здесь i_{a0} — значение тока i_a при $u_c = 0$; a и b — числовые коэффициенты; a — измеряется в $a \cdot \text{в}^{-1}$; b измеряется в $a \cdot \text{в}^{-3}$.

Для определения коэффициентов a и b следует выбрать на характеристике две точки с координатами i_{a1}, u_{c1} и i_{a2}, u_{c2} и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

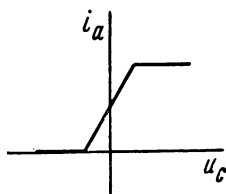


Рис. 9.29

$$\left. \begin{aligned} i_{a1} &= i_{a0} + au_{c1} - bu_{c1}^2; \\ i_{a2} &= i_{a0} + au_{c2} - bu_{c2}^2. \end{aligned} \right\}$$

Характеристика по типу пунктирной кривой на рис. 9.27 может быть приближенно описана полиномом второй степени:

$$i_a = i_{a0} + pu_c + qu_c^2,$$

где p и q — числовые коэффициенты.

Существуют аналитические выражения и для анодных характеристик.

§ 9.40. СВЯЗЬ МЕЖДУ МАЛЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ВЕЛИЧИН ЭЛЕКТРОННОЙ ЛАМПЫ

Как уже говорилось в § 9.39, анодный ток i_a является функцией не только анодного, но и сеточного напряжения; $i_a = I_a(u_a, u_c)$. Если по отношению к некоторому исходному состоянию (U_a, U_c) сеточное напряжение получит небольшое приращение Δu_c , то оно вызовет приращение анодного напряжения Δu_a и приращение анодного тока Δi_a .

Если проделать выкладки, аналогичные выкладкам § 9.34, то получим

$$\Delta i_a = \Delta u_a \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a} \right)_{U_a, U_c} + \Delta u_c \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_c} \right)_{U_a, U_c}.$$

Частную производную $\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a} \right)_{U_a, U_c}$, в которую подставлены значения U_a и U_c , соответствующие исходному состоянию, принято называть *внутренней проводимостью электронной лампы* g_i (проводимость между анодом и катодом):

$$g_i = \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a} \right)_{U_a, U_c}. \quad (9.46)$$

Величину R_i , обратную g_i , называют *внутренним сопротивлением лампы* (сопротивление между анодом и катодом):

$$R_i = \frac{1}{g_i}. \quad (9.47)$$

Частную производную $\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_c} \right)_{U_a, U_c}$, подсчитанную при исходных значениях U_a и U_c , называют *крутизной характеристики лампы* S (имеет размерность проводимости):

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_c} \right)_{U_a, U_c}; \quad (9.48)$$

g_i и S зависят от вида характеристик лампы и величин исходных напряжений U_a и U_c . Отношение S к g_i называют *коэффициентом усиления лампы*

$$\mu = \frac{S}{g_i} = \frac{\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_c} \right)_{U_a, U_c}}{\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a} \right)_{U_a, U_c}}. \quad (9.49)$$

Коэффициент усиления показывает, во сколько раз приращение напряжения между сеткой и катодом Δu_c оказывается более эффективным, чем приращение напряжения между анодом и катодом Δu_a в отношении получения одинакового приращения анодного тока Δi_a . С учетом сказанного формулу для Δi_a можно записать следующим образом:

$$\Delta i_a = \Delta u_a g_i + \Delta u_c S, \quad (9.50a)$$

или

$$\Delta u_a = R_i \Delta i_a - \mu \Delta u_c. \quad (9.50b)$$

§ 9.41. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛАМПЫ ДЛЯ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

На схеме рис. 9.30, а буквами U_n , U_a , U_c , I_a обозначены постоянные составляющие напряжений и тока, соответствующие исходному состоянию схемы (до получения приращения сеточного напряжения). Напряжения и токи, обозначенные через Δu_c , Δu_a , Δi_a , — это приращения соответствующих величин. Положительные направления для приращений те же, что и для исходных напряжений и токов.

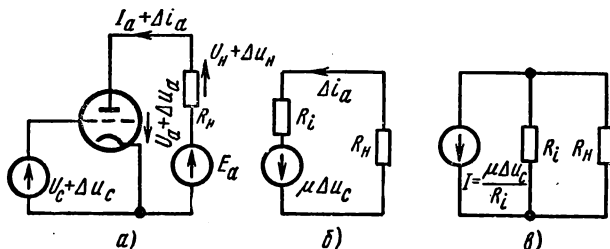


Рис. 9.30

Составим уравнение для приращений напряжений в анодной цепи, вызванных приращением напряжения Δu_c на сетке лампы. С этой целью составим два уравнения по второму закону Кирхгофа для анодной цепи. Одно из них для режима до получения приращений: $U_a + U_n = E$, другое — для режима после получения приращений: $U_a + \Delta u_a + U_n + \Delta u_n = E$. Если в последнем уравнении $U_a + U_n$ заменить на E , то получим

$$\Delta u_a + \Delta u_n = 0, \quad (9.51)$$

где Δu_a — приращение напряжения между анодом и катодом лампы;

Δu_n — приращение напряжения на нагрузке R_n .

В уравнение (9.51) вместо Δu_n подставим $R_n \Delta i_a$ и вместо Δu_a в соответствии с уравнением (9.50a) подставим $R_i \Delta i_a - \mu \Delta u_c$. Получим

$$(R_n + R_i) \Delta i_a = \mu \Delta u_c. \quad (9.52)$$

Уравнению (9.52) отвечает схема рис. 9.30, б. В этой схеме к источнику э. д. с. $\mu \Delta u_c$ присоединены сопротивление нагрузки R_n и внутреннее сопротивление электронной лампы R_i . Таким образом, для малых приращений анодную цепь электронной лампы замещают (имитируют) источником э. д. с. $\mu \Delta u_c$ и последовательно с ним включенным сопротивлением R_i . Электродвижущая сила этого источника пропорциональна изменению напряжения на сетке лампы (т. е. это зависимый источник; ср. со стр. 284).

На рис. 9.30, в изображена также часто используемая схема замещения. В ней вместо источника э. д. с. включены источник тока $\frac{\mu \Delta u_c}{R_i}$ и шунтирующее его сопротивление R_i (напомним, что переход от источника э. д. с. к источнику тока рассмотрен в § 1.2).

В схемах 9.30, б и в не учтены межэлектродные емкости, поэтому такие схемы применимы для относительно низких частот. (Схемы замещения для высоких частот изображены на рис. Ж, 3, б.)

Пример 105. Между сеткой и катодом триода 6С2С приложено напряжение $U_c + \Delta u_c = U_c + U_{cm} \sin \omega t = -2 + 0,05 \sin \omega t$ (см. рис. 9.30, а). Зависимость анодного тока i_a от анодного напряжения u_a при параметре u_c изображена на рис. 9.31. Электродвижущая сила $E_a = 150$ в; $R_n = 15$ ком.

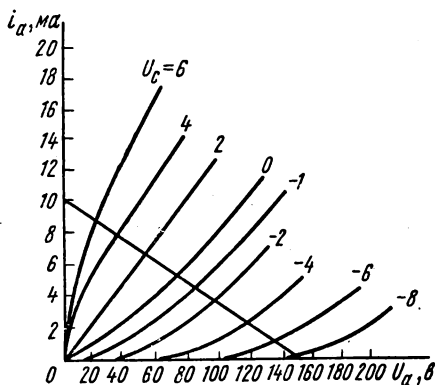


Рис. 9.31

По определению [см. формулу (9.46)], для нахождения g_i следует, считая за исходное положение найденную ранее рабочую точку, при неизменном $u_c = -2$ в дать приращение анодному напряжению Δu_a , найти соответствующее ему приращение анодного тока Δi_a и разделить Δi_a на Δu_a :

$$g_i = \frac{\partial I_a}{\partial u_a} \approx \frac{\Delta i_a}{\Delta u_a} = \frac{5 \text{ ма}}{50 \text{ в}} = 10^{-4} \text{ сим}; R_i = \frac{1}{g_i} = 10^4 \text{ ом};$$

g_i пропорционально тангенсу угла наклона касательной в рабочей точке к кривой $I_a = f(u_a)$, для которой $u_c = -2$ в.

Для определения крутизны характеристики S при $u_a = 94$ в $= \text{const}$ даем приращение сеточному напряжению $\Delta u_c = -1 - (-2) = 1$ в и из рисунка находим соответствующее ему приращение $\Delta i_a = 4,67 - 3,67 = 1,0$ ма. Следовательно,

$$S = \frac{\partial I_a}{\partial u_c} \approx \frac{\Delta i_a}{\Delta u_c} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ а/в.}$$

Коэффициент усиления

$$\mu = \frac{S}{g_i} = 10.$$

Амплитуда синусоидальной составляющей тока в анодной цепи согласно уравнению (9.52)

$$I_{1m} = \frac{\mu u_{cm}}{R_n + R_i} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ а.}$$

Анодный ток $I_a = \Delta i_a = 3,67 + 0,02 \sin \omega t$ ма.

§ 9.42. ПОСТРОЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВХОД — ВЫХОД ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛАМПЫ ПРИ БОЛЬШИХ СИГНАЛАХ

Напряжение между сеткой и катодом u_c является входным, а напряжение на нагрузке R_n (схема рис. 9.30, а) — выходным. Напряжение на нагрузке равно произведению тока i_a на сопротивление R_n . Если амплитуда переменной составляющей

напряжений u_c будет достаточно большой (например, соизмерима или больше постоянной составляющей напряжения U_c), то линейные схемы замещения рис. 9.30, б и в применять уже нельзя. Определение зависимости тока i_a от времени t при подаче на сетку лампы напряжения любой формы и любой амплитуды можно производить путем графических построений. Сущность последних состоит в следующем:

1. Придавая времени t различные значения, находят отвечающие им мгновенные значения u_c .

2. Для каждой пары соответствующих друг другу значений t и u_c анодный ток i_a определяют ординатой точки пересечения нагрузочной прямой и той кривой семейства $i_a = f(u_a)$, для которой данное значение u_c является параметром.

3. Далее, строят кривую зависимости $i_a = f(t)$. Разложение ее в ряд Фурье дает возможность найти постоянную составляющую, а также амплитуду первой и высших гармоник ряда Фурье. Повторив построения при иной амплитуде или иной форме напряжения u_c , находят новые значения постоянной составляющей и амплитуд первой и высших гармоник тока i_a . В результате ряда таких построений будут получены данные, на основании которых можно построить любые представляющие интерес зависимости между входными и выходными величинами. В принципе аналогичные построения могут быть проделаны и для полупроводникового триода.

§ 9.43. ТИРИСТОР — УПРАВЛЯЕМЫЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ ВЕНТИЛЬ

На рис. 9.32, а изображена простейшая схема включения тиристора. Тиристор — это четырехслойный полупроводниковый прибор с тремя p - n -переходами (1, 2, 3). Напряжения на них обозначены u_1 ,

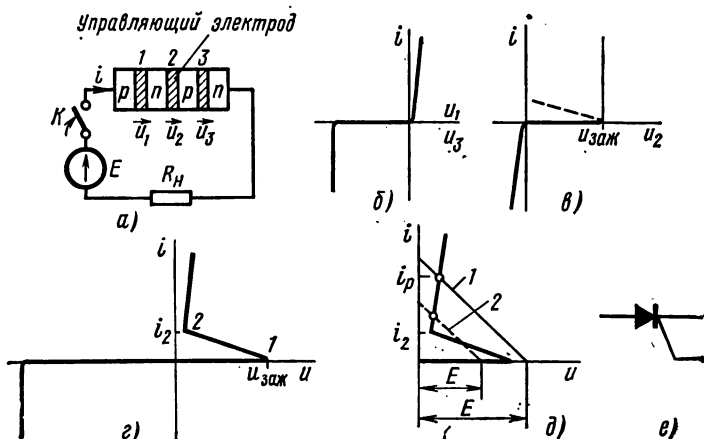


Рис. 9.32

u_2 , u_3 ; в. а. х. p - n -переходов 1 и 3 изображены на рис. 9.32, б; в. а. х. перехода 2 — на рис. 9.32, в (он включен встречно p - n -переходам 1 и 3). При $u_2 = u_{зак}$ в переходе 2 происходит лавинная ионизация (пунктир на рис. 9.32, в). Суммарная в. а. х. трех переходов $i = f(u)$ т. е. в. а. х. всего тиристора, изображена на рис. 9.32, г. Она получена сложением абсцисс рис. 9.32, в и двух абсцисс рис. 9.32, б. Участок 1—2 на ней соответствует участку лавинной ионизации второго p - n -перехода.

Если при замкнутом ключе K рис. 9.32, a э. д. с. E станет немного больше $u_{\text{зж}}$, тиристор зажжется, т. е. перейдет в открытое состояние. Ток в цепи станет равным току i_p на рис. 9.32, d . Прямую 1 на рис. 9.32, d называют нагрузочной. Для погашения тиристора необходимо, чтобы ток через него уменьшился до $i < i_s$ (рис. 9.32, e). До сих пор речь шла о работе тиристора в режиме отсутствия управляющего сигнала (так работает тринистор — см. § 2.2). При воздействии управляющего сигнала (импульса тока или напряжения) на управляющий электрод, расположенный вблизи p - n -перехода 2 (см. рис. 9.32, a), от вспомогательной цепи, не показанной на рис. 9.32, a , происходит лавинная ионизация p - n -перехода 2. Подавая импульсы управления, можно снижать напряжение зажигания (т. е. зажигать прибор при более низком $u_{\text{зж}}$).

Пунктиром на рис. 9.32, d показано положение нагрузочной прямой 2 в управляемом тиристоре. Переход от закрытого состояния к открытому происходит за доли микросекунды. Тиристоры выполняют на токи от долей миллиампер до нескольких килоампер. На рис. 9.32, e показано условное изображение тиристора на схемах.

§ 9.44. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Анализ нелинейных явлений и получение числовых соотношений в нелинейных цепях переменного тока является более сложным и трудоемким, чем анализ и расчет линейных электрических цепей.

Как правило, в нелинейных электрических цепях содержатся либо нелинейные индуктивности, либо нелинейные емкости, либо безынерционные в тепловом отношении нелинейные активные сопротивления. Токи и напряжения в таких цепях в той или иной степени не-синусоидальны.

Токи и напряжения в большей степени синусоидальны в цепях, содержащих только инерционные в тепловом отношении нелинейные активные сопротивления.

Все методы анализа нелинейных цепей можно подразделить на две большие группы: аналитическую и графическую. Аналитические методы в отличие от графических дают возможность проводить анализ в общем виде, а не только для частных значений параметров.

Недостатком аналитических методов является то, что приходится выражать аналитически характеристики нелинейных сопротивлений, а это всегда связано с некоторой погрешностью. При расчете сколь угодно сложных нелинейных электрических цепей переменного тока расчет можно произвести лишь с известной степенью приближения.

Наиболее широко распространены следующие методы анализа и расчета нелинейных цепей переменного тока.

1) графический при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений;

2) аналитический при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации;

3) аналитический или графический при использовании вольтамперных характеристик по первым гармоникам;

4) аналитический или графический при использовании вольтамперных характеристик по действующим значениям несинусоидальных величин;

5) аналитический путем расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам;

6) с помощью линейных схем замещения;

7) малого параметра — см. приложение Л;

8) путем моделирования на моделях;

9) с применением математических счетных машин *.

В дальнейшем кратко охарактеризован каждый метод. Тот или иной метод целесообразно применять в зависимости от характера цепи, формы в. а. х. нелинейного сопротивления, а также от того, какое нелинейное явление в цепи исследуется. Чем сложнее характер нелинейного явления, тем более сложным и громоздким оказывается метод его анализа. И, наоборот, анализ грубых нелинейных явлений производится более простыми средствами.

§ 9.45. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Этот метод применим, как правило, к цепям, в которых известен закон изменения во времени какой-либо одной определяющей работу нелинейного сопротивления величины, например тока, напряжения, заряда.

Последовательность расчета данным методом следующая:

1) исходя из физических предпосылок, положенных в основу анализа, находят закон изменения во времени одной из определяющих работу нелинейного сопротивления величин;

2) используя характеристики (или характеристику) нелинейного сопротивления для мгновенных значений, путем графических построений находят закон изменения во времени второй величины, определяющей работу нелинейного сопротивления;

3) по результатам п. 2 путем вспомогательных графических построений и простейших расчетов находят выходную величину и искомое соотношение между параметрами схемы.

Достоинствами метода являются простота и наглядность, а также легкость учета гистерезисных явлений. Примеры см. в § 9.8 и 9.24.

§ 9.46. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРИ ИХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Основным содержанием метода является сведение задачи о нахождении периодического решения нелинейных уравнений к нахождению периодического решения системы линейных уравнений.

* Девятый метод не является самостоятельным, его используют совместно с любым из предыдущих.

Основные этапы метода следующие:

1) замена вольтамперной (веберамперной, кулонвольтной) характеристики нелинейного сопротивления для мгновенных значений отрезками прямых линий;

2) подстановка в нелинейные дифференциальные уравнения уравнений прямых п. 1 (этим нелинейные дифференциальные уравнения будут сведены к линейным). Каждому нелинейному уравнению будет соответствовать столько линейных уравнений, сколько отрезков прямых заменяет характеристику нелинейного сопротивления;

3) решение системы линейных дифференциальных уравнений. Каждому линейному участку характеристики нелинейного сопротивления будет соответствовать свое решение со своими постоянными интегрирования;

4) определение постоянных интегрирования исходя из согласования решения на одном линейном участке с решением на другом линейном участке.

Наиболее эффективен метод тогда, когда характеристику нелинейного сопротивления с известной степенью приближения можно заменить отрезками прямых, расположенных таким образом, что когда одна величина, определяющая режим работы нелинейного сопротивления, например ток, меняется, то другая, например потоко-сцепление, неизменна.

Еще более эффективен метод, если отрезки прямых, заменяющие в. а. х. нелинейного сопротивления, могут быть взяты совпадающими с осями координат.

Пример решения задачи для этого случая см. в § 9.52 и 9.53.

§ 9.47. АНАЛИТИЧЕСКИЙ (ИЛИ ГРАФИЧЕСКИЙ) МЕТОД РАСЧЕТА ПО ПЕРВЫМ ГАРМОНИКАМ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

В этом методе по сложному закону изменяющиеся токи и напряжения на нелинейном сопротивлении заменяют их первыми гармониками. В расчете используют вольтамперные характеристики по первым гармоникам в аналитической форме или в виде графической зависимости.

Основные этапы расчета в аналитическом варианте:

1) выражают аналитически в. а. х. нелинейного сопротивления для мгновенных значений;

2) путем подстановки в нее первой гармоники напряжения или тока получают формулу, которая дает нелинейную связь между амплитудой первой гармоники тока через нелинейное сопротивление и амплитудой первой гармоники напряжения на нем [в качестве примера такой связи можно назвать формулу (9.19)];

3) в уравнение, составленное для исследуемой цепи по второму закону Кирхгофа, подставляют вместо мгновенных значений тока и напряжения на нелинейном сопротивлении мгновенные значения их первых гармоник, а высшими гармониками пренебрегают;

4) уравнение разбивают на два уравнения: одно из них выражает собой равенство коэффициентов при синусных слагаемых левой и

правой частей уравнения, другое — равенство коэффициентов при косинусных слагаемых обеих частей уравнения;

5) производят совместное решение этих двух уравнений.

Основные этапы расчета в графическом варианте:

1) в качестве зависимости между амплитудой первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении и амплитудой первой гармоники тока через него берется нелинейная зависимость в виде графика. Эта зависимость может быть получена любым путем, в том числе и опытным;

2) произвольно задаются амплитудой I_{1m} первой гармоники тока через нелинейное сопротивление, из графика находят соответствующую ей амплитуду первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении и затем путем построения векторной диаграммы по первой гармонике для всей схемы определяют амплитуду U_{1m} первой гармоники напряжения на входе схемы. Построение векторной диаграммы производится так же, как и для обычных линейных цепей синусоидального тока, а именно: если не учитывать потери в сердечнике, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивности опережает первую гармонику протекающего через нее тока на 90° , первая гармоника напряжения на нелинейной емкости отстает от протекающего через нее тока на 90° ; первые гармоники напряжения и тока на нелинейном активном сопротивлении по фазе совпадают;

3) путем построения нескольких векторных диаграмм для различных значений I_{1m} находят соответствующие им U_{1m} и строят вольт-амперную характеристику всей схемы $U_{1m} = f(I_{1m})$.

Данный метод позволяет исследовать такие нелинейные явления, как преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, явление резонанса на основной гармонике, триггерный эффект на первой гармонике, некоторые типы автомодуляционных процессов. Но он не позволяет исследовать более сложные явления, как, например, резонанс на высших и низших гармониках, резонанс на дробных гармониках и др.

Если пользоваться аналитическим вариантом этого метода, то решение можно получить в общем виде, что весьма существенно, так как становится возможным исследовать решение при изменении любого из параметров цепи.

Этот метод будет применен для анализа работы автогенератора (см. § 9.55) и для анализа разветвленной цепи с нелинейной индуктивностью (см. пример 109).

§ 9.48. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДЕЙСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом методе графический расчет проводят путем использования вольтамперных характеристик нелинейных сопротивлений для действующих значений, полученных расчетным или опытным путем.

В этом методе полагают, что в действительности несинусоидально изменяющиеся токи и напряжения могут быть заменены эквивалент-

ными им синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения).

Все этапы расчета рассматриваемым методом полностью совпадают с перечисленными в § 9.47 этапами графического расчета по методу первой гармоники. Отличие между методами состоит только в том, что в данном методе используется в. а. х. не для первых гармоник, а для действующих значений.

Метод применен в дальнейшем для исследования простейших явлений в феррорезонансных цепях (см. § 9.56—9.62).

Если исследуют нерезонансные электрические цепи или резонансные, но для которых по тем или иным соображениям заранее известно, что в изучаемых режимах работы в них не могут возникать резонансные явления на высших и низших гармониках, то амплитуда первой гармоники тока, как правило, оказывается больше амплитуд высших гармоник тока. При этом действующее значение тока в цепи сравнительно мало отличается от действующего значения первой гармоники тока.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример: пусть ток в цепи содержит первую и третью гармоники и действующее значение третьей гармоники тока составляет 40% действующего значения первой гармоники ($I_3 = 0,4 I_1$). Действующее значение несинусоидального тока будет

$$\sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1,075 I_1,$$

т. е. всего на 7,5% больше действующего значения первой гармоники I_1 .

Метод позволяет изучать некоторые свойства нерезонансных электрических цепей, как, например, эффект усиления мощности. Для исследования свойств резонансных нелинейных цепей метод пригоден в ограниченной степени. Так, им можно приближенно исследовать простейший триггерный эффект (см. § 9.58), но нельзя, например, исследовать резонансные явления на высших гармониках.

§ 9.49. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПО ПЕРВОЙ И ОДНОЙ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМ ВЫШИМ ИЛИ НИЗШИМ ГАРМОНИКАМ

Решение этим методом осуществляют в следующей последовательности: составляют систему дифференциальных уравнений цепи, выражают аналитически характеристики нелинейных сопротивлений и эти аналитические выражения подставляют в дифференциальные уравнения цепи.

Решение для искомой величины изображают в виде ряда, состоящего из первой и одной или нескольких высших или низших гармоник, например в виде $x = x_{1m} \sin \omega t + x_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3)$. Предполагаемое решение подставляют в уравнения системы.

В результате этой подстановки оказывается возможным разбить уравнения системы на несколько трансцендентных алгебраических уравнений, составленных относительно амплитуды первой гармоники, амплитуд высших (или соответственно низших) гармоник и их фаз.

Число трансцендентных уравнений в общем случае в 2 раза больше числа учитываемых гармоник, поскольку для каждой из гармоник уравнение разбивается на два — на уравнения для синусной и косинусной составляющих.

Далее решают совместно систему трансцендентных уравнений. Трудность решения состоит в том, что каждое из трансцендентных уравнений содержит все неиз-

вестные. Поэтому при решении часто используют метод последовательных приближений.

Решение этим методом, как правило, довольно громоздко. Однако метод позволяет исследовать такие сложные явления в нелинейных цепях, как резонанс на высших гармониках, резонанс на низших и дробных гармониках и т. п. Более подробно с методом можно ознакомиться, например, в [34].

Рассматриваемый метод в литературе называют также методом гармонического баланса. Частным случаем его является метод первой гармоники (см. § 9.47).

§ 9.50. РАСЧЕТ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ

Этот метод применим к расчету нелинейных электрических цепей, на которые действуют постоянные и синусоидально изменяющиеся э. д. с., если переменные составляющие токов и напряжений относительно малы, например во много раз меньше соответственно постоянных составляющих токов и напряжений.

Последовательность расчета такова:

1) определяют положение рабочей точки на характеристике нелинейного сопротивления по постоянному току. В окрестности этой точки будет перемещаться избражающая точка под воздействием малой переменной э. д. с.;

2) через рабочую точку по постоянному току проводят касательную к характеристике нелинейного сопротивления и производят замену участка характеристики нелинейного сопротивления отрезком касательной;

3) составляют линейную схему замещения для расчета переменной составляющей. Вид схемы зависит от характера нелинейного сопротивления, а параметры ее — от величины тангенса угла, составленного касательной к характеристике и одной из осей координат.

Схема замещения полупроводникового триода для малой переменной составляющей при относительно низких частотах дана на рис. 9.22, б, для трехэлектродной лампы — на рис. 9.30, б или в. Примеры на данный метод см. на стр. 285 и 292.

§ 9.51. РАСЧЕТ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СЧЕТНЫХ МАШИН

Математические счетные машины применяют для табулирования решений систем трансцендентных уравнений и систем алгебраических уравнений высоких степеней, для табулирования решений, выраженных в виде медленно сходящихся рядов, для интегрирования линейных дифференциальных уравнений (главным образом высоких порядков), к которым сводятся нелинейные дифференциальные уравнения при кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления, а также в некоторых других случаях.

§ 9.52. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИНДУКТИВНЫЕ КАТУШКИ, СЕРДЕЧНИКИ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ПОЧТИ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ КРИВУЮ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Некоторые высококачественные магнитномягкие материалы, например 65НП, 68НМП и др., обладают тем свойством, что кривая намагничивания их близка по форме к прямоугольной: на участке $O — a$ рис. 9.33. а кривая почти совпадает с осью ординат, а на участке $a — b$ она расположена почти параллельно оси абсцисс.

На рис. 9.33, а пунктиром показана предельная петля гистерезиса. Коэрцитивная сила H_c для таких материалов очень мала и составляет всего 1—10 а/м.

Расчет электрических цепей переменного тока, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых выполнены из упомянутых магнитных материалов, обычно производят с помощью метода кусочно-линейной аппроксимации (см. § 9.46). Для облегчения расчета кривую намагничивания заменяют идеально прямоугольной (рис. 9.33, б). Участки 4—1 и 2—3 параллельны оси абсцисс, а участок 2—3 совпадает с осью ординат.

Если изображающая точка будет перемещаться по участку 1—2, то будет изменяться только индукция в сердечнике, при напряженности поля в сердечнике, почти равной нулю.

При движении изображающей точки по участкам 4—1 и 2—3 меняется только величина напряженности поля H , а индукция в сердечнике остается неизменной.

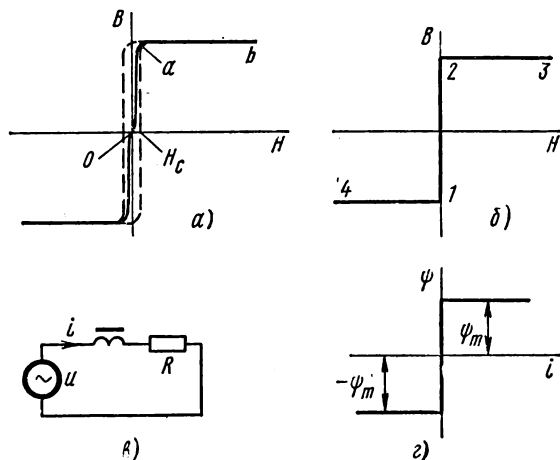


Рис. 9.33

Пример 105а. Схема рис. 9.33, в состоит из источника синусоидальной э. д. с. $u = e = E_m \sin \omega t$, нелинейной индуктивности с заданной зависимостью потокоцепления ψ от тока i и активного сопротивления R .

Требуется вывести формулу для определения ψ и i и построить графики изменения ψ и i во времени в установившемся режиме.

Решение. Так как потокоцепление ψ равно произведению индукции в сердечнике B на площадь поперечного сечения сердечника и на число витков обмотки ω , т. е. $\psi = BS\omega$, а по закону полного тока ток i пропорционален напряженности магнитного поля в сердечнике, то зависимость потокоцепления ψ от тока i (рис. 9.33, г) качественно такая же, как и зависимость $B = f(H)$ (см. рис. 9.33, б). Имеем

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = E_m \sin \omega t. \quad (9.53)$$

В интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \omega t_1$ (назовем его первым) ток $i = 0$, все напряжение приходится на нелинейную индуктивность,

$\frac{d\psi}{dt} = E_m \sin \omega t$ и потокосцепление ψ изменяется от $-\psi_m$ до $+\psi_m$ (изображающая точка на рис. 9.33, б перемещается от 1 к 2).

В этом интервале

$$d\psi = E_m \sin \omega t dt,$$

следовательно,

$$\psi = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t + C, \quad (9.54)$$

где C — постоянная интегрирования.

Во втором интервале времени от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ потокосцепление ψ остается постоянным и равным ψ_m ; $\frac{d\psi}{dt} = 0$; из уравнения (9.53) получим

$$Ri = E_m \sin \omega t, \quad \text{или} \quad i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t. \quad (9.55)$$

Таким образом, во втором интервале времени ток i изменяется по закону синуса, потокосцепление ψ постоянно и равно ψ_m . При этом изображающая точка на рис. 9.33, б перемещается по участку 2—3.

Найдем постоянную интегрирования C и величину ωt_1 . Для определения C запишем уравнение (9.54) при $\omega t = 0$. При $\omega t = 0$ $\psi = -\psi_m$, поэтому $-\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} + C$. Отсюда $C = -\psi_m + \frac{E_m}{\omega}$.

Для определения ωt_1 воспользуемся также уравнением (9.54), учтя, что при $\omega t = \omega t_1$ $\psi = \psi_m$. Получим

$$\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t_1 - \psi_m + \frac{E_m}{\omega}.$$

Отсюда

$$\cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m} \quad \text{или} \quad \omega t_1 = \arccos \left(1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m} \right).$$

Характер изменения тока i , потокосцепления ψ и $\frac{d\psi}{dt}$, когда $\frac{\omega\psi_m}{E_m} < 1$, показан на рис. 9.34.

Если амплитуда э. д. с. E_m меньше, чем $\omega\psi_m$, то второго интервала времени не возникнет, т. е. ток i будет равен нулю в течение всего периода.

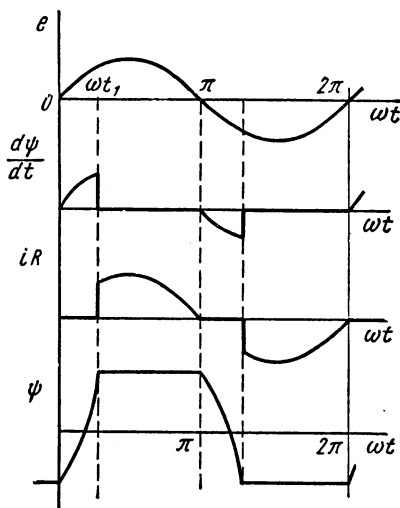


Рис. 9.34

§ 9.53. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЕМКОСТИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КУЛОНВОЛЬТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Метод расчета рассмотрим на примере цепи рис. 9.35, а, которая состоит из источника синусоидальной э. д. с. $e = E_m \sin \omega t$, нелинейного конденсатора с почти прямоугольной кулонвольтной характери-

стикой (рис. 9.35, б) и активного сопротивления R . Задача эта близка рассмотренной в § 9.52. При перезарядке конденсатора изображающая точка движется по участку 2—1 характеристики $q = f(u_c)$; при

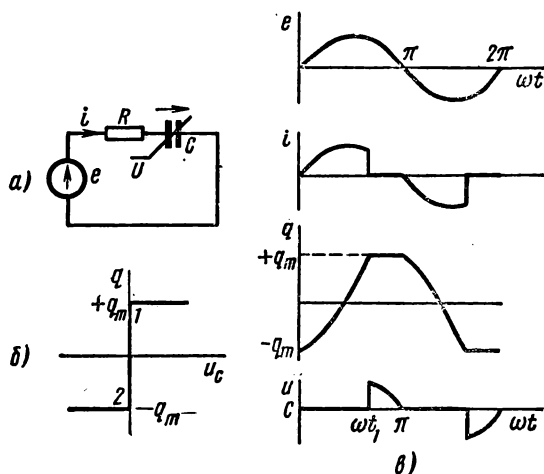


Рис. 9.35

этом $u_c = 0$. Когда перезарядка закончится, все напряжение источника окажется приложенным к конденсатору. При $t = 0$ $q = -q_m$. В интервале перезарядки, когда $u_c = 0$,

$$R \frac{dq}{dt} = E_m \sin \omega t;$$

$$q = -\frac{E_m}{\omega R} \cos \omega t - q_m + \frac{E_m}{\omega R}.$$

К концу перезарядки при ωt_1 q достигает значения q_m :

$$\cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\omega R q_m}{E_m}.$$

В интервале времени от ωt_1 до π

$$u_c = E_m \sin \omega t.$$

Графики i , q , u_c изображены на рис. 9.35, в.

§ 9.54. ВЫПРЯМЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО НАПЯЖЕНИЯ

Под выпрямителем переменного напряжения понимают процесс преобразования переменного напряжения в постоянное или пульсирующее. Выпрямление производят с помощью полупроводниковых, ламповых или других типов выпрямителей.

Неуправляемый выпрямитель часто изображают на схемах в виде большой треугольной стрелки с поперечной чертой у острия. Стрелка

показывает проводящее направление. Сопротивление выпрямителя в проводящем направлении в тысячи раз меньше, чем в непроводящем.

По числу фаз выпрямленного переменного напряжения выпрямительные схемы делятся на однофазные и многофазные. Однофазные схемы подразделяют на схемы однополупериодного и двухполупериодного выпрямления.

В однополупериодных схемах выпрямление производится в течение одного полупериода питающего напряжения, в двухполупериодных — в течение обоих полупериодов.

Две простейшие схемы однополупериодного выпрямления представлены на рис. 9.36, а и 9.37, а. Схема рис. 9.36, а состоит из источника синусоидального напряжения, выпрямителя и активного сопротивления R_H . В схеме рис. 9.37, а нагрузка образована активным сопротивлением R_H и индуктивностью L_H .

Простейшая мостовая схема однофазного двухполупериодного выпрямителя представлена на рис. 9.38, а. Она состоит из четырех выпрямителей (1, 2, 3 и 4), источника выпрямляемого синусоидального напряжения и активной нагрузки R_H .

На рис. 9.39, а изображена в. а. х. полупроводникового диода.

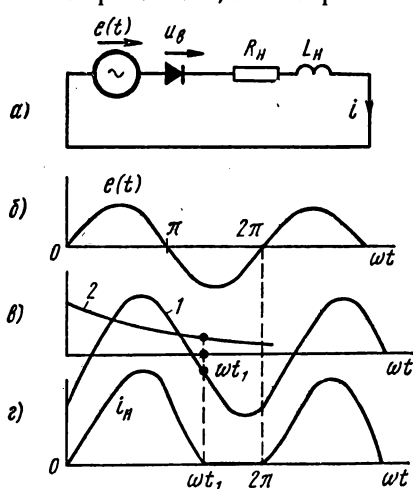


Рис. 9.37

характеризует э. д. с. источника питания схемы, кривая рис. 9.36, в — напряжение на нагрузке R_H . В первый полупериод, когда э. д. с. источника положительна и действует согласно с положительным направлением напряжения на выпрямителе, выпрямитель пропускает ток и напряжение на нагрузке точно равно э. д. с. источника. Во второй

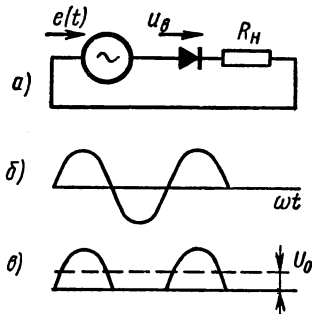


Рис. 9.36

В целях облегчения анализа вместо нее будем пользоваться идеализированной в. а. х., изображенной на рис. 9.39, б.

В соответствии с этой идеализированной характеристикой, когда через выпрямитель проходит ток, падение напряжения на нем равно нулю и, следовательно, сопротивление самого выпрямителя равно нулю. Когда напряжение на выпрямителе отрицательно (т. е. отрицательна взятая в направлении стрелки рис. 9.36, а разность потенциалов на самом выпрямителе), выпрямитель не проводит тока ($i = 0$) и сопротивление его равно бесконечности.

Рассмотрим работу схемы рис. 9.36, а. Кривая рис. 9.36, б харак-

полупериод, когда э. д. с. источника питания отрицательна, выпрямитель не пропускает тока и напряжение на нагрузке равно нулю (в этот полупериод вся э. д. с. оказывается приложенной к выпрямителю).

Таким образом, напряжение на нагрузке в схеме рис. 9.36, а имеет форму полусинусоида. Через U_0 обозначено среднее значение напряжения на нагрузке.

Пример 106. Если в схеме однополупериодного выпрямления нагрузка активно-индуктивная (см. рис. 9.37, а), то режим работы схемы существенно изменяется по сравнению с режимом работы при чисто активной нагрузке.

Уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 9.37, а

$$u_B + i_H R_H + L_H \frac{di_H}{dt} = E_m \sin \omega t \quad (a)$$

нелинейно, так как напряжение на выпрямителе u_B нелинейно зависит от тока $i_H = i$.

Проведем решение уравнения (а) методом кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления (см. § 9.46). С этой целью заменяем в. а. х. диода отрезками прямых в соответствии с рис. 9.39, б.

Уравнение (а) записано в общем виде и годится как для проводящей, так и для непроводящей частей периода.

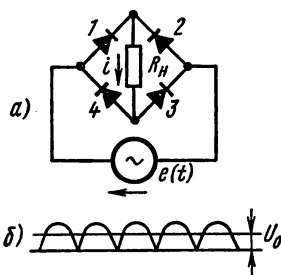


Рис. 9.38

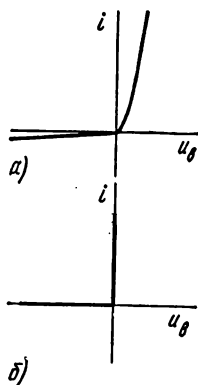


Рис. 9.39

В проводящую часть периода, когда ток $i_H \neq 0$ и движение изображающей точки происходит по вертикальному участку в. а. х. рис. 9.39, б, напряжение на диоде $u_B = 0$. При этом уравнение (а) приобретает такой вид:

$$i_H R_H + L_H \frac{di_H}{dt} = E_m \sin \omega t. \quad (a')$$

В непроводящую часть периода, когда через R_H и L_H не протекает ток, падения напряжения на сопротивлении R_H и индуктивности L_H равны нулю и изображающая точка движется по горизонтальному участку в. а. х. рис. 9.39, б. При этом уравнение (а) переходит в следующее:

$$u_B = E_m \sin \omega t. \quad (a'')$$

Таким образом, вместо одного нелинейного уравнения (а) получены два линейных уравнения (а') и (а'').

Решение уравнения (а') можно записать следующим образом *:

$$i_H = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t - \varphi) + A e^{-\frac{R_H}{L_H} t}. \quad (б)$$

* Несколько следующих абзацев рекомендуется читать после ознакомления с классическим методом расчета переходных процессов в гл. X.

Первое слагаемое правой части формулы (б) представляет собой принужденный ток, а второе — свободный ток.

$$z = \sqrt{R_H^2 + (\omega L_H)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L_H}{R_H}.$$

Выпрямитель открывается (проводит ток), начиная с $\omega t = 0$. Составим уравнение для определения постоянной интегрирования A . С этой целью запишем уравнение (б) при $t = 0$:

$$0 = -\frac{E_m}{z} \sin \varphi + A. \quad (в)$$

Ноль в левой части равенства (в) объясняется тем, что при $\omega t = 0$ $i_H = 0$. Следовательно, $A = \frac{E_m}{z} \sin \varphi$. Подставим в формулу (б) значение A и запишем окончательное выражение для тока в проводящую часть периода:

$$i_H = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{E_m}{z} \sin \varphi e^{-\frac{R_H}{L_H} t}.$$

В непроводящую часть периода $i_H = 0$.

На рис. 9.37, б изображена э. д. с. источника питания схемы $e = E_m \sin \omega t$. На рис. 9.37, в кривая 1 — принужденный ток $\frac{E_m}{z} \sin(\omega t - \varphi)$, кривая 2 — свободный ток. С течением времени свободный ток затухает по экспоненциальному закону.

Кривая рис. 9.37, г изображает ток i_H . Ординаты этой кривой равны сумме ординат кривой 1 и 2 рис. 9.37, в.

В момент времени ωt_1 , когда ток i_H становится равным нулю, выпрямитель переходит из состояния проводимости в состояние непроводимости. В интервале времени от ωt_1 до 2π выпрямитель закрыт и ток в нагрузке равен нулю. В следующий период процесс повторяется.

Рассмотрим работу мостовой схемы рис. 9.38, а, где источник синусоидальной э. д. с. $e(t)$, выпрямители 1, 2, 3, 4 и нагрузка R_H .

Источник э. д. с. включен в одну диагональ этой схемы, а нагрузка R_H — в другую. Выпрямители работают попарно.

В первый полупериод, когда э. д. с. $e(t)$ действует согласно с положительным направлением напряжения на выпрямителях 1 и 3, эти выпрямители проводят ток, а выпрямители 2 и 4 тока не проводят. Во второй полупериод, когда э. д. с. $e(t)$ изменит знак и действует согласно с положительным направлением напряжения на выпрямителях 2 и 4, ток проводят выпрямители 2 и 4, а выпрямители 1 и 3 тока не проводят. Направление протекания тока через нагрузку показано на рис. 9.38, а стрелкой. Ток через нагрузку протекает все время в одном и том же направлении. Форма напряжения на нагрузке иллюстрируется кривой рис. 9.38, б.

§ 9.55. ЛАМПОВЫЙ ГЕНЕРАТОР

Ламповый генератор * является простейшим, не содержащим подвижных частей преобразователем энергии источника постоянной э. д. с. в энергию переменного тока.

* Его называют также ламповым автогенератором. Кроме схемы рис. 9.40 с колебательным контуром в сеточной цепи, применяется схема и с колебательным контуром в анодной цепи. Все выводы § 9.55 распространяются и на схему с колебательным контуром в анодной цепи.

Возникающие в ламповом генераторе колебания относятся к классу колебаний, называемых автоколебаниями.

Автоколебания представляют собой периодические колебания, возникающие в системах, находящихся под воздействием постоянных вынуждающих сил (сил, не являющихся функцией времени).

В системе, описанной далее, источником постоянной вынуждающей силы является источник постоянной э. д. с. E_a .

Рассмотрим принцип работы лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 9.40). В анодную цепь лампы включены индуктивность L_a и источник э. д. с. E_a .

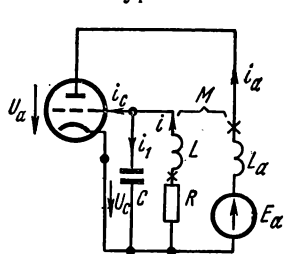


Рис. 9.40

В анодную цепь лампы включены индуктивность L_a и источник э. д. с. E_a . В сеточной цепи имеется колебательный контур, состоящий из индуктивности L , магнитносвязанной с L_a , активного сопротивления R и емкости C .

Выходными зажимами генератора являются зажимы индуктивности L_a . Напряжение на этих зажимах по форме близко к синусоидальному.

Воспользовавшись методом первой гармоники (см. § 9.47), определим амплитуду и угловую частоту автоколебаний в схеме рис. 9.40, когда сеточная характеристика лампы по форме близка: а) к жирной кривой рис. 9.27 и б) к пунктирной кривой рис. 9.27. Эти кривые повторены на рис. 9.41, а и б.

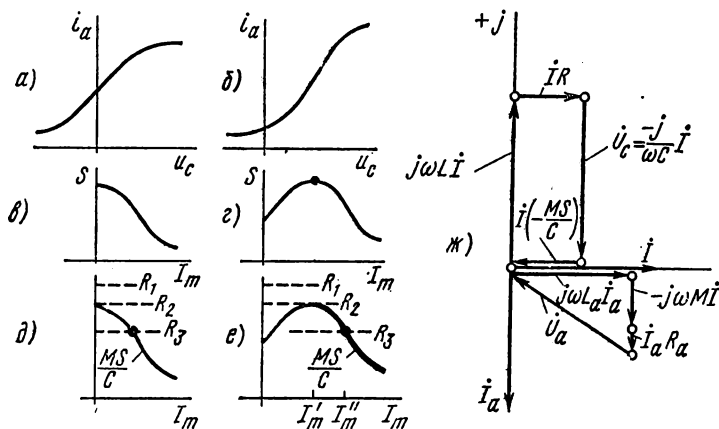


Рис. 9.41

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений величин колебательного контура сеточной цепи, учтя, что при выбранных положительных направлениях для токов имеет место встречное включение магнитносвязанных индуктивностей L и L_a :

$$L \frac{di}{dt} - M \frac{di_a}{dt} + Ri + u_c = 0, \quad (9.56)$$

где u_c — напряжение на сетке лампы (оно же напряжение на конденсаторе).

Из опыта известно, что ток i изменяется во времени почти по гармоническому закону, поэтому положим $i = I_m \sin \omega t$. Тогда

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t, \quad u_c = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = -U_{cm} \cos \omega t,$$

где $U_{cm} = I_m \frac{1}{\omega C}$.

Анодный ток является функцией сеточного напряжения $i_a = f(u_c)$ — см. рис. 9.41, а и б. Так как зависимость $i_a = f(u_c)$ однозначна, то первая гармоника тока i_a , т. е. $-I_{am} \cos \omega t$, находится в фазе с первой гармоникой $u_c = -U_{cm} \cos \omega t$.

В уравнении (9.56) участвует производная $\frac{di_a}{dt}$. Она может быть найдена следующим образом: $\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du_c} \frac{du_c}{dt}$. Но

$$\frac{di_a}{du_c} \approx \frac{\Delta i_a}{\Delta u_c} = \frac{-I_{am} \cos \omega t}{-U_{cm} \cos \omega t} = \frac{I_{am}}{U_{cm}} = S, \quad (9.57)$$

где S — крутизна лампы по первой гармонике. Ее находят графическим или аналитическим путем по характеристике $i_a = f(u_c)$, придавая I_m различные значения. Каждому значению I_m соответствует некоторое U_{cm} , а значит и некоторые I_{am} и S . В свою очередь

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt} (-U_{cm} \cos \omega t) = \frac{I_m}{C} \sin \omega t$$

$$\left(U_{cm} = I_m \frac{1}{\omega C} \right).$$

На рис. 9.41, в и г изображены зависимости $S = f(I_m)$, соответствующие рис. 9.41, а и б. Для рис. 9.41, в с ростом I_m уменьшается S вследствие насыщения (из рис. 9.41, а видно, что при больших u_c анодный ток почти не увеличивается с ростом u_c). Зависимость $S = f(I_m)$, изображенная на рис. 9.41, г, имеет другой характер: сначала S возрастает вследствие перехода на более крутой участок кривой $i_a = f(u_c)$ рис. 9.41, б, а затем уменьшается вследствие насыщения.

Подставив найденные значения $\frac{di_a}{dt}$, u_c и тока i в уравнение (9.56), получим

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos \omega t + \left(R - \frac{MS}{C} \right) I_m \sin \omega t = 0. \quad (9.58)$$

Сумма двух функций, одна из которых изменяется во времени по закону синуса, а другая — по закону косинуса, равна нулю для любого момента времени. Это может быть либо в случае, когда $I_m = 0$ (т. е. когда колебания отсутствуют), либо при $I_m \neq 0$, когда выполняются два условия:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (9.59)$$

$$R = \frac{MS}{C}. \quad (9.60)$$

Из (9.59) следует, что угловая частота автоколебаний

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9.61)$$

Исследуем условия возбуждения колебаний, используя (9.60). С этой целью построим зависимость левой и правой частей (9.60) в функции от I_m — см. рис. 9.41, δ и e (рис. 9.41, δ соответствует рис. 9.41, δ , а рис. 9.41, e — рис. 9.41, e), полагая, что изменяется R , а M и C неизменны. Сопротивление R не является функцией амплитуды тока I_m , поэтому левая часть (9.60) представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. Чем меньше R , тем ниже расположится прямая. Правая часть (9.60) — кривая, подобная кривой рис. 9.41, δ или кривой рис. 9.41, e .

При $R > R_2$ прямая не пересекается с кривой, поэтому колебания будут отсутствовать. Колебания возбуждятся при $R \leq R_2$. Рис. 9.41, δ иллюстрирует так называемое *мягкое возбуждение колебаний*, когда при уменьшении R амплитуда тока I_m плавно увеличивается, начиная с нулевого значения. Рис. 9.41, e иллюстрирует так называемое *жесткое возбуждение колебаний*, когда при плавном уменьшении R амплитуда I_m скачком увеличивается с нуля до некоторого относительно большого значения, например при $R = R_2$ до I'_m , а при $R = R_3$ до I''_m .

Аналогичным образом могут быть рассмотрены условия возбуждения колебаний, если оставить неизменным R и M и изменять C или если R и C неизменны, а меняется M . Правая ветвь кривой рис. 9.41, e соответствует устойчивым колебаниям (она вычерчена утолщенной линией), левая — неустойчивым колебаниям (левая ветвь кривой является нерабочей ветвью). Для токов и напряжений сеточной и анодной цепей (для их первых гармоник) могут быть построены векторные диаграммы для действующих значений первых гармоник (рис. 9.41, $ж$). Уравнению (9.58) соответствует уравнение в комплексах

$$j\omega L \dot{I} - \frac{j}{\omega C} \dot{I} + \dot{I} R - \dot{I} \frac{MS}{C} = 0. \quad (9.62)$$

Для мгновенных значений изменяющихся во времени величин анодной цепи (постоянная составляющая тока i_a , напряжения u_a , и постоянная э. д. с. E_a не учитываются) справедливо уравнение

$$L_a \frac{di_a}{dt} - M \frac{di}{dt} + i_a R_a + u_a = 0.$$

Ему соответствует уравнение в комплексах

$$j\omega L_a \dot{I}_a - j\omega M \dot{I} + \dot{I}_a R_a + \dot{U}_a = 0, \quad (9.63)$$

где R_a — активное сопротивление индуктивности L_a ;

\dot{U}_a — комплекс первой гармоники анодного напряжения.

Энергия на покрытие потерь в сеточной цепи доставляется из анодной цепи вследствие наличия магнитной связи между ними.

Воздействие выходной цепи (в данном случае анодной) на входную цепь (в рассматриваемом случае на сеточную) называют *обратной связью*. Обратная связь является необходимым условием существования автоколебаний.

§ 9.56. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим группу довольно грубых явлений, которые имеют место в цепях, содержащих нелинейную индуктивность и линейную емкость; такие цепи называют *феррорезонансными*. Аналогичные явления имеют место в цепи с линейной индуктивностью и нелинейной емкостью.

Для анализа этих явлений можно воспользоваться либо методом первой гармоники (см. § 9.47), либо методом расчета по действующим значениям (см. § 9.48). В § 9.57—9.62 будет применен метод расчета по действующим значениям. Будем пользоваться вольтамперной характеристикой нелинейной индуктивности для действующих значений тока и напряжения. В этом методе в действительности несинусоидальные токи и напряжения заменяют их эквивалентными синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения по § 8.12).

Когда в § 9.57—9.61, 9.64, 9.67 говорится о сдвиге по фазе между током и напряжением на каком-либо элементе схемы, то под сдвигом по фазе понимается угол между эквивалентным синусоидальным током и эквивалентным синусоидальным напряжением.

§ 9.57. ПОСТРОЕНИЕ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ФЕРРОРЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ

В схеме рис. 9.42, а последовательно включены нелинейная индуктивность L , линейное активное сопротивление R и линейная емкость C . Вольтамперная характеристика катушки со стальным сердечником $U_L = f(I)$ изображается кривой 1 на рис. 9.42, б; вольтамперная характеристика емкости $U_C = \frac{1}{\omega C} I$ — прямой 2, вольтамперная характеристика (в. а. х.) активного сопротивления $U_R = RI$ — прямой 3.

Точки, принадлежащие результирующей вольтамперной характеристике схемы — кривой 4, получаем следующим образом.

Произвольно задаемся некоторым током I , находим для него разность напряжений $U_L - U_C$ (напряжения на индуктивности и на емкости находятся в противофазе) и напряжение U_R ; результирующее напряжение U равно гипотенузе треугольника, построенного на катетах U_R и $U_L - U_C$.

При сравнительно малом активном сопротивлении R на результирующей в. а. х. цепи имеется падающий участок, а сама в. а. х. имеет N -образную форму. С увеличением R падающий участок на в. а. х. исчезает.

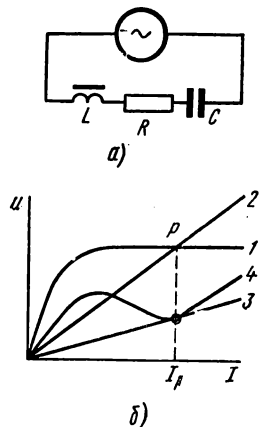


Рис. 9.42

§ 9.58. ТРИГГЕРНЫЙ ЭФФЕКТ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ФЕРРОРЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ

На рис. 9.43, *а* отдельно представлена кривая 4 рис. 9.42, *б*. Будем начинать с нуля плавно увеличивать напряжение источника э. д. с. в схеме 9.42, *а*. При этом изображающая точка на рис. 9.43, *а* будет перемещаться от точки 0 через точку 1 к точке 2. Если напряжение и дальше повышать, то изображающая точка скачком переместится из точки 2 в точку 4, а затем движение будет происходить по участку 4—5.

При уменьшении напряжения изображающая точка будет перемещаться от точки 5 через 4 к точке 3, затем произойдет скачок в точку 1 и далее от точки 1 к точке 0. Таким образом, при подъеме напряжения и достижении им значения U_2 в цепи происходит скачкообразное уве-

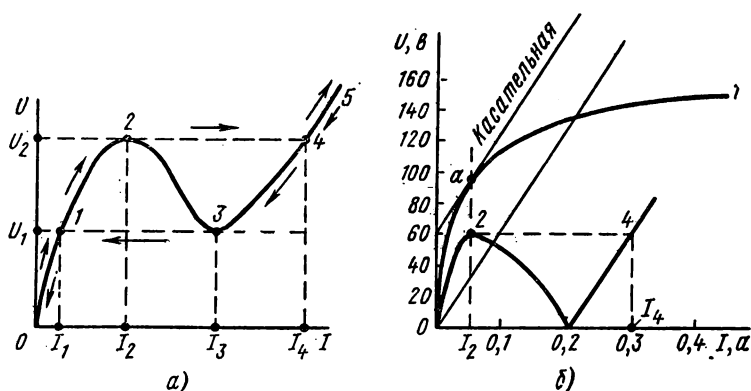


Рис. 9.43

личение тока со значения I_2 до I_4 . При этом резко изменяется угол сдвига фаз между током в цепи и общим напряжением: в точке 2 ток отстает от напряжения ($U_L > U_C$), в точке 4 ток опережает напряжение ($U_C > U_L$). При плавном уменьшении напряжения источника э. д. с. и достижении им значения U_1 ток в цепи скачком уменьшается со значения I_3 до I_1 .

Явление резкого изменения тока в цепи при незначительном изменении напряжения на входе будем называть *триггерным эффектом в последовательной феррорезонансной цепи*.

Если схему рис. 9.42, *а* подключить к напряжению U , величина которого находится в интервале между U_1 и U_2 , то в схеме установится один из двух возможных режимов. Первый режим соответствует положению рабочей точки на участке между точками 1 и 2, второй — на участке между точками 3 и 4.

На каком из двух участков окажется рабочая точка, зависит от характера переходного процесса в цепи при подключении ее к источнику э. д. с.

§ 9. 59. ФЕРРОРЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Феррорезонансом напряжений называют режим работы цепи рис. 9.42, а, при котором первая гармоника тока в цепи совпадает по фазе с напряжением U источника э. д. с. На рис. 9.42, б построены вольтамперные характеристики для действующих значений, феррорезонанс напряжений приблизительно соответствует точке p (находится немного левее ее).

Феррорезонанса напряжения можно достичь путем изменения напряжения или частоты источника питания схемы, путем изменения емкости и параметров катушки со стальным сердечником.

Пример 107. Кривая 1 рис. 9.43, б представляет собой в. а. х. нелинейной индуктивности. Пренебрегая активным сопротивлением, найти, какой величины емкость следует включить последовательно с нелинейной индуктивностью (схема рис. 9.42, а), чтобы триггерный эффект происходил при 60 в. Найти, во сколько раз ток после скачка I_4 будет больше тока до скачка I_2 ; $\omega = 314 \text{ сек}^{-1}$.

Решение. Из точки $U = 60 \text{ в}$, $I = 0$ проводим касательную к в. а. х. нелинейной индуктивности. Касание произойдет в точке а. Вольтамперная характеристика емкости (прямая) должна быть проведена из начала координат параллельно касательной. Тангенс угла наклона ее к оси абсцисс численно равен $\frac{1}{\omega C}$.

Из рис. 9.43, б находим

$$\frac{1}{\omega C} = 600 \text{ ом}; C = \frac{10^6}{314 \cdot 600} = 5,32 \text{ мкф}.$$

Ток при скачке изменяется с $I_2 = 0,06 \text{ а}$ до $I_4 = 0,3 \text{ а}$; $\frac{I_4}{I_2} = 5$.

§ 9. 60. ВОЛЬТАМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЕМКОСТИ И КАТУШКИ СО СТАЛЬНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ. ФЕРРОРЕЗОНАНС ТОКОВ

Кривая 3 рис. 9.44, а представляет собой результирующую вольтамперную характеристику для схемы рис. 9.44, б. Ток I в неразветвленной части схемы равен алгебраической сумме токов I_L и I_C . Абсциссы кривой 3 равны разности соответствующих абсцисс кривых 2 и 1. (Индуктивность L на рис. 9.44, б нелинейна.)

До точки p ток I_C по модулю больше тока I_L . В точке p кривые 1 и 2 пересекаются. Выше точки p ток I_L по модулю больше I_C . Под феррорезонансом токов в схеме рис. 9.44, б понимают режим работы ее, при котором реактивная составляющая первой гармоники тока I_L равна току I_C . В этом режиме (точка c на рис. 9.44, в) ток в неразветвленной части цепи не равен нулю, он содержит активную составляющую и высшие гармоники тока I_L .

Касательная rn на рис. 9.44, а к кривой 1 в точке n проведена параллельно прямой 2. Отрезок $ta = nq = r\theta$ определяет ток I_2 на рис. 9.44, в. Точки m , n , a , q находятся на одной горизонтали.

§ 9. 61. ТРИГГЕРНЫЙ ЭФФЕКТ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФЕРРОРЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ

На рис. 9.44, *в* изображена результирующая вольтамперная характеристика схемы рис. 9.44, *б*.

Если в качестве источника питания схемы взять источник тока и (начиная с нуля) плавно увеличивать ток I в цепи, то при достижении

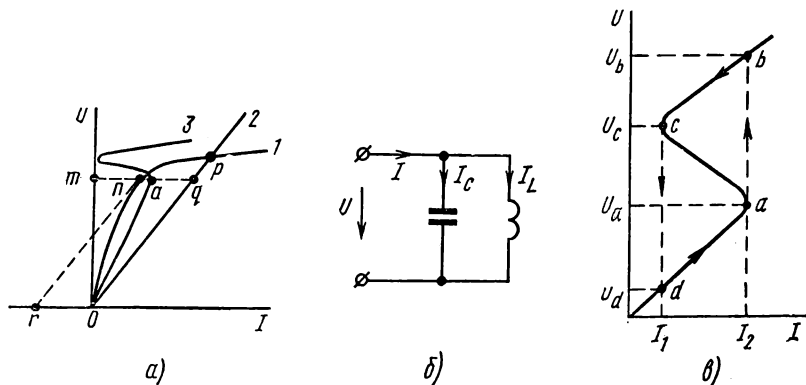


Рис. 9.44

значения I_2 напряжение на входе цепи скачком возрастает со значения U_a до U_b .

При плавном уменьшении тока и достижения им значения I_1 напряжение скачком уменьшается со значения U_c до U_d .

Пример 108. В. а. х. нелинейной индуктивности в схеме рис. 9.44, *б* изображена в виде кривой I на рис. 9.45. Пренебрегая активным сопротивлением и высшими гармониками, определить величину емкости C , которую надо включить в схеме рис. 9.44, *б*, чтобы триггерный эффект имел место при токе $I_2 = 0,15$ а; $\omega = 314 \text{ сек}^{-1}$.

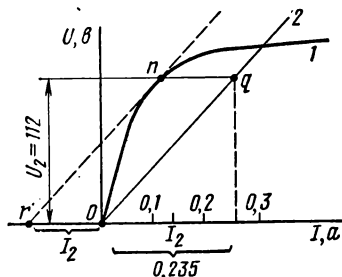


Рис. 9.45

Решение. В соответствии с построениями на рис. 9.44, *а* откладываем величину тока I_2 влево от точки 0, получаем точку r . Из нее проводим пунктиром касательную к кривой 1 в точке n . Через точку n проводим горизонталь. Ордината ее равна напряжению

$U_2 = 112$ в, при котором произойдет триггерный скачок. Из точки 0 проводим прямую 2, параллельную касательной rn . Прямая 2 представляет собой в. а. х. емкости. Абсцисса точки q ($0,235$ а) равна току через емкость при напряжении U_2 . Следовательно, $\frac{1}{\omega C} = \frac{112}{0,235} = 478 \text{ ом}$, $C = 6,68 \text{ мкф}$.

§ 9. 62. ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫЙ СТАБИЛИЗАТОР НАПЯЖЕНИЯ

Принцип стабилизации напряжения переменного тока тот же, что и стабилизация напряжения постоянного тока, а именно: выходное напряжение снимается с такого участка цепи, на котором оно по величине остается почти постоянным при изменении величины входного напряжения.

Для стабилизации напряжения переменного тока широко применяют различные феррорезонансные схемы. Одна из них представлена на рис. 9.46, а, схема состоит из параллельного феррорезонансного контура и последовательно с ним включенной линейной индуктивности.

На рис. 9.46, б: кривая 1 — в. а. х. нелинейной индуктивности; прямая 2 — в. а. х. емкости; кривая 3 — в. а. х. параллельного феррорезонансного контура; прямая 4 — в. а. х. линейной индуктивности L ; кривая 5 — результирующая в. а. х. всей схемы, ординаты ее равны алгебраической сумме ординат кривой 3 и прямой 4.

Намотаем на сердечник линейной индуктивности дополнительную обмотку ω_k и присоединим к основной схеме, как показано пунктиром на рис. 9.46, а.

Напряжение на выходе стабилизатора равно напряжению на зажимах ab минус э. д. с., наводимая в обмотке ω_k . Последняя линейно зависит от тока I (прямая 6 рис. 9.46, б). Напряжение на выходе стабилизатора изобразится кривой 7; ординаты ее равны разности соответствующих ординат кривой 5 и прямой 6. Зависимость напряжения на выходе стабилизатора $U_{\text{вых}}$ от напряжения на входе $U_{\text{вх}}$ при холостом ходе стабилизатора дана на рис. 9.46, в. Для построения ее следует придавать току произвольные значения и для каждого его значения по кривым 7 и 5 найти соответствующие величины $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$.

Стабилизация имеет место только при $U_{\text{вх}} > U_1$. Поэтому в область $U_{\text{вх}} < U_1$ кривая на рис. 9.46, а не продолжена.

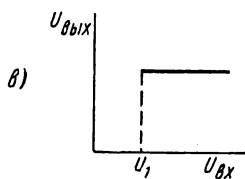
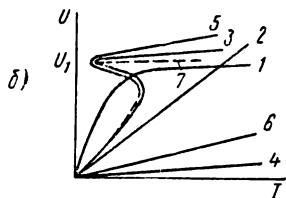
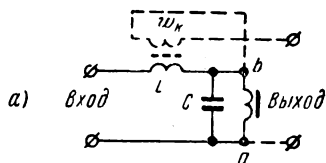


Рис. 9.46

§ 9. 63. ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА И ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ И ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ДИАГРАММ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

В § 9.57—9.62 были рассмотрены некоторые явления, которые анализировались графически с помощью вольтамперных характеристик по действующим значениям или по первым гармоникам. Прибли-

женное исследование режимов работы сложных разветвленных нелинейных цепей переменного тока, в особенности когда высшие гармоники выражены слабо, часто производят путем построения векторных или топографических диаграмм.

Диаграммы строят отдельно для каждой из гармоник. Построение производят в принципе так же, как и для линейных цепей (см. § 5.18). Отличие состоит в том, что зависимость первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении от первой гармоники тока через него является нелинейной и берется из графика или ее подсчитывают, пользуясь аналитическим выражением.

Если не учитывать потери в ферромагнитном сердечнике и потери от высших гармоник тока, то первая гармоника напряжения на не-

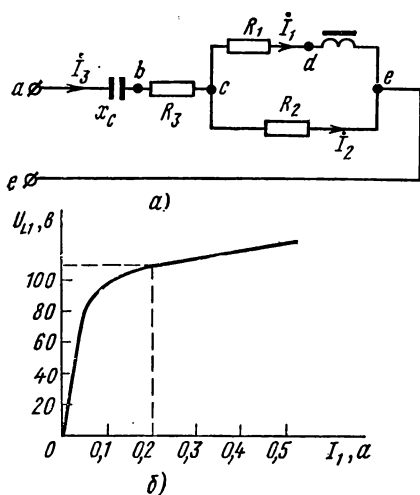


Рис. 9.47

линейной индуктивности на 90° по фазе опережает первую гармонику тока через нее. Если же учитывать потери в стали сердечника и (или) потери в активных сопротивлениях цепи от высших гармоник тока, то этот угол меньше 90° (см., например, рис. 9.49, в). Аналогично, если не учитывать наличие потерь в сегнетоэлектрике и потерь в цепи от высших гармоник тока, то первая гармоника напряжения на нелинейной емкости на 90° отстает от первой гармоники тока через емкость.

Пример 109. Для цепи рис. 9.47, а построить топографическую диаграмму по первой гармонике при значении тока $I_1 = 0,2$ а. Вольтамперная характеристика по первой гармонике для нелинейной индук-

тивности изображена на рис. 9.47, б. Емкостное сопротивление по первой гармонике $X_c = 229$ ом; $R_1 = 250$ ом, $R_2 = 407$ ом, $R_3 = 122$ ом.

Решение. Обозначим токи в ветвях и узловые точки схемы в соответствии с рис. 9.47, а. На рис. 9.48 направим ток $I_1 = 0,2$ а по оси $+1$. Потенциал точки e примем равным нулю. Находим $\phi_d = \phi_e + \dot{U}_1$. Напряжение на нелинейной индуктивности \dot{U}_1 при токе $I_1 = 0,2$ а по модулю равно 110 в (найдено из кривой рис. 9.47, б) и по фазе на 90° опережает ток I_1 ; $\phi_e = \phi_d + I_1 R_1$; $I_1 R_1 = 0,2 \cdot 250 = 50$ в и по фазе совпадает с I_1 .

Под действием напряжения \dot{U}_{ce} , по модулю равного приблизительно 122 в, протекает ток I_2 , численно равный $\frac{122}{407} = 0,3$ а и по фазе совпадающий с \dot{U}_{ce} . Ток $I_3 = I_1 + I_2$. По модулю ток $I_3 \approx 0,41$ а; $\phi_b = \phi_c + I_3 R_3$; $I_3 R_3 = 0,41 \cdot 122 = 50$ в; $\phi_a = \phi_b + I_3 (-jX_c)$.

Напряжение на емкости \dot{U}_{ab} численно равно $0,41 \cdot 229 = 94$ в и по фазе на 90° отстает от тока I_3 .

Напряжение на входе схемы рис. 9.47, а в рассматриваемом режиме работы по модулю равно 164 в.

Из рис. 9.48 можно определить углы между любыми токами и напряжениями цепи рис. 9.47, а. Проведав аналогичные подсчеты и построения при других значениях тока I_1 (например, равных 0,5; 1; 2; 3 а и т. д.), можно определить в этих режимах значения всех токов, напряжений и углов сдвига фаз, свести данные в таблицу и затем, пользуясь ею, построить кривую зависимости любого тока, любого напряжения или любого угла сдвига фаз в функции от модуля входного напряжения или от модуля какого-либо другого напряжения или тока.

При рассмотрении характеристик управляемой нелинейной индуктивности (см. § 9.24), феррорезонансных схем (см. § 9.57—9.62), стабилизатора напряжения (см. § 9.62) нелинейную индуктивность полагали идеализированной, а именно: не учитывали потери в ее сердечнике, наличие потока рассеяния и падение напряжения в активном сопротивлении самой обмотки. Это делалось с целью, чтобы основные свойства упомянутых схем и устройств не были завуалированы относительно второстепенными факторами.

Рассмотрим теперь векторную диаграмму нелинейной индуктивности с учетом этих факторов.

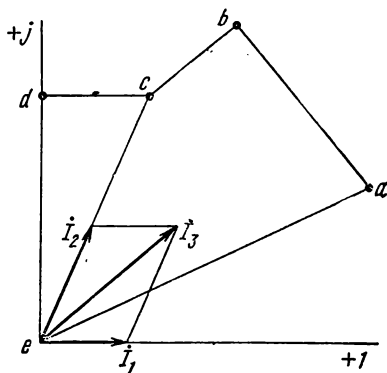


Рис. 9.48

§ 9. 64. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Нелинейная индуктивность изображена на рис. 9.49, а. Активное сопротивление самой обмотки ω назовем R .

Протекающий по обмотке ток создает в сердечнике магнитный поток. Большая часть этого потока — поток Φ_m — замыкается по сердечнику, а меньшая часть — поток Φ_s — по воздуху. Поток Φ_m называют основным, а Φ_s — потоком рассеяния.

Обычно поток Φ_s составляет всего несколько процентов от потока Φ_m . Однако могут быть и такие режимы работы, в которых поток Φ_s оказывается соизмеримым с потоком Φ_m . Такие режимы имеют место, если сердечник работает при большом насыщении или когда в сердечнике имеется относительно большой воздушный зазор δ .

При построении векторной диаграммы заменим в действительности несинусоидальный ток и несинусоидальный поток эквивалентными синусоидальными величинами.

Отношение потокоцепления рассеяния $\psi_s = \omega \Phi_s$ к току I принято называть *индуктивностью рассеяния*

$$L_s = \frac{\psi_s}{I} = \frac{\omega \Phi_s}{I}. \quad (9. 64)$$

Индуктивное сопротивление $X_s = \omega L_s$ называют *индуктивным сопротивлением рассеяния*.

Схема замещения нелинейной индуктивности изображена на рис. 9.49, б. Она отличается от схемы рис. 9.3, а тем, что в ней добавлено сопротивление X_s . В неразветвленной части схемы включены активное сопротивление R обмотки w и индуктивное сопротивление рассеяния X_s .

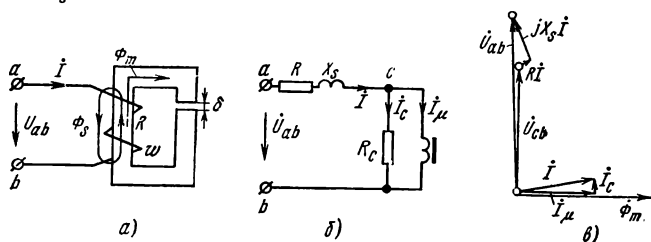


Рис. 9.49

На участке cb есть две ветви. Правую ветвь образует идеализированная нелинейная индуктивность, по которой проходит намагничивающий ток I_μ . Левую ветвь образует активное сопротивление R_c , потери в котором равны потерям P_c на гистерезис и на вихревые токи в сердечнике нелинейной индуктивности. По левой ветви течет ток

$$I_c = \frac{P_c}{U_{cb}}. \quad (9.65)$$

На рис. 9.49, в изображена векторная диаграмма нелинейной индуктивности в соответствии со схемой рис. 9.49, б. Эта векторная диаграмма строится так же, как и для обычных линейных схем.

Начнем ее построение с потока Φ_m .

Оба потока $\dot{\Phi}_m$ и $\dot{\Phi}_s$ пронизывают обмотку w рис. 9.49, а и наводят в ней э. д. с. самоиндукции.

Напряжение U_{cb} на зажимах идеализированной нелинейной индуктивности равно по величине и противоположно по знаку э. д. с. самоиндукции, возникающей в обмотке w схемы рис. 9.49, а под действием основного потока $\dot{\Phi}_m$:

$$U_{cb} = j\omega w \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}. \quad (9.66)$$

Деление $\dot{\Phi}_m$ на $\sqrt{2}$ объясняется переходом от амплитудного значения потока к действующему. Напряжение U_{cb} на 90° опережает поток $\dot{\Phi}_m$.

Ток I_μ — это ток через идеализированную индуктивность (т. е. через индуктивность, в сердечнике которой нет потерь энергии); он на 90° отстает от напряжения U_{cb} и по фазе совпадает с потоком $\dot{\Phi}_m$. Ток I_c совпадает по фазе с напряжением U_{cb} . О том, как определять токи I_μ и I_c , сказано в § 9.65 и 9.66.

По первому закону Кирхгофа,

$$I = I_\mu + I_c. \quad (9.67)$$

Напряжение U_{ab} на входе схемы равно геометрической сумме напряжения U_{cb} , падения напряжения IR в активном сопротивлении и падения напряжения jIX_s в индуктивном сопротивлении рассеяния.

Величины тока I_μ и тока I_c не пропорциональны величине напряжения U_{cb} , а следовательно, и величине напряжения U_{ab} на входе схемы, т. е. если напряжение U_{ab} увеличить, например, в 1,3 раза, то токи I_μ и I_c увеличатся не в 1,3 раза, а больше.

При построении векторной диаграммы исходили из того, что величина напряжения U_{cb} известна. По напряжению U_{cb} определили токи I_μ и I_c и затем нашли напряжение U_{ab} на входных зажимах индуктивной катушки.

Однако обычно бывает известно напряжение U_{ab} , а напряжение U_{cb} неизвестно. Поэтому при построении векторной диаграммы при заданном U_{ab} сначала следует разобраться, может ли напряжение U_{cb} в исследуемом режиме работы схемы значительно отличаться от напряжения U_{ab} .

Если падения напряжения в сопротивлениях R и X_s составляют малую величину по сравнению с U_{ab} , например всего 3—8% от U_{ab} , то можно в первом приближении считать, что $U_{cb} \approx U_{ab}$. Если же падения напряжения в сопротивлениях R и X_s соизмеримы с напряжением U_{cb} , то тогда для определения напряжения U_{cb} приходится проделывать вспомогательную работу, а именно: строить векторные диаграммы для нескольких значений U_{cb} , например равных 1; 0,9; 0,8; 0,7 от U_{ab} ; для каждого из этих значений U_{cb} находить свое U_{ab} , по результатам строить вспомогательную кривую $U_{cb} = f(U_{ab})$, из нее находить U_{cb} при заданном U_{ab} и затем строить искомую векторную диаграмму.

§ 9. 65. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГО ТОКА

Ток I_0 и его составляющие I_μ и I_c находят либо опытным путем, либо аналитическим, либо путем графических построений.

Рассмотрим аналитическое определение их. Если через l (м) обозначить длину средней магнитной линии на пути в стали (рис. 9.50), δ (м) — длину «воздушного» зазора в магнитной цепи, B (тл) — мгновенное значение магнитной индукции, H (а/м) — мгновенное значение

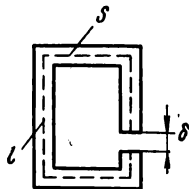


Рис. 9.50

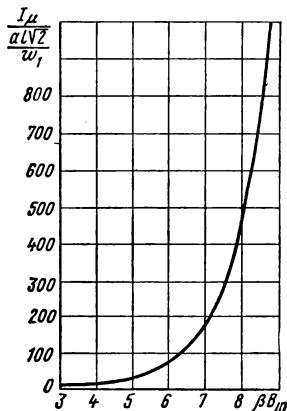


Рис. 9.51

напряженности поля в сердечнике, то мгновенное значение намагничивающего тока i_μ (а) на основании закона полного тока равно

(см. стр. 64)

$$i_{\mu} = \frac{Hl + 0,8B\delta \cdot 10^6}{\omega_1}. \quad (9.68)$$

На векторной диаграмме откладывают действующее значение намагничивающего тока I_{μ} .

Для определения действующего значения намагничивающего тока надо в выражении (9.68) подставить $B_m \sin \omega t$ вместо B ($B_m = \frac{\Phi_m}{S}$), H заменить на $\alpha \operatorname{sh}(\beta B_m \sin \omega t)$, разложить гиперболический синус от периодического аргумента в ряд по функциям Бесселя [см. формулу (9.9)] и воспользоваться формулой (8.11'), с помощью которой определяется действующее значение тока через амплитуды отдельных гармоник. В результате получим

$$I_{\mu} = \frac{\sqrt{2} \alpha l}{\omega_1} \times \sqrt{\left[-jJ_1(j\beta B_m) + \frac{0,8\delta\beta B_m \cdot 10^6}{2\alpha l\beta} \right]^2 + [jJ_3(j\beta B_m)]^2 + [-jJ_5(j\beta B_m)]^2 + \dots} \quad (9.69)$$

Если воздушный зазор $\delta = 0$, формула (9.69) упрощается:

$$I_{\mu} = \frac{\sqrt{2} \alpha l}{\omega_1} \sqrt{[-jJ_1(j\beta B_m)]^2 + [jJ_3(j\beta B_m)]^2 + [-jJ_5(j\beta B_m)]^2 + \dots} \quad (9.70)$$

На рис. 9.51 изображена кривая, выражающая зависимость

$$\frac{I_{\mu}\omega_1}{\sqrt{2} \alpha l} = f(\beta B_m)$$

и построенная по формуле (9.70). С помощью этой зависимости по βB_m находится $\frac{I_{\mu}\omega_1}{\sqrt{2} \alpha l}$, а затем определяется I_{μ} (ω_1 , α и l известны).

§ 9. 66. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ТОКА ПОТЕРЬ

Ток I_c , обусловленный потерями в стальном сердечнике, определяется как частное от деления потерь в сердечнике от вихревых токов и гистерезиса на величину э. д. с., наведенную рабочим потоком Φ_m в обмотке ω_1 и равную напряжению U_{cb} :

$$I_c = \frac{P_c}{U_{cb}}; \quad U_{cb} = \frac{\omega\omega_1\Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44f\omega_1\Phi_m. \quad (9.71)$$

Здесь P_c — полные потери в стали от вихревых токов и гистерезиса;

$$P_c = m p_c,$$

где m — масса сердечника, кг; p_c — потери в 1 кг сердечника.

Величина потерь в 1 кг электротехнической стали при индукциях 1,0 и 1,5 тл и частоте 50 гц нормирована ГОСТ 802—58.

Обозначим: $p_{1,0}$ — потери в 1 кг стали при $B_m = 1$ тл и $f = 50$ гц; $p_{1,5}$ — потери в 1 кг стали при $B_m = 1,5$ тл и $f = 50$ гц. Значения $p_{1,0}$ и $p_{1,5}$ приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Марка стали	Толщина листа, мм	$p_{1,0}$, вт/кг	$p_{1,5}$, вт/кг
Э41	0,5	1,6	3,6
Э42	0,5	1,4	3,2
Э43	0,5	1,25	2,9
Э41	0,35	1,35	3,2
Э42	0,35	1,2	2,8
Э43	0,35	1,05	2,5

Потери при других индукциях и частотах, мало отличающихся от 50 гц, определяются следующей эмпирической формулой:

$$p_c = p_{1,0} B^n \left(\frac{f}{50} \right)^{1,3} \text{ вт/кг};$$

$$n = 5,69 \lg \frac{p_{1,5}}{p_{1,0}}.$$

§ 9. 67. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТРАНСФОРМАТОРА СО СТАЛЬНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

В § 5.39 рассматривались соотношения, характеризующие работу трансформатора, для которого зависимость между напряженностью поля и потоком в сердечнике была линейной, а потери в сердечнике отсутствовали.

Для улучшения магнитной связи между первичной (w_1) и вторичной (w_2) обмотками трансформатора сердечник его выполняют из ферромагнитного материала (рис. 9.52) *.

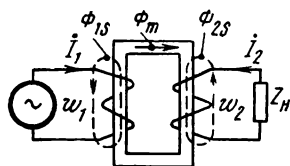


Рис. 9.52

В данном параграфе рассмотрены соотношения, характеризующие работу трансформатора с учетом того, что зависимость между напряженностью поля и потоком в ферромагнитном (стальном) сердечнике нелинейна и что в сердечнике есть потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами.

Для уменьшения тока холостого хода стремятся сердечник трансформатора изготовить таким образом, чтобы он имел возможно меньший воздушный зазор, расположенный перпендикулярно магнитному потоку, либо совсем не имел его.

В силу нелинейной зависимости между потоком и напряженностью поля в сердечнике по обмоткам трансформатора протекают несинусоидальные токи **.

* На рис. 9.52 и 9.53 для большей наглядности обмотки w_1 и w_2 показаны находящимися на разных стержнях. Практически их располагают обычно на одном и том же стержне.

** Несинусоидальность проявляется главным образом в режимах работы, близких к холостому ходу.

Анализ работы трансформатора будем проводить, заменив в действительности несинусоидальные токи и потоки их эквивалентными в смысле действующего значения величинами: I_1 — комплекс действующего значения тока первичной обмотки; I_2 — комплекс действующего значения тока вторичной обмотки; Φ_m — амплитуда основного магнитного потока, проходящего по сердечнику трансформатора, пронизывающего обе обмотки w_1 и w_2 и наводящего в них э. д. с.

Вследствие наличия рассеяния небольшой по сравнению с $\dot{\Phi}_m$ поток — *поток рассеяния первичной обмотки* $\dot{\Phi}_{1s}$ — замыкается по воздуху, образуя потокосцепление только с обмоткой w_1 . Другой, также небольшой по сравнению с $\dot{\Phi}_m$, поток — *поток рассеяния вторичной обмотки* $\dot{\Phi}_{2s}$ — замыкается по воздуху, сцепляясь только с обмоткой w_2 .

Полагают, что потокосцепление потока $\dot{\Phi}_{1s}$ с обмоткой w_1 пропорционально току I_1 :

$$\dot{\psi}_{1s} = w_1 \dot{\Phi}_{1s} = L_{1s} I_1. \quad (9.72)$$

Коэффициент пропорциональности L_{1s} между потокосцеплением $\dot{\psi}_{1s}$ и током I_1 называют *индуктивностью рассеяния первичной обмотки*; L_{1s} зависит от числа витков и конструкции обмотки.

Принимают также, что потокосцепление $\dot{\psi}_{2s}$ потока $\dot{\Phi}_{2s}$ с обмоткой w_2 пропорционально току вторичной цепи I_2 :

$$\dot{\psi}_{2s} = w_2 \dot{\Phi}_{2s} = L_{2s} I_2. \quad (9.73)$$

Коэффициент пропорциональности L_{2s} между потокосцеплением $\dot{\psi}_{2s}$, обусловленным потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{2s}$, и током I_2 называют *индуктивностью рассеяния вторичной обмотки*; L_{2s} зависит от числа витков и конструкции вторичной обмотки.

Индуктивное сопротивление первичной обмотки, обусловленное потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{1s}$, обозначают

$$X_{1s} = \omega L_{1s}. \quad (9.74)$$

Аналогично, индуктивное сопротивление вторичной обмотки, обусловленное потоком рассеяния $\dot{\Phi}_{2s}$, обозначают

$$X_{2s} = \omega L_{2s}. \quad (9.75)$$

Пусть R_1 — активное сопротивление первичной обмотки, R_2 — активное сопротивление вторичной обмотки, Z_H — сопротивление нагрузки.

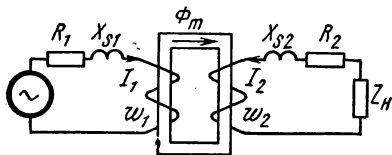


Рис. 9.53

На рис. 9.53 изображена схема того же трансформатора, что и на рис. 9.52, но на ней активные сопротивления и индуктивные сопротивления, обусловленные потоками

рассеяния, представлены отдельно выделенными: R_1 , X_{s1} , R_2 , X_{s2} . Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для обеих цепей.

Для первичной цепи

$$I_1 R_1 + j X_{s1} I_1 + j \omega \omega_1 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}} = \dot{U}_1. \quad (9.76)$$

Для вторичной цепи

$$I_2 R_2 + j X_{s2} I_2 + j \omega \omega_2 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}} + \dot{U}_n = 0. \quad (9.77)$$

Здесь $j \omega \omega_1 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$ — напряжение, численно равное э. д. с., наводимой в обмотке ω_1 основным рабочим потоком Φ_m . Деление Φ_m на $\sqrt{2}$ объясняется переходом от амплитудного значения к действующему. Аналогично, $j \omega \omega_2 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$ — напряжение, численно равное э. д. с., наводимой в обмотке ω_2 основным рабочим потоком Φ_m .

Обозначим ток I_1 при холостом ходе трансформатора через I_0 . Магнитодвижущая сила трансформатора при холостом ходе равна $I_0 \omega_1$. М. д. с. трансформатора при наличии тока I_2 равна $I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2$. Трансформаторы конструируют обычно таким образом, что падения напряжения $I_1 R_1$ и $I_1 X_{s1}$ много меньше, чем падение напряжения $\omega \omega_1 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$. Если это учесть, то для правильно сконструированных трансформаторов уравнение (9.76) запишем так:

$$j \omega \omega_1 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}} \approx \dot{U}_1. \quad (9.76')$$

Уравнение (9.76') справедливо как при холостом ходе, так и при нагрузке. Другими словами, при переходе от холостого хода к режиму работы при нагрузке поток Φ_m практически остается неизменным по величине.

Но если в этих двух режимах Φ_m одно и то же, то должны быть равны и создающие его м. д. с. в этих двух режимах, т. е.

$$I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = I_0 \omega_1. \quad (9.78')$$

Отсюда, поделив обе части равенства на ω_1 , получим

$$I_1 = I_0 + I_2', \quad (9.78)$$

где

$$I_2' = -I_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Таким образом, ток первичной цепи I_1 может быть представлен как геометрическая сумма двух токов: тока холостого хода I_0 и тока I_2' . Ток I_2' принято называть приведенным (к числу витков первичной обмотки) вторичным током. Он численно равен току I_2 , измененному в $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ раз.

Кроме того, в правильно сконструированных трансформаторах падения напряжений $I_2 R_2$ и $I_2 X_{s2}$ малы по сравнению с $j \omega \omega_2 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$;

поэтому из уравнения (9.77) следует, что приближенно

$$j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} \approx -\dot{U}_n. \quad (9.79)$$

Если почленно разделить (9.76') на (9.79) и перейти к модулям, то получим

$$\frac{U_1}{U_n} \approx \frac{w_1}{w_2}, \quad (9.80)$$

т. е. отношение напряжения на входе трансформатора к напряжению на выходе трансформатора (на нагрузке) приблизительно равно отношению числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной обмотки.

В правильно сконструированных трансформаторах при нагрузке, близкой к номинальной, ток I_0 составляет всего 1—10% тока I_1 ; поэтому уравнение (9.78) можно приближенно представить так:

$$I_1 w_1 \approx -I_2 w_2.$$

Между модулями токов I_1 и I_2 при нагрузке, близкой к номинальной, имеет место следующее приближенное соотношение:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{w_2}{w_1}, \quad (9.81)$$

т. е. ток I_1 почти пропорционален току I_2 . Эта пропорциональность немного нарушается за счет тока холостого хода I_0 .

В активных сопротивлениях вторичной цепи выделяется энергия, которая переносится магнитным потоком из первичной цепи во вторичную и восполняется источником питания схемы.

§ 9.68. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА ТРАНСФОРМАТОРА СО СТАЛЬНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

На рис. 9.54, а изображена векторная диаграмма при индуктивной нагрузке

$$Z_n = R_n + jX_n.$$

Построение диаграммы начнем с тока \dot{I}_2 , расположив его произ-

вольно. Под углом $\varphi_n = \arctg \frac{X_n}{R_n}$ к нему расположим вектор напряжения на нагрузке \dot{U}_n . Прибавим к \dot{U}_n векторы $\dot{I}_2 R_2$ и $\dot{I}_2 jX_{s2}$. Сумма падений напряжения во вторичной цепи равна нулю. Это дает возможность построить вектор $j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$.

Далее строим вектор $\dot{\Phi}_m$ (он на 90° отстает от вектора $j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$).

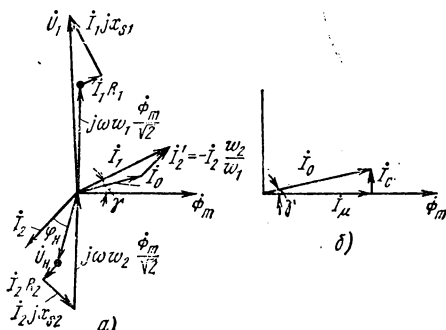


Рис. 9.54

В сердечнике трансформатора, как и в сердечнике нелинейной индуктивности, есть потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами. Вследствие этого ток холостого хода I_0 состоит из геометрической суммы намагничивающего тока I_μ и тока потерь I_c (рис. 9.54, б):

$$I_0 = I_\mu + I_c.$$

Ток I_μ совпадает по фазе с потоком Φ_m , а ток I_c опережает поток Φ_m на 90° . Токи I_μ и I_c определяют так же, как для нелинейной индуктивности.

Ток холостого хода I_0 опережает поток Φ_m на некоторый угол γ . В соответствии с уравнением (9.78) ток I_1 равен геометрической сумме тока I_0 и тока $I_2' = -I_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Геометрическая сумма падений напряжений $I_1 R_1$, $I_1 jX_{s1}$ и $j\omega_1 \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$ дает напряжение на входе первичной цепи \dot{U}_1 .

С целью удобства рис. 9.54, а на нем не выдержаны имеющие место в действительности соотношения между модулями напряжений, а также между модулями токов.

Пример 110. Повышающий трансформатор имеет сердечник из трансформаторной стали Э41 (толщина листов 0,5 мм). Кривая намагничивания $H = 0,71 \text{ sh } (5,75B)$. Сердечник выполнен из пластин, имеющих форму колец и не имеющих воздушного зазора: $\omega_1 = 250$; $\omega_2 = 1750$; $S = 2,2 \text{ см}^2$; $l = 25 \text{ см}$. Пренебрегая R_1 и X_{s1} , определить ток холостого хода I_0 при $U_1 = 15 \text{ в}$ и $f = 50 \text{ гц}$.

Решение.

$$B_m = \frac{U}{4,44 f \omega_1 S} = 1,22 \text{ тл}.$$

Произведение $\beta B_m = 5,75 \cdot 1,22 = 7,02$. По кривой рис. 9.51 при $\beta B_m = 7,02$ находим

$$\frac{\omega_1 I_\mu}{\alpha l \sqrt{2}} = 185.$$

Но

$$\frac{\alpha l \sqrt{2}}{\omega_1} = \frac{0,71 \cdot 0,25 \sqrt{2}}{250} = 10^{-3}.$$

Следовательно, $I_\mu = 185 \cdot 10^{-3} = 0,185 \text{ а}$. Масса сердечника $m = 7,8 \text{ г/см}^3 \times \times 2,2 \text{ см}^2 \cdot 25 \text{ см} = 0,428 \text{ кг}$. Из табл. 9.2 находим $p_{1,0} = 1,6 \text{ вт/кг}$; $p_{1,5} = 3,6 \text{ вт/кг}$;

$$n = 5,69 \lg \frac{3,6}{1,6} \approx 1,13.$$

Удельные потери в стали при $B_m = 1,22 \text{ тл}$

$$p_c = 1,6 \cdot 1,22^{1,13} \cdot 1 = 2,1 \text{ вт/кг}.$$

Потери в сердечнике массой 0,428 кг

$$P_c = 0,428 \cdot 2,1 = 0,9 \text{ вт}.$$

Ток, обусловленный потерями в стали, $I_c = \frac{P_c}{U_1} = \frac{0,9}{15} = 0,06 \text{ а}$. Ток холостого хода I_0 практически равен току I_μ .

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Под *переходными процессами* понимают процессы перехода от одного режима работы электрической цепи (обычно периодического) к другому (также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например величиной амплитуды, фазы, формой или частотой действующей в схеме э. д. с., значениями параметров схемы и вследствие изменения конфигурации цепи.

Периодическими режимами являются режим синусоидального тока, режим постоянного тока и режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы вызываются коммутацией в цепи. *Коммутация* — это процесс замыкания (рис. 10.1, а) или размыкания (рис. 10.1, б) рубильников или выключателей.

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму.

Переходные процессы обычно являются быстро протекающими; длительность их составляют часто десятки, сотые, а

иногда даже миллиардные доли секунды; сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее изучение переходных процессов весьма важно, так как оно позволяет выявить возможные превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, выяснить возможные увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса.

Изучение переходных процессов дает возможность установить, как деформируются по форме и амплитуде сигналы при прохождении их через усилители, фильтры и другие радиотехнические устройства.

§ 10.2. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕХОДНОМ ПРОЦЕССЕ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 10.2 при замкнутом рубильнике. Сумма падений напряжения на индуктивности L и сопротивлении R равна э. д. с. E :

$$u_L + Ri = E,$$

* Имеются в виду цепи с неизменными во времени параметрами R , L , C , M .

или

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E. \quad (10.1)$$

Как известно из курса математики, уравнение, содержащее неизвестную функцию (в нашем случае i) и ее производные (в нашем случае $L \frac{di}{dt}$), называют дифференциальным уравнением.

Таким образом, определение тока как функции времени по сути дела есть решение дифференциального уравнения.

Известно, что решение дифференциального уравнения — это отыскание функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению. Подстановка этой функции и ее производных превращает дифференциальное уравнение в тождество.

Решение линейных дифференциальных уравнений будем проводить в данной главе тремя методами: классическим, операторным и методом с использованием интеграла Дюамеля.

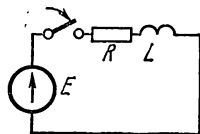


Рис. 10.2

Перед тем как изучать эти методы, необходимо рассмотреть общие свойства линейных цепей при переходных процессах, а также общие законы, которым подчиняются переходные процессы в линейных электрических цепях. § 10.3—10.25 посвящены вопросам, имеющим отношение ко всем перечисленным методам расчета переходных процессов; однако часть этих параграфов (§ 10.3, 10.8, 10.10 и 10.12) следует рассматривать так же, как *введение к классическому методу расчета переходных процессов*.

§ 10.3. ПРИНУЖДЕННЫЕ И СВОБОДНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения плюс общее решение однородного уравнения. Частное решение уравнения (10.1) равно $\frac{E}{R}$ (где E — постоянная э. д. с.).

Однородное уравнение получаем из исходного, если в нем взять правую часть равной нулю. В нашем случае

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (10.2)$$

Решением однородного уравнения является показательная функция вида Ae^{pt} .

Для всех переходных процессов условимся, что момент $t = 0$ соответствует моменту коммутации.

A и p есть некоторые постоянные числа, не зависящие от времени. Без вывода дадим их значения для рассматриваемого примера:

$$A = -\frac{E}{R} \quad \text{и} \quad p = -\frac{R}{L}.$$

Следовательно, решение уравнения (10.1) записывают так:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (10.3)$$

В нем слагаемое $\frac{E}{R}$ есть частное решение неоднородного уравнения (10.1), а слагаемое $-\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение однородного уравнения (10.2). Подстановка (10.3) в (10.1) дает тождество

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) + R \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \\ = -L \frac{E}{R} \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + E - E e^{-\frac{R}{L}t} = E. \end{aligned}$$

Следовательно, (10.3) действительно является решением уравнения (10.1).

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем называть *принужденной* составляющей тока (или соответственно напряжения), а полное решение однородного уравнения — *свободной* составляющей.

Так, применительно к рассмотренному примеру принужденная составляющая тока равна $\frac{E}{R}$, а свободная составляющая $-\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$.

Полная величина тока

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

Кроме индексов «пр» (принужденный) и «св» (свободный), токи и напряжения могут иметь и дополнительные индексы, соответствующие номерам ветвей на схеме.

Принужденная составляющая тока или напряжения физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая э. д. с. Так, если в схеме действует принуждающая синусоидальная э. д. с. частоты ω , то принужденная составляющая любого тока и любого напряжения в схеме является соответственно синусоидальным током или синусоидальным напряжением частоты ω .

Определяются принужденные составляющие в цепи синусоидального тока с помощью символического метода (см. гл. V). Если в схеме действует источник постоянной э. д. с. (как, например, в схеме рис. 10.2), то принужденный ток есть постоянный ток и находят его с помощью методов, рассмотренных в гл. I.

Постоянный ток через емкость не проходит, поэтому принужденная составляющая тока через емкость в цепях с источниками постоянной э. д. с. равна нулю. Кроме того, напомним, что падение напряжения на индуктивности от неизменного во времени тока равно нулю.

В линейных электрических цепях свободные составляющие токов и напряжений затухают во времени по показательному закону $e^{\mu t}$.

Так, в рассмотренном примере

$$i_{св} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

С увеличением времени t множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$ быстро уменьшается. Название «свободная» объясняется тем, что эта составляющая есть решение уравнения, свободного от вынуждающей силы (однородного уравнения без правой части).

Из трех токов (полного, принужденного и свободного) и трех напряжений (полного, принужденного и свободного) основное значение имеют полный ток и полное напряжение.

Полный ток является тем током, который *в действительности* протекает по той или иной ветви цепи при переходном процессе. Его можно измерить и записать на осциллограмме. Аналогично, полное напряжение — это напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе. Его также можно измерить и записать на осциллограмме.

Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений во время переходного процесса играют вспомогательную роль; они являются теми *расчетными* компонентами, сумма которых дает действительные величины.

При любых переходных и установившихся процессах соблюдают два основных положения: ток через индуктивность и напряжение на емкости не могут изменяться скачком *.

§ 10.4. ОБОСНОВАНИЕ НЕВОЗМОЖНОСТИ СКАЧКА ТОКА ЧЕРЕЗ ИНДУКТИВНОСТЬ И СКАЧКА НАПРЯЖЕНИЯ НА ЕМКОСТИ

Доказательство того, что *ток через индуктивность не может изменяться скачком*, проведем на примере схемы рис. 10.2. По второму закону Кирхгофа,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Ток i и э. д. с. E могут принимать конечные (не бесконечно большие) значения.

Допустим, что ток i может измениться скачком. Скачок тока означает, что за бесконечно малый интервал времени Δt , стремящийся к нулю, ток изменится на конечную величину Δi . При этом $\frac{\Delta i}{\Delta t} = \infty$.

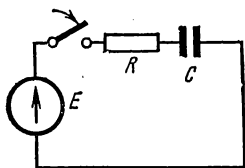
Если вместо $L \frac{di}{dt}$ в уравнение (10.1) подставить ∞ , то левая часть урав-

* Иногда эти положения формулируются так: потокоцепление индуктивной катушки и заряд конденсатора могут изменяться только плавно, без скачков. Дальнейшее обобщение законов коммутации дано в § 10.23.

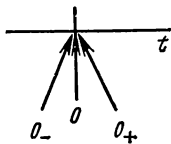
нения не будет равна правой части и не будет выполнен второй закон Кирхгофа.

Следовательно, допущение о возможности скачкообразного изменения тока через индуктивность противоречит второму закону Кирхгофа.

Ток через L не может изменяться скачком, но напряжение на индуктивности, равное $L \frac{di}{dt}$, скачком измениться может. Это не противоречит второму закону Кирхгофа.



а)



б)

Рис. 10.3

Доказательство того, что напряжение на емкости не может изменяться скачком, проводится аналогично.

Обратимся к простейшей цепи с емкостью (рис. 10.3, а). Составим для нее уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + u_C = E,$$

где E — э. д. с. источника, конечная величина;

u_C — напряжение на емкости.

Так как $i = C \frac{du_C}{dt}$, то

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (10.4)$$

Если допустить, что напряжение u_C может измениться скачком, то $\frac{\Delta u_C}{\Delta t} \approx \frac{du_C}{dt} = \infty$ и левая часть уравнения (10.4) не будет равна правой части. Отсюда следует, что допущение о возможности скачкообразного изменения напряжения на емкости противоречит второму закону Кирхгофа.

Однако ток через емкость, равный $C \frac{du_C}{dt}$, может изменяться скачком; это не противоречит второму закону Кирхгофа.

Из указанных двух основных положений следуют два закона (правила) коммутации.

§ 10.5. ПЕРВЫЙ ЗАКОН (ПРАВИЛО) КОММУТАЦИИ

Ток через индуктивность непосредственно до коммутации $i_L(0_-)$ равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации $i_L(0_+)$:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \quad (10.5)$$

Время $t = 0_-$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t = 0_+$ — после коммутации (рис. 10.3, б). Равенство (10.5) и выражает собой первый закон коммутации.

§ 10.6. ВТОРОЙ ЗАКОН (ПРАВИЛО) КОММУТАЦИИ

Обозначим напряжение на емкости непосредственно до коммутации через $u_C(0_-)$ и через $u_C(0_+)$ — напряжение на ней непосредственно после коммутации.

В соответствии с невозможностью скачка напряжения на емкости

$$u_C(0_-) = u_C(0_+). \quad (10.6)$$

Равенство (10.6) выражает собой второй закон коммутации.

Перед тем как приступить к изучению методов расчета переходных процессов, необходимо условиться о некоторых дополнительных определениях.

§ 10.7. НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Под начальными значениями величин (в литературе их называют еще начальными условиями) понимают значения токов и напряжений в схеме при $t = 0$.

Как уже говорилось, токи через индуктивности и напряжения на емкостях непосредственно после коммутации всегда равны их значениям непосредственно до коммутации. Остальные величины: напряжения на индуктивностях, напряжения на активных сопротивлениях, токи через емкости, токи через активные сопротивления — могут изменяться скачком, и потому их значения непосредственно после коммутации чаще всего оказываются не равными их значениям до коммутации.

Поэтому следует различать докоммутационные и послекоммутационные начальные значения.

Докоммутационными начальными значениями называют значения токов и напряжений непосредственно до коммутации (при $t = 0_-$); *послекоммутационными начальными значениями* — значения токов и напряжений непосредственно после коммутации (при $t = 0_+$).

§ 10.8. НЕЗАВИСИМЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ (ПОСЛЕКОММУТАЦИОННЫЕ) НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Для любой схемы после коммутации в ней можно записать уравнения по законам Кирхгофа; из этих уравнений определить значения токов во всех ветвях и напряжений на любых участках схемы в послекоммутационном режиме (при $t = 0_+$).

С этой целью значения токов в ветвях, содержащих индуктивности, и значения напряжений на конденсаторах берут равными тем значениям, которые они имели до коммутации при $t = 0_-$, а остальные токи и напряжения после коммутации при $t = 0_+$ находят из уравнений Кирхгофа, поскольку часть слагаемых в них известна.

Значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях, известные из докоммутационного режима, условимся называть *независимыми начальными значениями*.

Значения остальных токов и напряжений при $t = 0_+$ в послекоммутационной схеме, определяемые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа, будем называть *зависимыми начальными значениями*.

§ 10. 9. НУЛЕВЫЕ И НЕНУЛЕВЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Если к началу переходного процесса непосредственно перед коммутацией все токи и все напряжения на пассивных элементах схемы равны нулю, то в схеме имеют место *нулевые начальные условия*. Если же к началу переходного процесса токи и напряжения в схеме не равны нулю, то в схеме имеют место *ненулевые начальные условия*.

При нулевых начальных условиях токи в индуктивностях и напряжения на емкостях начнут изменяться с нулевых значений, при ненулевых условиях — с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

§ 10.10. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Для послекоммутационной схемы составляют уравнения по законам Кирхгофа для полных токов и напряжений так же, как это делалось и раньше: сначала обозначают токи в ветвях и произвольно выбирают для них положительные направления; затем составляют уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. Так, для схемы рис. 10.4 после выбора положительных направлений для токов

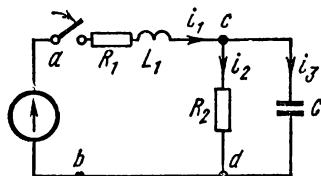


Рис. 10.4

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + i_2 R_2 &= E; \\ i_2 R_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях i_1 , i_2 и i_3 — полные токи. Каждый из них состоит из свободного и принужденного токов. Для того чтобы от этой системы уравнений перейти к уравнениям для свободных токов, «освободим» систему от вынуждающих э. д. с. (в нашем случае от э. д. с. E) и вместо i_1 запишем $i_{1св}$, вместо i_2 — $i_{2св}$ и т. д. Получим:

$$\left. \begin{aligned} i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} &= 0; \\ L_1 \frac{di_{1св}}{dt} + i_{1св} R_1 + i_{2св} R_2 &= 0; \\ i_{2св} R_2 - \frac{1}{C} \int i_{3св} dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

Заметим, что для любого контура любой электрической цепи сумма падений напряжений от свободных составляющих токов равна нулю.

§ 10.11. АЛГЕБРАИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ТОКОВ

В § 10.3 говорилось о том, что свободный ток представляет собой решение однородного дифференциального уравнения (уравнения без правой части).

Как известно из курса математики, решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде показательных функций Ae^{pt} . Таким образом, уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде

$$i_{св} = Ae^{pt}.$$

Постоянная интегрирования A для каждого свободного тока своя (или свои). Показатели же затухания p одинаковы для всех свободных токов. Физически это объясняется тем, что вся цепь охвачена единым (общим) переходным процессом.

Составим производную от свободного тока:

$$\frac{di_{св}}{dt} = \frac{d}{dt} (Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{св}.$$

Следовательно, производную от свободного тока можно заменить на $pi_{св}$, а свободное напряжение на индуктивности $L \frac{di_{св}}{dt}$ — на $Lpi_{св}$. Найдем интеграл от свободного тока:

$$\int i_{св} dt = \int Ae^{pt} dt = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{i_{св}}{p}.$$

Постоянная интегрирования взята здесь равной нулю, так как свободные составляющие не содержат не зависящих от времени слагаемых.

Следовательно, интеграл от свободного тока можно заменить на $\frac{i_{св}}{p}$, а свободное напряжение на конденсаторе $\frac{1}{C} \int i_{св} dt$ — на $\frac{i_{св}}{Cp}$.

В систему дифференциальных уравнений для свободных токов подставим $Lpi_{св}$ вместо $L \frac{di_{св}}{dt}$ и $\frac{i_{св}}{Cp}$ вместо $\frac{1}{C} \int i_{св} dt$. Получим:

$$\left. \begin{aligned} i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} &= 0; \\ (L_1 p + R_1) i_{1св} + i_{2св} R_2 &= 0; \\ i_{2св} R_2 - \frac{i_{3св}}{Cp} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Уравнения (10.8) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$, $i_{3св}$ и в отличие от исходной системы не содержат производных и интегралов.

Переход от системы линейных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений называют *алгебраизацией системы дифференциальных уравнений* для свободных токов. Можно сказать, что система (10.8) есть результат алгебраизации системы дифференциальных уравнений (10.7).

10.12. СОСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ

Число алгебраических уравнений равно числу неизвестных свободных токов. Положим, что p известно (в действительности оно пока не найдено и будет определено в дальнейшем) и решим систему (10.7) относительно $i_{1св}$, $i_{2св}$ и $i_{3св}$. Получим

$$i_{1св} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad i_{2св} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad i_{3св} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ — определитель системы. В рассмотренном примере

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1 p + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix};$$

Δ_1 получим из определителя системы Δ путем замены первого столбца правой частью уравнений (10.8):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix};$$

Δ_2 получим из Δ путем замены второго столбца правой частью системы (10.8).

Так как в правой части системы (10.8) находятся нули, то в каждом из определителей Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 один из столбцов будет состоять из нулей.

Известно, что если в определителе один из столбцов состоит из нулей, то этот определитель равен нулю. Следовательно, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$.

Из физических соображений ясно, что каждый из свободных токов не может быть равен нулю, ибо в этом случае не будут выполнены законы коммутации. Однако из предыдущего следует, что

$$i_{1св} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{2св} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{3св} = \frac{0}{\Delta}.$$

Свободные токи могут быть не равны нулю в том случае, если определитель системы Δ равен нулю:

$$\Delta = 0. \quad (10.9)$$

При этом каждый из токов представляет собой неопределенность

$$i_{1св} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{0}; \quad i_{2св} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{0}; \dots,$$

раскрыв которую, можно получить действительное значение каждого свободного тока.

Раскрытием неопределенностей здесь заниматься не будем, а воспользуемся тем существенным для дальнейшего вывода, что определитель Δ алгебраизированной системы уравнений должен равняться нулю.

Уравнение $\Delta = 0$ называют *характеристическим уравнением*. Единственным неизвестным в нем является p .

Пример 112. Используя уравнение (10.8), составить характеристическое уравнение для схемы рис. 10.4 и найти его корни.

Решение.

$$\frac{R_2}{Cp} + R_2(L_1 p + R_1) - \frac{L_1 p + R_1}{Cp} = 0,$$

или

$$\frac{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2}{pC} = 0.$$

Если дробь равна нулю, то равен нулю ее числитель. Следовательно,

$$p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2 = 0. \quad (10.10)$$

Корни квадратного уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-(R_1 R_2 C + L_1) \pm \sqrt{(R_1 R_2 C + L_1)^2 - 4(R_1 + R_2) R_2 L_1 C}}{2 R_2 L_1 C}. \quad (10.11)$$

В начале § 10.11 говорилось о том, что решение для свободного тока берется в виде Ae^{pt} . Если характеристическое уравнение будет иметь не один корень, а несколько, например n , то для каждого свободного тока нужно взять

$$\sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}.$$

Пример 113. Найти корни характеристического уравнения схемы рис. 10.4 при трех значениях C : 1) $C = 1$ мкф; 2) $C = 10$ мкф; 3) $C = 100$ мкф, $R_1 = R_2 = 100$ ом; $L_1 = 1$ гн.

Решение. При $C = 1$ мкф

$$R_1 R_2 C + L_1 = 100 \cdot 100 \cdot 10^{-6} + 1 = 1,01;$$

$$4(R_1 + R_2) R_2 L_1 C = 4 \cdot 200 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,08;$$

$$2 R_2 L_1 C = 2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-4};$$

$$p_{1,2} = \frac{-1,01 \pm \sqrt{1,01^2 - 0,08}}{2 \cdot 10^{-4}}; p_1 = -250 \text{ сек}^{-1};$$

$$p_2 = -9850 \text{ сек}^{-1}.$$

При $C = 10$ мкф

$$p_1 = -230 \text{ сек}^{-1}; \quad p_2 = -870 \text{ сек}^{-1}.$$

При $C = 100$ мкф

$$p_1 = -100 + 100j; \quad p_2 = -100 - 100j.$$

§ 10.13. СОСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦЕПИ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

Характеристическое уравнение для определения p часто составляют более простым путем по сравнению с путем, обсуждавшимся в предыдущем параграфе. С этой целью составляют выражение входного сопро-

тивления для любой ветви цепи на переменном токе [обозначим его $Z(j\omega)$], заменяют в нем $j\omega$ на p [получают $Z(p)$] и приравнивают $Z(p)$ нулю.

В § 10.41 показано, что число p можно представить в виде $j\Omega$, где Ω — комплексная угловая частота. $Z(p)$ есть сопротивление цепи на комплексной угловой частоте. Сопротивление цепи для синусоидального тока частотой ω , т. е. $Z(j\omega)$, есть частный случай $Z(p)$, когда $\Omega = \omega$.

Входное сопротивление на комплексной частоте по отношению к некоторой k -й ветви равно $Z_k(p) = \frac{\Delta(p)}{\Delta_k(p)}$, где $\Delta(p)$ — определитель системы уравнений, составленных по методу контурных токов; $\Delta_k(p)$ — алгебраическое дополнение.

Корни уравнения $Z_k(p) = 0$ совпадают с корнями уравнения $\Delta(p) = 0$.

Уравнение $Z(p) = 0$ всегда будет совпадать с характеристическим. Убедимся в этом на примерах.

Пример 114. Для схемы рис. 10.4 входное сопротивление относительно зажимов ab при переменном токе

$$Z_{ab}(j\omega) = j\omega L_1 + R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Заменим в нем $j\omega$ на p и приравняем его нулю:

$$Z_{ab}(p) = pL_1 + R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{p^2 L_1 C R_2 + p(L_1 + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}{1 + R_2 C p} = 0,$$

или

$$p^2 L_1 C R_2 + p(L_1 + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2 = 0. \quad (10.10')$$

Уравнение (10.10') полностью совпадает с уравнением (10.10), составленным иным путем.

Уравнение (10.10') получено путем использования выражения для входного сопротивления первой ветви схемы рис. 10.4 относительно зажимов ab . Точно такое же уравнение можно получить, если записать выражение для входного сопротивления любой другой ветви.

§ 10.14. ОСНОВНЫЕ И НЕОСНОВНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Для сложных схем со многими накопителями энергии число независимых начальных значений (начальных условий) может оказаться больше, чем порядок характеристического уравнения, и, следовательно, больше числа постоянных интегрирования.

В этом случае при определении постоянных интегрирования используют не все независимые начальные условия, а часть из них.

Основными независимыми начальными условиями называют токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, которые могут быть заданы независимо от других. Остальные независимые начальные условия называют *неосновными*.

В качестве иллюстрации обратимся к схеме рис. 10.5. Она содержит три индуктивности и одну емкость. В схеме всего четыре независимых начальных значения (начальных условия):

- 1) $i_1(0_+) = 0$; 2) $i_2(0_+) = 0$;
- 3) $i_3(0_+) = 0$; 4) $u_c(0_+) = 0$.

Из них три являются основными и одно — неосновным. При выборе основных допустим известный произвол. Так, если за основные взять первое, второе и четвертое условия, то неосновным будет третье.

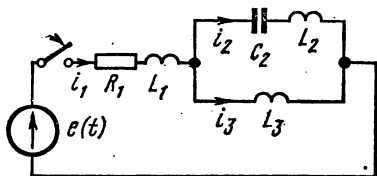


Рис. 10.5

Пример 115.. Убедиться в том, что для схемы рис. 10.5 характеристическое уравнение будет иметь не четвертый, а третий порядок.

Решение. Составляем выражение для входного сопротивления:

$$Z(p) = R_1 + pL_1 + \frac{\left(pL_2 + \frac{1}{C_2p}\right)pL_3}{pL_2 + pL_3 + \frac{1}{pC_2}} = 0.$$

Отсюда

$$(R_1 + pL_1)[1 + p^2 C_2 (L_2 + L_3)] + pL_3 (1 + C_2 L_2 p^2) = 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет третий порядок.

§ 10.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Степень характеристического уравнения цепи необходимо уметь оценивать, взглянув на схему, в которой исследуется переходный процесс. Быстрая ориентация в этом вопросе дает возможность определить трудоемкость предстоящих выкладок и способствует выявлению ошибки, если она возникнет при составлении характеристического уравнения.

Степень характеристического уравнения равна числу основных независимых начальных условий в послекоммутационной схеме после максимального ее упрощения и не зависит от вида э. д. с. в схеме.

Упомянутое упрощение состоит в том, что последовательно и параллельно соединенные индуктивности должны быть заменены одной эквивалентной; емкости, включенные последовательно и параллельно, тоже должны быть заменены эквивалентной *.

* Имеется в виду, что других сопротивлений, например активных, в ветвях с емкостями нет и начальные напряжения на последовательно соединенных емкостях относятся обратно пропорционально этим емкостям, а также, что начальные токи через последовательно соединенные индуктивности одинаковы.

Так, применительно к схеме рис. 10.6 последовательно включенные L_1 и L_1'' следует заменить на $L_1 = L_1' + L_1'' \pm 2M$, если между ними есть магнитная связь (если нет магнитной связи, то $M = 0$), а емкости C_3' , C_3'' и C_4 — на емкость

$$C_5 = C_4 + \frac{C_3' C_3''}{C_3' + C_3''}.$$

Начальное значение напряжения на емкости C_5 равно начальному значению напряжения на C_4 .

В результате упрощений схемы рис. 10.6 получаем схему рис. 10.7, в которой две индуктивности и одна емкость. Все три независимые начальные значения — основные. Следовательно, порядок характеристического уравнения будет третий.

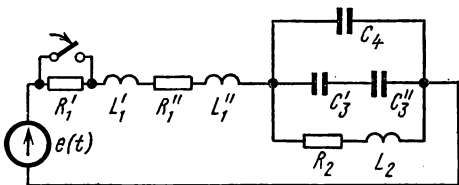


Рис. 10.6

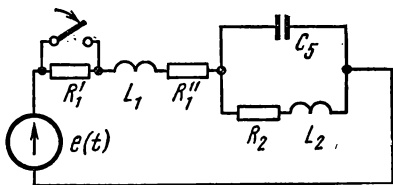


Рис. 10.7

Две параллельно соединенные индуктивности L_1 и L_2 (без активных сопротивлений), между которыми есть взаимная индуктивность M , с начальными значениями токов $i_1(0)$ и $i_2(0)$ могут быть заменены одной эквивалентной

$$L_3 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}.$$

Минус в знаменателе соответствует согласному, плюс — встречному включению. Начальное значение тока через L_3 равно $i_1(0) + i_2(0)$.

Обратим внимание на то, что порядок характеристического уравнения не зависит от того, имеется ли магнитная связь между индуктивностями схемы или она отсутствует.

§ 10. 16. СВОЙСТВА КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Число корней характеристического уравнения равно степени этого уравнения. Так, если характеристическое уравнение представляет собой уравнение первой степени, то оно имеет один корень, если второй степени, — два корня и т. д. Уравнение первой степени имеет всегда отрицательный действительный (не мнимый и не комплексный) корень.

Уравнение второй степени может иметь:

- а) два действительных неравных отрицательных корня;
- б) два действительных равных отрицательных корня;
- в) два комплексно сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

Уравнение третьей степени может иметь:

- а) три действительных неравных отрицательных корня;
- б) три действительных отрицательных корня, из которых два равны друг другу;
- в) три действительных равных отрицательных корня;
- г) один действительный отрицательный корень и два сопряженных с отрицательной действительной частью.

§ 10.17. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЗНАКИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧАСТЕЙ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Свободный процесс происходит в цепи, освобожденной от источника э. д. с. Он описывается слагаемыми вида Ae^{pt} . В цепи, освобожденной от источников э. д. с., свободные токи не могут протекать сколь угодно длительно, так как в цепи отсутствуют источники энергии, которые были бы способны в течение сколь угодно длительного времени покрывать тепловые потери от свободных токов, т. е. свободные токи должны затухать.

Но если свободные токи (выраженные слагаемыми e^{pt}) должны затухать (спадать) во времени, то действительная часть p должна быть отрицательной.

В табл. 10.1 приведены значения экспоненциальной функции $e^{-at} = f(at)$.

Т а б л и ц а 10.1

at	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
e^{-at}	1	0,905	0,819	0,741	0,67	0,606	0,549	0,5
at	0,8	0,9	1	1,5	2	3	4	5
e^{-at}	0,45	0,406	0,368	0,223	0,135	0,05	0,018	0,0067

Обсудим характер изменения свободных составляющих для простейших переходных процессов в цепях с характеристическим уравнением первого и второго порядков.

Если число корней характеристического уравнения больше двух, то свободный процесс может быть представлен как процесс, составленный из нескольких простейших процессов.

§ 10.18. ХАРАКТЕР СВОБОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ОДНОМ КОРНЕ

Когда характеристическое уравнение имеет один корень, свободный ток выражается так:

$$i_{св} = Ae^{-at}, \quad (10.12a)$$

где $p = -a$ зависит только от параметров цепи, A — от параметров цепи, э. д. с. и момента включения. Характер изменения $i_{св}$ при $A > 0$ показан на рис. 10.8.

За интервал времени $t = \tau = \frac{1}{a}$ функция Ae^{-at} уменьшится в $e = 2,71$ раза. Действительно, при $t = \tau = \frac{1}{a}$

$$at = a\tau = a \frac{1}{a} = 1; e^{-at} = e^{-a\tau} = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2,71}.$$

Величину $\tau = \frac{1}{a} = \frac{1}{|p|}$ принято называть *постоянной времени* цепи*; τ зависит от вида схемы и параметров ее. Так, для цепи рис. 10.2 $\tau = \frac{L}{R}$, для цепи рис. 10.3, a $\tau = RC$ (для цепи рис. 10.18 $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$) и т. д.

§ 10.19. ХАРАКТЕР СВОБОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ НЕРАВНЫХ КОРНЯХ

Пусть $p_1 = -a$ и $p_2 = -b$. Для определенности положим $b > a$; тогда

$$i_{св} = A_1 e^{-at} + A_2 e^{-bt}. \quad (10.126)$$

Характер изменения свободного тока при различных по величине и знаку постоянных интегрирования A_1 и A_2 каче-

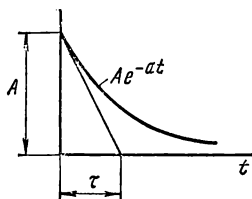


Рис. 10.8

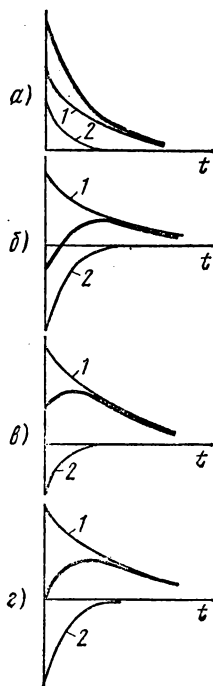


Рис. 10.9

ственно иллюстрируется кривыми рис. 10.9, а, б, в, г; кривая 1 представляет собой функцию $A_1 e^{-at}$; кривая 2 — функцию $A_2 e^{-bt}$; результирующая («жирная») кривая получена путем суммирования ординат кривых 1 и 2.

* Название «постоянная времени» отражает постоянство величины подкасательной к экспоненте: подкасательная к экспоненте $e^{-\frac{t}{\tau}}$ численно равна τ .

Для рис. 10.9, а $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$;
 для рис. 10.9, б $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| > A_1$;
 для рис. 10.9, в $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| < A_1$;
 для рис. 10.9, г $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| = A_1$.

§ 10.20. ХАРАКТЕР СВОБОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ДВУХ РАВНЫХ КОРНЯХ

Известно, что если среди корней характеристического уравнения есть два равных корня $p_1 = p_2 = -a$, то соответствующие слагаемые решения должны быть взяты в таком виде:

$$A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} = (A_1 + A_2 t) e^{-at}. \quad (10.13)$$

На рис. 10.10 построены пять кривых. Они показывают возможный характер изменения функции $(A_1 + A_2 t) e^{-at}$ при различных знаках постоянных интегрирования A_1 и A_2 , а также когда одна из постоянных равна нулю.

Кривая 1 — при $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$.

Кривая 2 — при $A_1 < 0$ и $A_2 > 0$.

Кривая 3 — при $A_1 > 0$ и $A_2 < 0$.

Кривая 4 — при $A_1 = 0$ и $A_2 > 0$.

Кривая 5 — при $A_1 > 0$ и $A_2 = 0$.

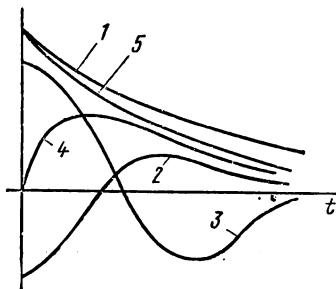


Рис. 10.10

§ 10.21. ХАРАКТЕР СВОБОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ДВУХ КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЯХ

Комплексные корни всегда встречаются попарно сопряженными. Так, если один корень $p_1 = -\delta + j\omega_0$, то другой $p_2 = -\delta - j\omega_0$. Соответствующее им слагаемое решения, должно быть взято в таком виде

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu). \quad (10.14)$$

Формула (10.14) описывает затухающее синусоидальное колебание (рис. 10.11) при угловой частоте ω_0 и начальной фазе ν . Огибающая колебания определяется кривой $A e^{-\delta t}$. Чем больше δ , тем быстрее затухает колебательный процесс; A и ν опре-

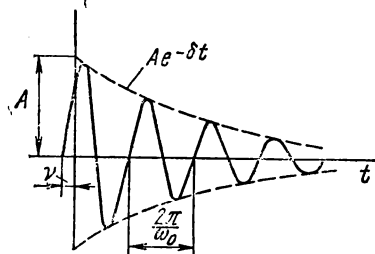


Рис. 10.11

деляются значениями параметров схемы, начальными условиями и величиной Э. Д. С. источника; ω_0 и δ зависят только от параметров цепи после коммутации; ω_0 называют угловой частотой свободных колебаний; δ — коэффициентом затухания.

§ 10.22. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Как известно из предыдущего, полное значение любой величины (тока, напряжения, заряда) равно сумме принужденной и свободной составляющих. Если среди корней характеристического уравнения есть комплексно сопряженные корни $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ и значение угловой частоты свободных колебаний ω_0 почти равно угловой частоте ω источника синусоидальной э. д. с. (источника питания), а коэффициент затухания δ мал (цепь с малыми потерями), то сложение принужденной и свободной составляющих дает колебание, для которого характерно биение амплитуды, показанное на рис. 10.12.

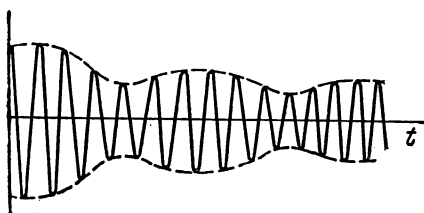


Рис. 10.12

Колебание рис. 10.12 отличается от колебаний, рассмотренных в § 8.14, тем, что здесь у одной из составляющих колебания амплитуда медленно уменьшается.

Если угловая частота свободных колебаний ω_0 в точности равна угловой частоте источника синусоидальной э. д. с. ω , то результирующее колебание имеет форму, изображенную на рис. 10.13.

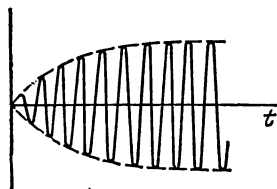


Рис. 10.13

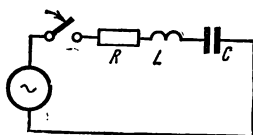


Рис. 10.14

Простейшим примером колебаний такого типа является колебание, возникающее на конденсаторе в схеме рис. 10.14 в результате сложения принужденного колебания $U_{Cm} \cos \omega t$ и свободного колебания $-U_{Cm} e^{-\delta t} \cos \omega t$:

$$U_C = U_{Cm} (1 - e^{-\delta t}) \cos \omega t.$$

Амплитуда результирующего колебания нарастает по экспоненциальному закону.

При наличии емкости (или емкостей) в схеме могут возникать большие начальные броски токов, в несколько раз превышающие амплитуды тока установившегося режима. Так, в схеме рис. 10.15 при нулевых начальных условиях в первый момент после замыкания ключа (рубильника) напряжение на емкостях равно нулю и ток в неразветвленной части цепи равен $\frac{U_m \sin \psi}{R_1}$. Если $\psi = 90^\circ$, то в первый момент после

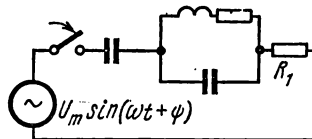


Рис. 10.15

замыкания ключа ток равен $\frac{U_m}{R_1}$. При размыкании ключа в индуктивных цепях возникают опасные увеличения напряжения на отдельных участках цепи (см. § 10.24).

§ 10.23. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГОЙ (ИСКРОЙ)

Если переходный процесс вызывается размыканием выключателя в электрической цепи, содержащей индуктивности, то между расходящимися контактами его при определенных условиях может возникнуть электрическая дуга (искра). При возникновении электрической дуги (искры) расчет переходного процесса усложняется и, строго говоря, не может проводиться методами, изучаемыми в данной главе. Объясняется это тем, что сопротивление электрической дуги (искры) является нелинейной функцией протекающего через нее тока. В этом случае, если известна вольтамперная характеристика дуги, для расчета переходных процессов могут применяться методы, излагаемые в приложении 3.

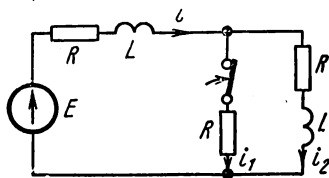


Рис. 10.16

Пример 116. Выяснить, можно ли ожидать возникновения электрической дуги (искры) при размыкании ключа в схеме рис. 10.16.

Решение. До размыкания ключа в цепи был установившийся режим:

$$i(0_-) = \frac{E}{R + \frac{R}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{R}; \quad i_2(0_-) = \frac{i(0_-)}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{E}{R}.$$

Допустим, что при размыкании ключа дуга (искра) не возникает. При этом ток i_1 мгновенно падает до нуля, а $i(0_+)$ должен будет равняться $i_2(0_+)$. Но этого быть не может, ибо каждый из токов (i и i_2) по первому закону коммутации не может измениться скачком.

Следовательно, между достаточно медленно расходящимися ножами ключа в схеме рис. 10.16 при определенных условиях можно ожидать возникновения электрической дуги (искры). Расчет переходного процесса в схеме рис. 10.16 см. в § 10.28.

§ 10.24. ОПАСНЫЕ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ РАЗМЫКАНИЕМ ВЕТВЕЙ В ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ИНДУКТИВНОСТЬ

При размыкании рубильников (ключей) в электрических цепях, содержащих значительные индуктивности, на отдельных участках электрических цепей могут возникать напряжения, во много раз превышающие установившиеся. Напряжения, превышающие установившиеся, называют *перенапряжениями*. Они могут оказаться настолько значительными, что вызовут пробой изоляции и выведут из строя измерительную аппаратуру.

Пример 117. К зажимам индуктивной катушки с $R = 100 \text{ ом}$, $L = 10 \text{ гн}$ подключен вольтметр (рис. 10.17). Сопротивление вольтметра $R_V = 3000 \text{ ом}$; $E = 100 \text{ в}$. Приблизительно найти величину напряжения на зажимах вольтметра при $t = 0$, если допустить, что размыкание ключа произойдет мгновенно и дуги не возникнет.

Решение. До размыкания ключа через L протекает ток $i = \frac{E}{R} = 1 \text{ а}$. В индуктивности была запасена магнитная энергия $\frac{Li^2}{2}$. Если допустить, что размыкание ключа произошло мгновенно и дуги не возникло, и учесть, что ток через индуктивность

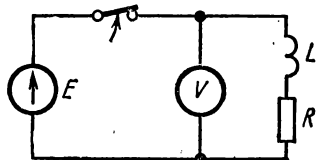


Рис. 10.17

должен оставаться равным 1 а , то по замкнутому контуру, составленному вольтметром и катушкой, за счет запаса энергии магнитного поля индуктивности в первое мгновение будет протекать ток в 1 а . При этом на вольтметре будет пик напряжения порядка 3000 в . Протекание большого импульса тока через вольтметр может вызвать перегорание катушки прибора и выход его из строя.

При размыкании ключа с конечной скоростью между расходящимися контактами ключа схемы рис. 10.17 возникнет электрическая дуга. Это приведет к тому, что увеличение напряжения на вольт-

метре будет меньше, чем в рассмотренном ранее идеализированном случае, когда ключ размыкался мгновенно без дуги (искры) *.

Чтобы не «сжечь» вольтметр в цепи рис. 10.17, сначала надо отключить вольтметр, а затем разомкнуть ключ.

Перенапряжения проявляются тем сильнее, чем больше индуктивности в цепях. Особенно опасны они в цепях постоянного тока, содержащих индуктивности порядка единиц и десятков генри. В таких цепях при отключениях соблюдают специальные меры предосторожности (отключение ключа после введения дополнительных активных сопротивлений в цепь).

§ 10.25. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Расчет переходных процессов в любой линейной электрической цепи состоит из следующих основных операций:

- 1) выбора положительных направлений токов в ветвях цепи;
- 2) определения значений токов и напряжений непосредственно до коммутации;
- 3) составления характеристического уравнения и определения его корней **;
- 4) получения выражений для искомых токов и напряжений как функции времени.

Широко распространенными методами расчета переходных процессов являются:

* При более детальном рассмотрении процесса необходимо еще учесть влияние междувитковых емкостей и емкостей на землю (см. § 12.1). Если не учитывать дугу, распределенных емкостей и величину индуктивности L , приведенный расчет является весьма грубым и неточным и носит иллюстративный характер.

** Как определять корни характеристических уравнений высоких степеней (4—6-й степени), сказано, например, в кн.: П о п о в Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954, § 39.

- 1) метод, называемый в литературе классическим;
- 2) операторный метод;
- 3) метод расчета путем применения интеграла Дюамеля.

Для всех этих методов перечисленные четыре операции (или этапы расчета) являются обязательными.

Для всех методов первые три операции (о них говорилось уже) совершаются одинаково, и их нужно рассматривать как общую для всех методов часть расчета.

Различие между методами имеет место на четвертом, наиболее трудоемком этапе расчета.

Чаще используют классический и операторный методы, реже — метод расчета с применением интеграла Дюамеля. В дальнейшем будут даны сравнительная оценка и рекомендуемая область применения каждого из них (см. § 10.56).

В радиотехнике, счетно-решающей технике, импульсной технике, автоматике, телемеханике и в технике, связанной с теорией информации, кроме этих трех методов, применяют метод анализа переходных процессов, основывающийся на интеграле Фурье *. (Об интеграле Фурье и спектральном методе, основывающемся на интеграле Фурье, см. в приложении Ж.)

В задачах автоматического регулирования применяют также метод трапецеидальных частотных характеристик, в котором используют вещественные частотные характеристики (об этом методе см., например, гл. III [14]). Для исследования характера переходного процесса, описываемого уравнением высокого порядка, применяют также моделирующие установки.

§ 10.26. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Классическим методом расчета переходных процессов называют метод расчета, в котором решение дифференциального уравнения берут в виде суммы принужденного и свободного решений и в котором определение постоянных интегрирования, входящих в выражение для свободного тока (или напряжения), производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным значениям корней характеристического уравнения и известным значениям свободной составляющей тока и ее производных, взятых при $t = 0_+$.

§ 10.27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Как известно из предыдущего, уравнения для любого свободного тока или любого свободного напряжения можно представить в виде суммы экспоненциальных слагаемых. Число членов суммы равно числу корней характеристического уравнения.

* Для студентов указанных специальностей изучение вопросов, связанных с интегралом Фурье, обязательно.

Так, при двух действительных неравных корнях

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A e^{p_2 t};$$

при трех действительных неравных корнях

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

Для любой схемы с помощью уравнений Кирхгофа и законов коммутации можно найти: 1) числовое значение искомого свободного тока при $t = 0$, обозначим его $i_{\text{св}}(0_+)$, и 2) числовое значение первой или высших производных от свободного тока, взятых при $t = 0$. Числовое значение первой производной от свободного тока при $t = 0_+$ обозначим через $i'_{\text{св}}(0_+)$; второй — через $i''_{\text{св}}(0_+)$ и т. д.

Рассмотрим методику определения постоянных интегрирования A_1, A_2, \dots , полагая известными $i_{\text{св}}(0_+)$, $i'_{\text{св}}(0_+)$, $i''_{\text{св}}(0_+)$ и значения корней p_1, p_2, \dots

Если характеристическое уравнение цепи представляет собой уравнение первого порядка, то $i_{\text{св}} = A e^{p t}$. Постоянная интегрирования A определяется по значению свободного тока $i_{\text{св}}(0_+)$:

$$A = i_{\text{св}}(0_+). \quad (10.15)$$

Если характеристическое уравнение имеет второй порядок и корни его действительны и не равны, то

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (10.16)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$i'_{\text{св}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (10.16')$$

Запишем уравнения (10.16) и (10.16') при $t = 0$ (учтем, что при $t = 0$ $e^{p_1 t} = e^{p_2 t} = 1$); получим

$$i_{\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2; \quad (10.17)$$

$$i'_{\text{св}}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (10.17')$$

В этой системе уравнений известными являются $i_{\text{св}}(0_+)$, $i'_{\text{св}}(0_+)$, p_1 и p_2 ; неизвестными — A_1 и A_2 .

Совместное решение (10.17) и (10.17') дает

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{i'_{\text{св}}(0_+) - p_2 i_{\text{св}}(0_+)}{p_1 - p_2}; \\ A_2 &= i_{\text{св}}(0_+) - A_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.17'')$$

Если корни характеристического уравнения являются комплексно сопряженными, то свободный ток берут в таком виде:

$$i_{\text{св}} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu). \quad (10.18)$$

Угловая частота ω_0 и показатель затухания δ известны из решения характеристического уравнения.

Определение двух неизвестных A и ν производят и в этом случае по значениям $i_{\text{св}}(0_+)$ и $i'_{\text{св}}(0_+)$.

Продифференцировав по времени уравнение (10.18), получим

$$i'_{св} = -A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) + A\omega_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \nu). \quad (10.18')$$

Запишем уравнение (10.18') при $t = 0_+$:

$$i'_{св}(0_+) = -A\delta \sin \nu + A\omega_0 \cos \nu.$$

Таким образом, для определения неизвестных A и ν имеем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} i_{св}(0_+) &= A \sin \nu; \\ i'_{св}(0_+) &= -A\delta \sin \nu + A\omega_0 \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Для цепи, имеющей характеристическое уравнение третьего порядка, свободный ток

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}. \quad (10.20)$$

Найдем первую, а затем вторую производную от левой и правой частей уравнения (10.20):

$$i'_{св} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + p_3 A_3 e^{p_3 t}; \quad (10.21)$$

$$i''_{св} = p_1^2 A_1 e^{p_1 t} + p_2^2 A_2 e^{p_2 t} + p_3^2 A_3 e^{p_3 t}. \quad (10.22)$$

Запишем (10.20), (10.21) и (10.22) при $t = 0_+$:

$$\left. \begin{aligned} i_{св}(0_+) &= A_1 + A_2 + A_3; \\ i'_{св}(0_+) &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3; \\ i''_{св}(0_+) &= p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + p_3^2 A_3. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Система уравнений (10.23) представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: A_1 , A_2 и A_3 . Все остальные входящие в нее величины [p_1 , p_2 , p_3 , $i_{св}(0_+)$, $i'_{св}(0_+)$, $i''_{св}(0_+)$] известны.

Обратим внимание на два положения:

1. Если схема с источником тока имеет несколько последовательных участков, содержащих параллельно соединенные ветви с R , L , C , то для каждой группы параллельных ветвей будет свое характеристическое уравнение со своими корнями (свободные токи не могут замыкаться через источник тока, поскольку его сопротивление равно бесконечности).

2. В сложных разветвленных цепях при наличии в них многих накопителей энергии и при некоторых частных соотношениях между параметрами начальные значения одного или нескольких свободных токов или напряжений могут оказаться равными нулю. При этом число свободных составляющих тока или напряжения окажется меньше числа корней характеристического уравнения и не равно числу свободных составляющих других токов. Такое явление может иметь место, например, если одна из угловых частот ω_0 свободных колебаний окажется равной собственной угловой частоте последовательного или параллельного резонансного контура, имеющегося в схеме. Тогда на этой частоте для свободной составляющей последовательный резонансный контур будет практически закорачивать участок цепи, к зажимам которого он присоединен, а параллельный — как бы разрывать цепь для нее.

Вначале для облегчения нахождения величины и ее производной при $t = 0_+$ рекомендуется решать задачу относительно тока через L или напряжения на C и только затем, используя законы Кирхгофа, определять любую другую величину через найденную.

Рассмотрим несколько числовых примеров на расчет переходных процессов классическим методом в цепях первого и второго порядков с источниками постоянной и синусоидальной э. д. с. при ненулевых начальных условиях.

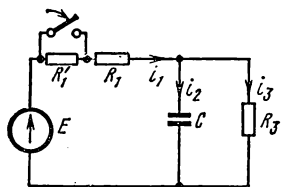


Рис. 10.18

Пример 118. В схеме рис. 10.18 до замыкания ключа был установившийся режим: $R_1 = R_1' = R_3 = 50 \text{ ом}$; $C = 100 \text{ мкф}$; $E = 150 \text{ в}$.

Требуется: 1) найти полные, принужденные и свободные составляющие токов и напряжения на конденсаторе, а также начальное значение производной от свободного напряжения на конденсаторе; 2) определить токи i_1 , i_2 , i_3 и напряжение u_C в функции времени.

Решение первой части задачи
До коммутации

$$i_2(0_-) = 0 \text{ и } i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_1' + R_3} = \frac{150}{150} = 1 \text{ а.}$$

Напряжение на конденсаторе равнялось напряжению на сопротивлении R_3 :

$$u_C(0_-) = i_3(0_-) R_3 = 1 \cdot 50 = 50 \text{ в.}$$

Найдем принужденные значения после коммутации:

$$i_{1\text{пр}} = i_{3\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ а;}$$

$$u_{C\text{пр}}(0_+) = i_{3\text{пр}}(0_+) R_3 = 1,5 \cdot 50 = 75 \text{ в.}$$

По второму закону Кирхгофа составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями при $t = 0_+$:

$$i_1(0_+) R_1 + u_C(0_+) = E, \text{ но } u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Поэтому

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_-)}{R_1} = \frac{150 - 50}{50} = 2 \text{ а.}$$

Из уравнения

$$u_C(0_+) = i_3(0_+) R_3$$

найдем

$$i_3(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_3} = 1 \text{ а.}$$

По первому закону Кирхгофа,

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

Следовательно,

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+) = 2 - 1 = 1 \text{ а.}$$

Свободные составляющие найдем как разности между полными и принужденными величинами:

$$u_{C_{св}}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C_{пр}}(0_+) = 50 - 75 = -25 \text{ в};$$

$$i_{1св}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1пр}(0_+) = 2 - 1,5 = 0,5 \text{ а};$$

$$i_{2св}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2пр}(0_+) = 1 - 0 = 1 \text{ а};$$

$$i_{3св}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3пр}(0_+) = 1 - 1,5 = -0,5 \text{ а}.$$

Так как свободный ток через емкость

$$i_{св} = C \frac{du_{C_{св}}}{dt},$$

то

$$\frac{du_{C_{св}}}{dt} = \frac{i_{св}}{C}.$$

В рассматриваемом примере

$$\left(\frac{du_{C_{св}}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{i_{2св}(0_+)}{C} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = 10^4 \text{ в/сек}.$$

Решение второй части задачи

Характеристическое уравнение для послекоммутационной схемы $pR_1R_3C + R_1 + R_3 = 0$ имеет один корень

$$p = -\frac{R_1 + R_3}{R_1R_3C} = -400 \text{ сек}^{-1}.$$

Каждый ток равен сумме принужденной составляющей и свободной составляющей Ae^{pt} , где A равно значению свободной составляющей при $t = 0_+$ (графики изображены на рис. 10.19):

$$i_1 = 1,5 + 0,5e^{-400t} \text{ а}; \quad i_2 = e^{-400t} \text{ а}; \\ i_3 = 1,5 - 0,5e^{-400t} \text{ а}; \quad u_C = 75 - 25e^{-400t} \text{ в}.$$

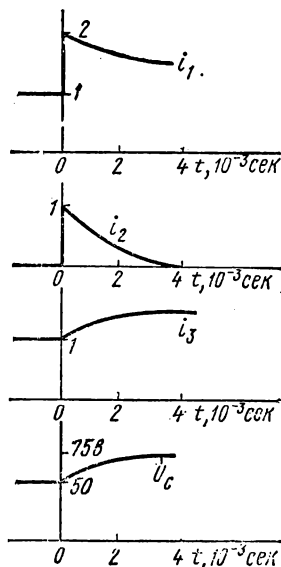


Рис. 10.19

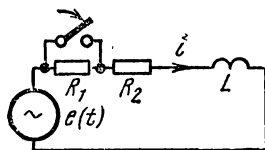


Рис. 10.20

Пример 119. В схеме рис. 10.20 до замыкания ключа был установлен режим: $R_1 = R_2 = 2 \text{ ом}$; $\omega L = 3 \text{ ом}$; $e(t) = 127 \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ в}$; $\omega = 314 \text{ сек}^{-1}$.

Требуется: 1) найти $i_{св}(0_+)$; 2) определить закон изменения тока в цепи после коммутации.

Решение первой части задачи

Находим комплексную амплитуду тока в цепи до коммутации:

$$\dot{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{4 + 3j} = 25,4e^{-j86^\circ 50'} \text{ а.}$$

Мгновенное значение тока до коммутации

$$i = 25,4 \sin(\omega t - 86^\circ 50') \text{ а.}$$

В момент коммутации (при $\omega t = 0$)

$$i(0_-) = 25,4 \sin(-86^\circ 50') = -25,35 \text{ а.}$$

Принужденный ток после коммутации

$$\dot{I}_m = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2 + 3j} = 35,2e^{-j106^\circ 20'} \text{ а.}$$

Мгновенное значение принужденного тока

$$i_{\text{пр}} = 35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') \text{ а;}$$

$$i_{\text{пр}}(0_+) = 35,2 \sin(-106^\circ 20') = -33,8 \text{ а.}$$

По первому закону коммутации,

$$i(0_-) = i(0_+) = -25,35 \text{ а.}$$

Но

$$i(0_+) = i_{\text{пр}}(0_+) + i_{\text{св}}(0_+).$$

Следовательно,

$$i_{\text{св}}(0_+) = i(0_+) - i_{\text{пр}}(0_+) = -25,35 + 33,8 = 8,45 \text{ а.}$$

Решение второй части задачи

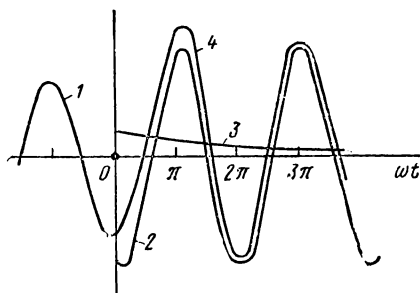


Рис. 10.21

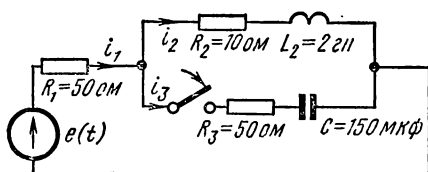


Рис. 10.22

Характеристическое уравнение $pL + R_2 = 0$ имеет корень

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\frac{\omega L}{\omega}} = -\frac{2 \cdot 314}{3} \approx -210 \text{ сек}^{-1}.$$

По данным первой части задачи, ток в цепи до коммутации (кривая 1 рис. 10.21 до $\omega t = 0$)

$$i = 25,4 \sin(\omega t - 86^\circ 50') \text{ а.}$$

Принужденный ток после коммутации (кривая 2 рис. 10.21)

$$i_{\text{пр}} = 35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') \text{ а}; \quad i_{\text{св}}(0_+) = 8,45 \text{ а}.$$

Следовательно,

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = 35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') + 8,45 e^{-210t} \text{ а}.$$

Кривая 3 рис. 10.21 — свободный ток, кривая 4 — полный ток после коммутации (ординаты кривой 4 при $\omega t \geq 0$ равны сумме ординат кривых 2 и 3).

Пример 120. В схеме рис. 10.22 замыкается рубильник в третьей ветви. До этого был установившийся режим: $e(t) = E = 120 \text{ в}$. Требуется:

1) найти

$$i_{2\text{св}}(0_+); \left(\frac{di_{2\text{св}}}{dt}\right)_{t=0_+}; u_{\text{св}}(0_+) \text{ и } \left(\frac{du_{\text{св}}}{dt}\right)_{t=0_+};$$

2) определить

$$i_2(t) \text{ и } u_c(t).$$

Решение первой части задачи

До замыкания рубильника

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{50 + 10} = 2 \text{ а}.$$

Найдем принужденные токи и напряжение на конденсаторе после коммутации. Ток

$$i_{1\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = 2 \text{ а}.$$

Постоянный ток через конденсатор не течет, поэтому $i_{3\text{пр}} = 0$.

От постоянного тока на индуктивности нет падения напряжения, следовательно, $u_{L2\text{пр}} = 0$.

Принужденное напряжение на конденсаторе равно падению напряжения на сопротивлении R_2 от тока $i_{2\text{пр}}$:

$$u_{\text{снпр}} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ в}.$$

По первому закону коммутации,

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = 2 \text{ а}.$$

Но

$$i_2(0_+) = i_{2\text{пр}}(0_+) + i_{2\text{св}}(0_+),$$

откуда

$$i_{2\text{св}}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2\text{пр}}(0_+) = 2 - 2 = 0;$$

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+),$$

или

$$i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+).$$

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного первой и третьей ветвями:

$$i_1(0_+) R_1 + i_3(0_+) R_3 + u_c(0_+) = E.$$

Так как

$$u_C(0_+) = 0 \text{ и } i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+),$$

то

$$i_3(0_+) = \frac{E - 2R_1}{R_1 + R_3} = \frac{120 - 2 \cdot 50}{50 + 50} = 0,2 \text{ а.}$$

Найдем $i_{3\text{св}}(0_+)$:

$$i_{3\text{св}}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3\text{пр}}(0_+) = 0,2 - 0 = 0,2 \text{ а.}$$

Чтобы определить $u_{L\text{св}}(0_+)$, составим уравнение для свободных составляющих по контуру, образованному первой и второй ветвями:

$$i_{1\text{св}}(0_+) R_1 + i_{2\text{св}}(0_+) R_2 + u_{L\text{св}}(0_+) = 0,$$

откуда

$$u_{L\text{св}}(0_+) = -i_{1\text{св}}(0_+) R_1 - i_{2\text{св}}(0_+) R_2 = -0,2 \cdot 50 + 0 = -10 \text{ в.}$$

Но

$$u_{L\text{св}} = L_2 \frac{di_{2\text{св}}}{dt}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{di_{2\text{св}}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{u_{L\text{св}}(0_+)}{L_2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ а/сек.}$$

Свободное напряжение на конденсаторе при $t = 0_+$ найдем по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+);$$

$$u_C(0_+) = u_{C\text{пр}}(0_+) + u_{C\text{св}}(0_+);$$

$$0 = 20 + u_{C\text{св}}(0_+);$$

отсюда

$$u_{C\text{св}}(0_+) = -20 \text{ в.}$$

Определим скорость изменения свободного напряжения на конденсаторе при $t = 0_+$. С этой целью воспользуемся тем, что

$$i_{3\text{св}} = C \frac{du_{C\text{св}}}{dt}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{du_{C\text{св}}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{i_{3\text{св}}(0_+)}{C} = \frac{0,2}{150 \cdot 10^{-6}} = 1333 \text{ в/сек.}$$

Решение второй части задачи

Характеристическое уравнение

$$p^2 L_2 C (R_1 + R_3) + p [C (R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L_2] + R_1 + R_2 = 0$$

имеет два комплексно сопряженных корня:

$$p_1 = -42,1 + j15,2 \text{ сек}^{-1} \text{ и } p_2 = -42,1 - j15,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Поэтому свободная составляющая должна быть взята в таком виде:

$$A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu),$$

где $\delta = 42,1$ и $\omega_0 = 15,2$; A и ν определим по значению свободной составляющей и ее первой производной при $t = 0_+$.

По данным первой части задачи,

$$i_{2пр} = 2 \text{ а}; \quad i_{2св}(0_+) = 0; \quad i'_{2св}(0_+) = -5 \text{ а/сек};$$

$$u_{Cпр} = 20 \text{ в}; \quad u_{Cсв}(0_+) = -20 \text{ в}; \quad u'_{Cсв}(0_+) = 1333 \text{ в/сек}.$$

Функция $Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu)$ при $t = 0$ равна $A \sin \nu$. Производная функции $Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu)$ равна

$$-A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) + Ae^{-\delta t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \nu).$$

Значение этой производной при $t = 0$ равно

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu.$$

Найдем значения A и ν для свободной составляющей тока i_2 . Составим два уравнения:

$$i_{2св}(0_+) = 0, \quad \text{или} \quad A \sin \nu = 0;$$

$$i'_{2св}(0_+) = -5, \quad \text{или}$$

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = -5.$$

Совместное решение их дает

$$\nu = 0 \quad \text{и} \quad A = -0,328 \text{ а}.$$

Следовательно,

$$i_2 = i_{2пр} + i_{2св} = 2 - 0,328e^{-42,1t} \sin 15,2t \text{ а}.$$

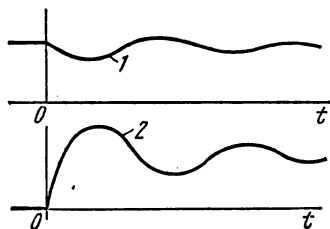


Рис. 10.23

Кривая 1 рис. 10.23 выражает собой график $i_2 = f(t)$.

Найдем A и ν для свободной составляющей напряжения u_C :

$$u_{Cсв}(0_+) = -20, \quad \text{или} \quad A \sin \nu = -20;$$

$$u'_{Cсв}(0_+) = 1333, \quad \text{или} \quad -\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = 1333.$$

Отсюда

$$A = 37,9 \quad \text{и} \quad \nu = -31^\circ 52'.$$

Таким образом,

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} = 20 + 37,9e^{-42,1t} \sin(15,2t - 31^\circ 52') \text{ в}.$$

Кривая 2 рис. 10.23 изображает $u_C = f(t)$.

Пример 121. В схеме рис. 10.22

$$e(t) = 127 \sin(314t + 40^\circ) \text{ в}.$$

Параметры схемы те же, что и в примере 120. До включения ключа в схеме был установившийся режим: $u_C(0_-) = 0$. Требуется:

1) найти

$$i_{2св}(0_+); \quad \left(\frac{di_{2св}}{dt} \right)_{t=0_+}; \quad u_{Cсв}(0_+) \quad \text{и} \quad \left(\frac{du_{Cсв}}{dt} \right)_{t=0_+};$$

2) определить $i_2(t)$ и $u_C(t)$.

Решение первой части задачи
До коммутации

$$I_{1m} = I_{2m} = \frac{127e^{j40^\circ}}{60 + j628} = 0,202e^{-j44^\circ30'} \text{ а};$$

$$i_1 = i_2 = 0,202 \sin(\omega t - 44^\circ30');$$

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = 0,202 \sin(-44^\circ30') = -0,1415 \text{ а}.$$

Определим принужденные токи и напряжения на конденсаторе после коммутации.

Входное сопротивление цепи

$$Z_{вх} = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L_2) \left(R_3 - \frac{j}{\omega C} \right)}{R_2 + j\omega L_2 + R_3 - \frac{j}{\omega C}} = 104,8e^{-j9^\circ50'} \text{ ом};$$

тогда

$$I_{1m} = \frac{\dot{E}_{1m}}{Z_{вх}} = \frac{127e^{j40^\circ}}{104,8e^{-j9^\circ50'}} = 1,213e^{j49^\circ50'} \text{ а}.$$

Мгновенное значение принужденного тока после коммутации

$$i_{1np} = 1,213 \sin(\omega t + 49^\circ50');$$

$$i_{1np}(0_+) = 1,213 \sin 49^\circ50' = 0,923 \text{ а}.$$

Комплексное сопротивление параллельно соединенных второй и третьей ветвей

$$Z_{23} = \frac{(R_2 + j\omega L_2) \left(R_3 - \frac{j}{\omega C} \right)}{R_2 + j\omega L_2 + R_3 - \frac{j}{\omega C}} = 56,3e^{-j18^\circ35'} \text{ ом}.$$

Комплексное напряжение на параллельном участке

$$\dot{U}_{23m} = \dot{I}_{1m} Z_{23} = 1,213e^{j49^\circ50'} \cdot 56,3e^{-j18^\circ35'} = 68,2e^{j31^\circ15'} \text{ в};$$

отсюда

$$I_{2m} = \frac{\dot{U}_{23m}}{Z_2} = \frac{68,2e^{j31^\circ15'}}{10 + j628} = 0,1085e^{-j58^\circ45'};$$

$$I_{3m} = \frac{\dot{U}_{23m}}{Z_3} = \frac{68,2e^{j31^\circ15'}}{50 - j21,3} = 1,253e^{j54^\circ20'}.$$

Мгновенные значения принужденных токов i_2 и i_3 после коммутации:

$$i_2 = 0,1085 \sin(\omega t - 58^\circ45');$$

$$i_3 = 1,253 \sin(\omega t + 54^\circ20');$$

$$i_{2np}(0_+) = 0,1085 \sin(-58^\circ45') = -0,0928 \text{ а};$$

$$i_{3np}(0_+) = 1,253 \sin 54^\circ20' = 1,016 \text{ а}.$$

Принужденное напряжение на конденсаторе

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{I}_{3m} \left(-\frac{j}{\omega C} \right) = 1,253e^{j54^\circ20'} \cdot 21,3e^{-j90^\circ} = 26,7e^{-j35^\circ40'} \text{ в}.$$

Мгновенное значение принужденного напряжения на емкости после коммутации

$$u_{Cnp} = 26,7 \sin(\omega t - 35^\circ 40');$$

$$u_{Cnp}(0_+) = 26,7 \sin(-35^\circ 40') = -15,57 \text{ в.}$$

Найдем $i_{2cb}(0_+)$. По первому закону коммутации,

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = -0,1415 = i_{2np}(0_+) + i_{2cb}(0_+);$$

$$i_{2np}(0_+) = -0,0928 \text{ а};$$

$$i_{2cb}(0_+) = -0,1415 + 0,0928 = -0,0487 \text{ а.}$$

Свободное напряжение на конденсаторе $u_{Ccb}(0_+)$ найдем по второму закону коммутации:

$$u_C(0_-) = u_{Cnp}(0_+) + u_{Ccb}(0_+);$$

$$u_{Ccb}(0_+) = u_C(0_-) - u_{Cnp}(0_+) = 0 - (-15,57) = 15,57 \text{ в.}$$

Для определения $i_{3cb}(0_+)$ составим уравнение по контуру, образованному первой и третьей ветвями:

$$i_{1cb}(0_+) R_1 + i_{3cb}(0_+) R_3 + u_{Ccb}(0_+) = 0.$$

Заменим в нем $i_{1cb}(0_+)$ на $[-0,0487 + i_{3cb}(0_+)]$ и учтем, что

$$u_{Ccb}(0_+) = 15,57 \text{ в.}$$

Найдем:

$$i_{3cb}(0_+) = \frac{-15,57 + 2,43}{50 + 50} = -0,1314 \text{ а};$$

$$i_{1cb}(0_+) = i_{2cb}(0_+) + i_{3cb}(0_+) = -0,18 \text{ а.}$$

Чтобы определить

$$u_{Lcb}(0_+) = L \left(\frac{di_{2cb}}{dt} \right)_{t=0_+},$$

составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями:

$$i_{1cb}(0_+) R_1 + i_{2cb}(0_+) R_2 + u_{Lcb}(0_+) = 0,$$

откуда

$$u_{Lcb}(0_+) = 9,487 \text{ в};$$

$$\left(\frac{di_{2cb}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{u_{Lcb}(0_+)}{L} = \frac{9,487}{2} = 4,74 \text{ а/сек};$$

$$\left(\frac{du_{Ccb}}{dt} \right)_{t=0_+} = \frac{i_{3cb}(0_+)}{C} = \frac{-0,1314}{150 \cdot 10^{-6}} = -876 \text{ в/сек.}$$

Решение второй части задачи

По данным, полученным при решении первой части,

$$i_{2np} = 0,1085 \sin(\omega t - 58^\circ 45'), \quad i_{2cb}(0_+) = -0,0487 \text{ а};$$

$$i'_{2cb}(0_+) = 4,74 \text{ а/сек};$$

$$u_{Cnp} = 26,7 \sin(\omega t - 35^\circ 40'), \quad u_{Ccb}(0_+) = 15,57 \text{ в},$$

$$u'_{Ccb}(0_+) = -876 \text{ в/сек.}$$

Корни характеристического уравнения те же, что и в предыдущем примере. Для определения A и ν для $i_{2\text{св}}$ составим два уравнения:

$$A \sin \nu = -0,0487;$$

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = 4,74,$$

откуда

$$A = 0,184 a \text{ и } \nu = -15^\circ 20'.$$

Следовательно,

$$i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}} = 0,1085 \sin(\omega t - 58^\circ 45') + \\ + 0,184 e^{-42,1t} \sin(15,2t - 15^\circ 20') a.$$

Для определения постоянных A и ν для $u_{\text{св}}$ составим два уравнения:

$$A \sin \nu = 15,57;$$

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = -876.$$

Совместное решение дает:

$$A = 21,3 \text{ и } \nu = 136^\circ 50';$$

$$u_c = u_{\text{спр}} + u_{\text{св}} = 26,7 \sin(\omega t - 35^\circ 40') + \\ + 21,3 e^{-42,1t} \sin(15,2t + 136^\circ 50') \text{ в.}$$

§ 10.28. О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ, ПРИ МАКРОСКОПИЧЕСКОМ РАССМОТРЕНИИ КОТОРЫХ НЕ ВЫПОЛНЯЮТСЯ ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ. ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

На практике встречаются схемы, переходные процессы в которых состоят как бы из двух стадий резко различной продолжительности. Длительность первой стадии в тысячи и миллионы раз короче второй. В течение первой стадии токи в индуктивностях и напряжения на емкостях изменяются настолько быстро (почти скачкообразно), что если

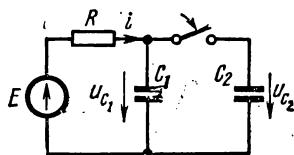


Рис. 10.24

за $t = 0_+$ считать момент окончания первой стадии, то создается впечатление, что при переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$, т. е. за время, например, в несколько микросекунд, как бы нарушаются законы коммутации.

Для иллюстрации нарушения второго закона коммутации рассмотрим переходный процесс в схеме рис. 10.24 с начальными условиями $u_{C1}(0_-) = E$, $u_{C2}(0_-) = 0$.

Если не учитывать хотя и очень малое, но все же конечное сопротивление соединительных проводов, то сначала при замыкании ключа через конденсаторы возникают очень большие броски токов, протекание которых приводит почти к мгновенному уравниванию напряжения на конденсаторах до величины, меньшей E

(это и будет упомянутая ранее первая стадия). После этого начинается вторая стадия, когда параллельно соединенные конденсаторы относительно медленно заряжаются до напряжения E . Длительность переходного процесса практически определяется второй стадией.

В качестве примера нарушения первого закона коммутации рассмотрим переходный процесс в схеме рис. 10.16. Быстрое размыкание ключа в первой ветви, например за 10^{-6} сек, приводит к тому, что сопротивление этой ветви быстро увеличивается, ток i_1 почти скачком уменьшается до нуля, почти скачком изменяются и токи в остальных ветвях. Таким образом, за время 10^{-6} сек (от $t = 0_-$ до $t = 0_+$) токи резко изменяются, а $i(0_+) \neq i(0_-)$ и $i_2(0_+) \neq i_2(0_-)$.

Нарушение законов коммутации при переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ объясняется тем, что процессы в быстро протекающей первой стадии и их зависимость от времени не рассматриваем. Если же первую стадию не исключать при рассмотрении, то законы коммутации выполняются.

Для того чтобы можно было рассчитывать переходные процессы сразу во второй стадии, как бы перешагнув через первую стадию, надо, во-первых, примириться с тем, что при переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ в рассматриваемых задачах законы коммутации, в том виде, как они сформулированы в § 10.5—10.6, не будут выполнены, во-вторых, договориться об исходных положениях, которые позволяют определить значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях (а если потребуется, то и их производные) при $t = 0_+$ через значения токов и напряжений при $t = 0_-$. Таких положений (правил) два. При решении задач рассматриваемого типа они заменяют законы (правила) коммутации, о которых шла речь в § 10.5—10.6, и потому их называют иногда *обобщенными законами (правилами) коммутации*.

1. При переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ суммарное потокоцепление $\Sigma\psi$ каждого замкнутого контура послекоммутационной схемы не должно претерпевать скачкообразных изменений. Это положение следует из второго закона Кирхгофа и доказывается от противного: если допустить, что $\Sigma\psi$ некоторого контура изменится скачком, то в уравнении для этого контура, составленном по второму закону Кирхгофа, появилось бы бесконечно большое слагаемое $\left(\frac{\Delta\Sigma\psi}{\Delta t}\right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \infty$ и второй закон Кирхгофа не был бы выполнен.

$\Sigma\psi$ представляет собой алгебраическую сумму произведений токов ветвей этого контура на их индуктивности (в общем случае с учетом магнитной связи с другими ветвями). Со знаком плюс в эту сумму входят слагаемые ветвей, направление токов в которых совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура.

2. При переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ суммарный заряд Σq на обкладках конденсаторов, присоединенных к любому узлу послекоммутационной схемы, должен остаться неизменным. Если это не выполнить, то суммарный ток, протекающий через конденсаторы, был бы бесконечно большим; бесконечно большими были бы токи и через другие ветви, присоединенные к этому узлу. Это также привело бы к нарушению второго закона Кирхгофа.

Пример 122. Послекоммутационная схема рис. 10.16 имеет всего один контур. По первому закону (правилу),

$$Li(0_-) + L_2 i_2(0_-) = i(0_+)(L + L_2);$$

$$i(0_+) = \frac{1}{L + L_2} [Li(0_-) + L_2 i_2(0_-)].$$

Закон изменения тока при $t \geq 0_+$, если считать, что до коммутации был установившийся режим,

$$i = \frac{E}{2R} + \left[\frac{2E}{3R} \cdot \frac{2L + L_2}{L + L_2} - \frac{E}{2R} \right] e^{-\frac{2R}{L + L_2} \cdot t}.$$

Пример 123. Для схемы рис. 10.24 известны $u_C(0_-) = E$ и $u_{C_2}(0_-) = 0$. По второму закону (правилу) составляем одно уравнение (т. е. столько, сколько надо составить уравнений для послекоммутационной схемы по первому закону Кирхгофа):

$$u_{C_1}(0_-) C_1 = u_C(0_+)(C_1 + C_2);$$

отсюда

$$u_C(0_+) = u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2}.$$

При $t \geq 0_+$

$$u_C = u_{C_{\text{пр}}} + u_{C_{\text{св}}} = E - E \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}.$$

Характер изменения u_{C_1} и u_{C_2} показан на рис. 10.25, а и б. В заключение обратим внимание на то, что, допустив при переходе от $t = 0_-$ к $t = 0_+$ скачкообразное изменение токов через индуктивности и скачкообразное изменение напряжений на емкостях, тем самым допускаем скачкообразное изменение энергии магнитного поля индуктивностей и энергии электрического поля конденсаторов.

Суммарная энергия электрического и магнитного полей при $t = 0_+$ всегда будет меньше суммарной энергии при $t = 0_-$, так как часть запасенной энергии израсходуется на тепловые потери в сопротивлениях, на искру при коммутации, на электромагнитное излучение в окружающее пространство.

Прежде чем перейти к изучению основ второго метода расчета переходных процессов в линейных электрических цепях — операторного метода, вспомним некоторые известные положения.

§ 10.29. ЛОГАРИФМ КАК ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧИСЛА

Известно, что для выполнения умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня из многозначных чисел целесообразно пользоваться логарифмами.

Действительно, операция умножения сводится к сложению логарифмов, операция деления — к вычитанию логарифмов и т. д. Таким образом произвести расчет легче в силу того, что сравнительно сложная операция сводится к более простой.

Каждому числу соответствует свой логарифм, поэтому логарифм можно рассматривать как изображение числа. Так, 0,30103 есть изображение (логарифм) при основании 10 числа 2.

§ 10.30. КОМПЛЕКСНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

С понятием изображения встречаются также при изучении символического метода расчета цепей синусоидального тока. Согласно символическому методу, комплексная амплитуда есть изображение синусоидальной функции. Так, I_m есть изображение синусоидального тока $I_m \sin(\omega t + \psi)$. Между изображением числа в виде логарифма и изображением синусоидальной функции времени в виде комплексного числа имеется существенная разница. В первом случае речь идет об изображении числа (не функции), во втором — об изображении функции времени.

Подобно тому как введение логарифмов упростило проведение операций над числами, введение комплексных изображений синусоидальных функций времени позволило упростить операции над функциями времени (свести операции по расчету цепей синусоидального тока к операциям, изученным в гл. I).

§ 10.31. ВВЕДЕНИЕ К ОПЕРАТОРНОМУ МЕТОДУ

Операторный метод тоже основан на использовании понятия об изображении функций времени. В операторном методе каждой функции времени соответствует функция новой переменной, обозначаемой буквой p , и наоборот — функции переменной p отвечает определенная функция времени.

Переход от функции времени к функции p осуществляют с помощью преобразования (прямого) Лапласа.

Таким образом, операторный метод расчета переходных процессов представляет собой метод расчета, основанный на преобразовании Лапласа.

Операторный метод позволяет свести операцию дифференцирования к умножению, а операцию интегрирования — к делению. Это облегчает интегрирование дифференциальных уравнений.

§ 10.32. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Условимся под p понимать комплексное число

$$p = a + jb, \quad (10.24)$$

где a — действительная, b — мнимая часть этого комплексного числа. (В ряде книг вместо буквы p пишут s .)

В дальнейшем в соответствии с установившейся практикой коэффициент b с учетом знака условимся называть не коэффициентом при мнимой части комплекса (чем он в действительности является), а мнимой частью. Функцию времени (ток, напряжение, э. д. с., заряд) обозначают $f(t)$ и называют *оригиналом*. Ей соответствует функция $F(p)$, называемая *изображением*, которая определяется следующим образом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (10.25)$$

Соответствие между функциями $F(p)$ и $f(t)$ записывают так:

$$F(p) \doteq f(t). \quad (10.26)$$

Знак \doteq называют знаком соответствия.

Верхний предел интеграла (10.25) равен бесконечности. Интегралы с бесконечным верхним пределом называют несобственными. Если в результате интегрирования и подстановки пределов получают конечное число (не бесконечность), то говорят, что интеграл сходится.

В курсе математики доказывается, что интеграл (10.25), в состав которого входит функция $e^{-pt} = e^{-at}e^{-ibt}$, сходится только в том случае, когда модуль функции $f(t)$, если и увеличивается с ростом t , то все же медленнее, чем модуль функции e^{pt} , равный e^{at} .

Практически все функции $f(t)$, с которыми имеют дело электрики, радисты, автоматчики, этому условию удовлетворяют.

Найдем изображения некоторых простейших функций.

§ 10.33. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ

Требуется найти изображение функции $f(t) = A$, где A — постоянная величина. С этой целью в (10.25) вместо $f(t)$ подставим A и проведем интегрирование:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = A \left(-\frac{1}{p} \right) \int_0^{\infty} d(e^{-pt}) = -\frac{A e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Следовательно, изображение постоянной равно постоянной, деленной на p :

$$A \doteq \frac{A}{p}. \quad (10.27)$$

Наряду с преобразованием Лапласа (10.25) в научной и учебной литературе широко пользуются преобразованием Карсона — Хевисайда. При преобразовании по Карсону — Хевисайду принимают

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

По Карсону — Хевисайду, изображение и оригинал имеют одинаковую размерность, а изображение постоянной A равно самой постоянной.

По Лапласу, размерность оригинала не равна размерности изображения, а изображение постоянной A равно $\frac{A}{p}$.

Следует отметить, что основная заслуга в разработке интегрального преобразования функции $f(t)$ в функцию p принадлежит Лапласу. Карсон и Хевисайд добавили к преобразованию Лапласа лишь нормирующий множитель p , благодаря чему оригинал и изображение стали иметь одинаковую размерность.

§ 10.34. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ $e^{\alpha t}$

Вместо $f(t)$ в (10.25) подставим $e^{\alpha t}$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-\alpha)} dt = \\ &= \left(-\frac{1}{p-\alpha} \right) \int_0^{\infty} e^{-t(p-\alpha)} d[-t(p-\alpha)] = \\ &= \frac{-1}{p-\alpha} e^{-t(p-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p-\alpha} (0-1) = \frac{1}{p-\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}. \quad (10.28)$$

При выводе формулы (10.28) (при подстановке пределов) было учтено, что действительная часть оператора p больше, чем α , т. е. $a > \alpha$. Только при этом условии интеграл сходится.

Из формулы (10.28) вытекает ряд важных следствий. Положив в ней $\alpha = j\omega$, получим

$$e^{j\omega t} \doteq \frac{1}{p-j\omega}. \quad (10.29)$$

Формула (10.29) дает возможность найти изображение комплекса синусоидального тока:

$$\dot{I}_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

С этой целью обе части (10.29) умножим на постоянное число \dot{I}_m . Получим

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} \doteq \dot{I}_m \frac{1}{p-j\omega}. \quad (10.30)$$

Аналогично, изображение комплекса синусоидального напряжения

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} \doteq \dot{U}_m \frac{1}{p-j\omega}. \quad (10.31)$$

Функции $e^{-\alpha t}$ соответствует изображение $\frac{1}{p+\alpha}$, т. е.

$$e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p+\alpha}. \quad (10.32)$$

§ 10.35. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Известно, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$. Требуется найти изображение первой производной $\frac{df(t)}{dt}$, если известно, что значение функции $f(t)$ при $t = 0$ равно $f(0)$.

Подвергнем функцию $\frac{df(t)}{dt}$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} d[f(t)].$$

Интегрирование произведем по частям; обозначив

$$e^{-pt} = u \text{ и } d[f(t)] = dv,$$

имеем

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} d[f(t)] = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d[e^{-pt}].$$

Но

$$e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} = 0 - f(0) = -f(0),$$

а

$$-\int_0^{\infty} f(t) d e^{-pt} = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0), \quad (10.33')$$

или

$$\frac{df(t)}{dt} \doteq pF(p) - f(0). \quad (10.33)$$

§ 10.36. ИЗОБРАЖЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА ИНДУКТИВНОСТИ

Изображение тока i равно $I(p)$. Запишем изображение напряжения на индуктивности:

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

По формуле (10.33),

$$\frac{di}{dt} \doteq pI(p) - i(0),$$

где $i(0)^*$ — значение тока i при $t = 0$.

* Для сокращения записи вместо $i(0_-)$ пишем $i(0)$; $i(0)$ может быть и положительной, и отрицательной величиной; $i(0)$ положительно, когда направление тока совпадает с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока в индуктивности L .

Следовательно,

$$L \frac{di}{dt} \doteq LpI(p) - Li(0). \quad (10.34)$$

Если $i(0) = 0$, то

$$L \frac{di}{dt} \doteq LpI(p). \quad (10.34')$$

§ 10.37. ИЗОБРАЖЕНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Без вывода дадим формулу

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \doteq p^2F(p) - pf(0) - \left[\frac{df(t)}{dt} \right]_{t=0}. \quad (10.35)$$

Следовательно, изображением второй производной тока i будет следующее выражение:

$$\frac{d^2i}{dt^2} \doteq p^2I(p) - pi(0) - i'(0).$$

§ 10.38. ИЗОБРАЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Требуется найти изображение функции $\int_0^t f(t) dt$, если известно, что изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$.

Подвергнем функцию $\int_0^t f(t) dt$ преобразованию Лапласа:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] d(e^{-pt}).$$

Примем

$$\int_0^t f(t) dt = u; \quad d(e^{-pt}) = dv$$

и возьмем интеграл по частям:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p} \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] d(e^{-pt}) &= -\frac{1}{p} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} \Big|_0^\infty + \\ &+ \frac{\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt}{p} = \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части при подстановке и верхнего и нижнего пределов дает нуль. При подстановке верхнего предела нуль получается за счет ранее наложенного ограничения на функцию $f(t)$ (см. § 10.32), а именно что функция $f(t)$ если и растет с увеличением t , то все же медленнее, чем растет функция e^{at} , где a — действительная

часть p . При подстановке нижнего предела нуль получается за счет того, что обращается в нуль $\int_0^t f(t) dt$. Следовательно, если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (10.36)$$

§ 10.39. ИЗОБРАЖЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА КОНДЕНСАТОРЕ

Напряжение на конденсаторе u_C часто записывают в виде $u_C = \frac{1}{C} \int idt$, где не указаны пределы интегрирования по времени. Более полной является следующая запись:

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt,$$

где учтено, что к моменту времени t напряжение на конденсаторе определяется не только током, протекавшим через конденсатор в интервале времени от 0 до t , но и тем напряжением $u_C(0)$, которое на нем было при $t = 0$. В соответствии с формулой (10.36)

изображение $\frac{1}{C} \int_0^t idt$ равно $\frac{I(p)}{Cp}$, а изображение постоянной $u_C(0)$

есть постоянная, деленная на p . Поэтому изображение напряжения на конденсаторе записывают следующим образом:

$$u_C \doteq \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (10.37)$$

Приведем простейшие операторные соотношения; часть их была выведена ранее, другая дается без вывода:

1. $\frac{1}{p-\alpha} \doteq e^{\alpha t}.$
2. $\frac{1}{p+\alpha} \doteq e^{-\alpha t}.$
3. $\frac{1}{p-j\omega} \doteq e^{j\omega t}.$
4. $\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \doteq 1 - e^{-\alpha t}.$
5. $\frac{1}{(p+\alpha)^2} \doteq te^{-\alpha t}.$

* Для сокращения записи вместо $u_C(0_-)$ пишем $u_C(0)$; $u_C(0)$ может быть и положительным и отрицательным. В формуле (10.37) $u_C(0)$ берется положительной величиной, если направление напряжения $u_C(0)$ совпадает с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока через конденсатор.

6. $\frac{p}{(p+\alpha)^2} \doteq (1-\alpha t) e^{-\alpha t}$.
7. $\frac{1}{p(p+\alpha)^2} \doteq \frac{1}{\alpha^2} [1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t)]$.
8. $\frac{1}{p^2(p+a)} \doteq \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}$.
9. $\frac{p}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{a-b} (ae^{-at} - be^{-bt})$.
10. $\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at})$.
11. $\frac{1}{p(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$.
12. $\frac{1}{p^2} \doteq t$.

§ 10.40. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1. *Теорема сдвига в области оригиналов (теорема запаздывания).* Если изображение функции $f(t)$ равно $F(p)$, то изображение функции $f(t-\tau)$ равно $e^{-p\tau}F(p)$.

Теорема доказывается путем подстановки $f(t-\tau)$ в формулу преобразования Лапласа и введения новой переменной $t-\tau=t_1$, $dt=dt_1$, $e^{-pt}=e^{-p\tau}e^{-pt_1}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt_1} f(t_1) dt_1 = e^{-p\tau} F(p).$$

Пример на применение теоремы см. на стр. 392.

2. *Теорема сдвига в области изображений.* Если изображению функции $F(p)$ соответствует функция $f(t)$, то изображению $F(p-\lambda)$ соответствует функция $e^{\lambda t}f(t)$.

Доказательство производится путем подстановки функции $e^{\lambda t}f(t)$ в формулу преобразования Лапласа:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\lambda t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-\lambda)} f(t) dt = F(p-\lambda).$$

Пример 124. Найти оригинал $\frac{1}{(p+\lambda)^2}$, если известно, что $\frac{1}{p^2} \doteq t$.

Решение. $\frac{1}{(p+\lambda)^2} \doteq e^{-\lambda t} t$.

3. *Теорема об изменении масштаба (теорема подобия).* Если функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$, то функции $f(at)$ соответствует изображение $\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Теорема доказывается следующим образом:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}(at)} f(at) d(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

4. Нахождение начального значения функции времени $f(0)$ по изображению функции $F(p)$:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Это соотношение получают, если в (10.33') p устремим к бесконечности. При этом левая часть (10.33') равна нулю.

5. Нахождение установившегося значения функции времени $f(\infty)$ по изображению функции $F(p)$: $f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$.

Соотношение получим, если в (10.33') p устремим к нулю и учтем, что $e^{-pt} = 1$. Будем иметь $\int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0) = pF(p) - f(0)$.

Или

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

§ 10.41. ЗАКОН ОМА В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ. ВНУТРЕННИЕ Э. Д. С.

На рис. 10.26 изображена часть сложной разветвленной электрической цепи. Между узлами a и b этой цепи включена ветвь, содержащая R , L , C и источник э. д. с. $e(t)$. Ток по ветви обозначим через i .

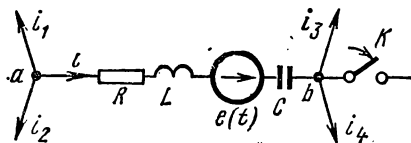


Рис. 10.26

Замыкание ключа K в схеме приводит к переходному процессу. До коммутации ток $i = i(0_-)$ и напряжение на конденсаторе $u_C = u_C(0_-)$.

Выразим потенциал точки a через потенциал точки b для послекоммутационного режима:

$$\varphi_a = \varphi_b + u_C + u_L + u_R - e(t);$$

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = u_R + u_L + u_C - e(t).$$

Вместо u_L запишем $L \frac{di}{dt}$, вместо u_C запишем $u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt$.

Тогда

$$u_{ab} = iR + L \frac{di}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt - e(t). \quad (10.38)$$

К уравнению (10.38) применим преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа является линейным, поэтому изображение суммы равно сумме изображений.

Каждое слагаемое уравнения (10.38) заменим операторным изображением:

вместо iR запишем $RI(p)$; вместо u_{ab} запишем $U_{ab}(p)$;

$$L \frac{di}{dt} \doteq LpI(p) - Li(0); \quad u_C(0) \doteq \frac{u_C(0)}{p};$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t idt \doteq \frac{I(p)}{Cp}; \quad e(t) \doteq E(p).$$

Получим

$$U_{ab}(p) = I(p) \left(R + pL + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p). \quad (10.39)$$

Смысл проведенного преобразования состоит в том, что вместо дифференциального уравнения (10.38) получили алгебраическое уравнение (10.39), связывающее изображение тока $I(p)$ с изображением э. д. с. $E(p)$ и изображением напряжения $U_{ab}(p)$. Из уравнения (10.39) следует, что

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}, \quad (10.40)$$

где

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{Cp}.$$

$Z(p)$ представляет собой *операторное сопротивление* участка цепи между точками a и b . Структура его аналогична структуре комплекса сопротивления того же участка, цепи переменному току, если $j\omega$ заменить на p (см. с § 10.13).

Комплексное число $p = a + jb$ (см. § 10.32) запишем в таком виде: $p = j(b - ja) = j\Omega$; $\Omega = b - ja$ может быть названо *комплексной угловой частотой*. $Z(p) = Z(j\Omega)$ — сопротивление, оказываемое рассматриваемой цепью воздействию $\dot{U}e^{j\Omega t} = \dot{U}e^{pt}$, подобно тому как $Z(j\omega)$ есть сопротивление, оказываемое воздействию $\dot{U}e^{j\omega t}$.

Уравнение (10.40) может быть названо законом Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего э. д. с. Оно записано при ненулевых начальных условиях.

Слагаемое $Li(0)$ представляет собой внутреннюю э. д. с., обусловленную запасом энергии в магнитном поле индуктивности L вследствие протекания через нее тока $i(0)$ непосредственно до коммутации.

Слагаемое $\frac{u_C(0)}{p}$ представляет собой внутреннюю э. д. с., обусловленную запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие наличия напряжения на нем $u_C(0)$ непосредственно до коммутации.

В соответствии с формулой (10.40) на рис. 10.27 изображена *операторная схема замещения* участка цепи рис. 10.26. Операторные сопротивления R , pL , $\frac{1}{Cp}$. Как следует из формулы (10.40), внутренняя э. д. с. $Li(0)$ направлена *согласно* с направлением тока $I(p)$, внутренняя э. д. с. $\frac{u_C(0)}{p}$ — *встречно* току $I(p)$.

В частном случае, когда на участке ab отсутствует э. д. с. $e(t)$ и к моменту коммутации $i(0) = 0$ и $u_c(0) = 0$, уравнение (10.40) приобретает более простой вид:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p)}{Z(p)}. \quad (10.41)$$

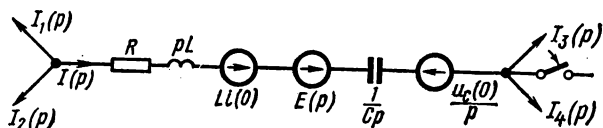


Рис. 10.27

Уравнение (10.41) есть математическая запись закона Ома в операторной форме для участка цепи, не содержащего э. д. с. и при нулевых начальных условиях.

§ 10.42. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю. Так, для узла a схемы рис. 10.26

$$i_1 + i + i_2 = 0. \quad (10.42)$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (10.42) и воспользуемся тем, что изображение суммы равно сумме изображений. Имеем

$$I_1(p) + I(p) + I_2(p) = 0.$$

В общем случае

$$\sum I(p) = 0. \quad (10.43)$$

Уравнение (10.43) выражает собой первый закон Кирхгофа в операторной форме.

§ 10.43. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Для любого замкнутого контура любой электрической цепи можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений. Предварительно необходимо выбрать положительные направления для токов в ветвях и направление обхода контура.

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура рис. 10.28. Контур обходим по часовой стрелке.

Учтем, что индуктивности L_1 и L_2 связаны магнитно. При выбранных положительных направлениях для токов i_1 и i_2 между L_1 и L_2 имеет место согласное включение.

Падение напряжения на L_1 равно $L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$; на L_2 равно $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$. При составлении уравнения учтем, что начальное напряжение на конденсаторе равно $u_C(0)$. Пусть оно действует согласно с током i_3 . Начальное значение тока $i_1 = i_1(0)$ и тока $i_2 = i_2(0)$. Имеем

$$\begin{aligned} & L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + u_C(0) + \\ & + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - \\ & - M \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t). \end{aligned} \quad (10.44)$$

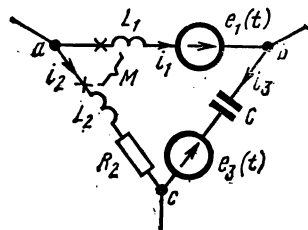


Рис. 10.28

Каждое из слагаемых (10.44) заменим операторным изображением:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} &\doteq L_1 p I_1(p) - L_1 i_1(0); \\ M \frac{di_2}{dt} &\doteq M p I_2(p) - M i_2(0); \\ \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt &\doteq \frac{I_3(p)}{Cp}; \\ i_2 R_2 &\doteq R_2 I_2(p); \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &\doteq L_2 p I_2(p) - L_2 i_2(0); \\ M \frac{di_1}{dt} &\doteq M p I_1(p) - M i_1(0); \\ e_1(t) &\doteq E_1(p); \quad e_3(t) \doteq E_3(p). \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

Подставив (10.45) в (10.44), объединим слагаемые с $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, перенесем в правую часть $\frac{u_C(0)}{p}$, $L_1 i_1(0)$ и другие внутренние э. д. с. и получим

$$I_1(p) Z_1(p) + I_2(p) Z_2(p) + I_3(p) Z_3(p) = E_1(p) - E_3(p) + E_{\text{вн}}(p). \quad (10.46)$$

Здесь

$$Z_1(p) = p(L_1 - M); \quad Z_2(p) = p(M - L_2) - R_2;$$

$$Z_3(p) = \frac{1}{Cp}; \quad E_{\text{вн}}(p) = (L_1 - M) i_1(0) + (M - L_2) i_2(0) - \frac{u_C(0)}{p}.$$

В более общем виде уравнение (10.46) можно переписать так:

$$\sum I_k(p) Z_k(p) = \sum E_k(p). \quad (10.47)$$

Уравнение (10.47) представляет собой математическую запись второго закона Кирхгофа в операторной форме. В состав $E_k(p)$ в общем случае входят и внутренние э. д. с.

§ 10.44. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ, РАССМОТРЕННЫХ В РАЗДЕЛЕ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Из уравнений, составленных по законам Кирхгофа для мгновенных значений, вытекают соответствующие уравнения для изображений.

Уравнения для изображений по форме аналогичны уравнениям, составленным для той же цепи с помощью символического метода для комплексов токов и напряжений.

Но если каждому уравнению для комплексов отвечает соответствующее уравнение для изображений, то все основанные на законах Кирхгофа приемы и методы составления уравнений (методы эквивалентного генератора, контурных токов, узловых потенциалов, наложения и т. п.) можно применить и при составлении уравнений для изображений.

При составлении уравнений для изображений ненулевые начальные условия учитывают путем введения «внутренних» э. д. с., обусловленных начальными токами через индуктивности и начальными напряжениями на емкостях.

§ 10.45. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА В ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ

Расчет в операторном методе состоит из двух основных этапов:
1) составление изображения искомой функции времени;

2) переход от изображения к функции времени.

На нескольких примерах покажем, как производится первый этап. Второй этап будет рассмотрен в § 10.47.

Пример 125. В схеме рис. 10.29 при нулевых начальных условиях включается ключ. Составить операторные изображения токов i_1 и i_3 , пользуясь методом контурных токов.

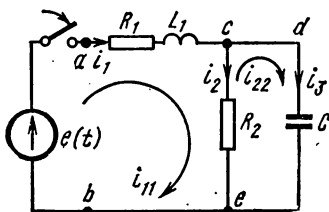


Рис. 10.29

Решение. Направления контурных токов i_{11} и i_{22} показаны на схеме. Имеем:

$$i_{11}R_1 + L_1 \frac{di_{11}}{dt} + R_2(i_{11} - i_{22}) = e(t);$$

$$\frac{1}{C} \int i_{22} dt + R_2(i_{22} - i_{11}) = 0.$$

Переходим к изображениям:

$$I_{11}(p)(pL_1 + R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = E(p);$$

$$-I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) = 0.$$

Совместное решение двух уравнений с двумя неизвестными дает:

$$I_{11}(p) = \frac{E(p)(1 + R_2 Cp)}{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2}; \quad (10.48)$$

$$I_{22}(p) = \frac{E(p) R_2 Cp}{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2}. \quad (10.49)$$

Изображение контурного тока $I_{11}(p)$ равно изображению тока $I_1(p)$; изображение $I_{22}(p)$ — изображению $I_3(p)$. В (10.48) и (10.49) $E(p)$ есть изображение э. д. с. $e(t)$. Если $e(t) = E$, то $E(p)$ равно $\frac{E}{p}$; если

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

то

$$E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega},$$

и т. д.

Пример 126. Составить изображения токов i_1 и i_3 схемы рис. 10.29, пользуясь законами Ома и Кирхгофа.

Решение. Так как в схеме нулевые начальные условия и нет магнитносвязанных индуктивных катушек, то составить уравнения можно проще, чем по методу контурных токов.

Изображение тока

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_{\text{вх}}(p)},$$

где $Z_{\text{вх}}(p)$ — входное сопротивление схемы в операторной форме по отношению к зажимам ab . Оно определится так же, как входное сопротивление для переменного тока, только $j\omega$ заменено на p .

Входное операторное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1 + pL_1 + \frac{R_2 \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{p^2 L_1 C R_2 + p(L_1 + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}{1 + R_2 Cp}.$$

Следовательно,

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{E(p)(1 + R_2 Cp)}{p^2 L_1 C R_2 + p(L_1 + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}; \quad (10.48')$$

уравнение (10.48') совпадает с уравнением (10.48).

Найдем изображение $I_3(p)$. С этой целью выразим $I_3(p)$ через $I_1(p)$ и операторные сопротивления второй и третьей ветвей. Воспользуемся аналогией с переменным током. Для переменного тока

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Следовательно,

$$I_3(p) = I_1(p) \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{Cp}}.$$

Если в последнее выражение подставить $I_1(p)$ из уравнения (10.48), то будет получено уравнение (10.49).

Таким образом, безразлично, каким способом составлять изображения токов: результат будет одинаков.

Пример 127. Для схемы рис. 10.29 составить изображение напряжения на зажимах ce , если считать, что начальные условия нулевые (как и в примере 126).

Решение. Изображение напряжения на зажимах ce равно произведению изображения тока $I_3(p)$ на операторное сопротивление конденсатора:

$$U_{ce}(p) = I_3(p) \frac{1}{Cp} = \frac{E(p) R_2}{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2}. \quad (10.50)$$

§ 10.46. ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ В ВИДЕ ОТНОШЕНИЯ ДВУХ ПОЛИНOMОВ ПО СТЕПЕНЯМ p

Для тока $I_{11}(p)$ в примере 125, если принять $E(p) = \frac{E}{p}$,

$$N(p) = E(1 + R_2 Cp);$$

$$M(p) = [p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2] p.$$

Если в том же примере принять, что

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

то

$$E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega} \quad \text{и} \quad N(p) = \dot{E}_m (1 + R_2 Cp);$$

$$M(p) = (p - j\omega) [p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2].$$

Обозначим высшую степень оператора p в полиноме $N(p)$ через n , а высшую степень p в полиноме $M(p)$ — через m .

Часть корней уравнения $M(p) = 0$ обусловлена характером изменения во времени возмущающей силы, действующей на систему; остальные корни обусловлены свойствами самой цепи, ее конфигурацией и значениями параметров.

Во всех физически осуществимых электрических цепях при действии любых встречающихся э. д. с. всегда $n < m$. Лишь для физически неосуществимых электрических цепей n может оказаться равным m .

Пример физически неосуществимой электрической цепи, для которой степень n равна степени m , дан на рис. 10.30. Если считать, что активное сопротивление цепи равно нулю, что физически неосуществимо, то

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{\frac{1}{p}} = \frac{ECp}{p}.$$

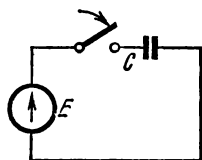


Рис. 10.30

§ 10.47. ПЕРЕХОД ОТ ИЗОБРАЖЕНИЯ К ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

В § 10.45 указывалось, что вторым этапом расчета переходных процессов с помощью операторного метода является переход от изображения к функции времени. Эту операцию можно осуществлять различными путями.

Первый путь состоит в применении формул соответствия между функциями оператора p и функциями времени. Часть формул соответствия приведена на стр. 362—363. В научной литературе имеются специальные исследования, содержащие большое количество формул соответствия (1518), охватывающих все возможные практические задачи. Формулами соответствия (стр. 362—363) рекомендуется пользоваться в том случае, если среди корней уравнения $M(p) = 0$ есть несколько одинаковых корней (кратные корни).

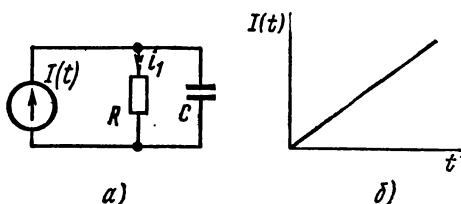


Рис. 10.31

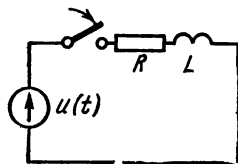


Рис. 10.32

Второй путь состоит в применении так называемой формулы разложения. Формула разложения в § 10.49 выведена исходя из предположения, что уравнение $M(p) = 0$ не имеет кратных корней (при наличии кратных корней формула разложения записывается иначе — см. стр. 378).

Для большинства задач эти ограничения не имеют существенного значения.

Формулой разложения широко пользуются на практике, и ее принято рассматривать как основную формулу для перехода от изображения к функции времени.

Рассмотрим два примера на применение формул соответствия, а затем — после рассмотрения вопроса о разложении сложной дроби на простые — перейдем к выводу формулы разложения.

Пример 128. В схеме рис. 10.31, а ток источника тока линейно нарастает во времени: $I(t) = 2,5t$ а (рис. 10.31, б); $R = 40$ ом, $C = 2$ мкф. Найти закон изменения во времени тока i_1 через сопротивление R .

Решение. Изображение тока $I(t)$ равно $\frac{2,5}{p^2}$ (см. соотношение 12 на стр. 363). Сопротивление параллельно соединенных R и C

$$Z(p) = \frac{R}{RCp + 1}.$$

Изображение тока через R :

$$I_1(p) = \frac{I(p) Z(p)}{R} = \frac{2,5}{RC} \cdot \frac{1}{p^2(p+a)};$$

$$a = \frac{1}{RC} = 12,5 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{2,5}{RC} = 31,3.$$

Согласно соотношению 8 на стр. 363,

$$\frac{1}{p^2(p+a)} \doteq \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} (1 - e^{-at});$$

$$\frac{t}{a} = 0,08t; \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{155} = 0,00645;$$

$$i_1(t) = 31,3 [0,08t - 0,00645 (1 - e^{-12,5t})] a.$$

Пример 129. В схеме рис. 10.32

$$u(t) = 100e^{-at} \text{ в},$$

где $a = 0,5 \text{ сек}^{-1}$; $R = 2 \text{ ом}$; $L = 4 \text{ гн}$.

Найти $i = f(t)$ и $u_L = f(t)$, а также значения i и u_L при $t = 1 \text{ сек}$.

Решение. Согласно соотношению 2 (стр. 362), функции e^{-at} соответствует изображение $\frac{1}{p+a}$. Следовательно,

$$U(p) = \frac{100}{p+a}; \quad Z(p) = R + pL;$$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{100}{(p+a)(pL+R)} = \frac{100}{L} \cdot \frac{1}{(p+a)(p+b)};$$

$$\frac{100}{L} = 25 \text{ а/сек}.$$

Так как

$$b = \frac{R}{L} = 0,5 = a,$$

то

$$I(p) = \frac{100}{L} \cdot \frac{1}{(p+a)^2}.$$

По соотношению 5 (стр. 362),

$$\frac{1}{(p+a)^2} \doteq te^{-at}.$$

Поэтому

$$i(t) = 25 te^{-at}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 100 e^{-0,5t} (1 - 0,5t).$$

При $t = 1 \text{ сек}$

$$i = 25 \cdot 1 \cdot e^{-0,5} = 15,15 \text{ а}; \quad u_L = 100 e^{-0,5} (1 - 0,5) = 30,3 \text{ в}.$$

§ 10.48. РАЗЛОЖЕНИЕ СЛОЖНОЙ ДРОБИ НА ПРОСТЫЕ

Из курса математики известно, что дробь

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (10.51)$$

при условии, что $n < m$ и полином

$$M(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$$

не имеет кратных корней, может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$\frac{N(x)}{M(x)} = A_1 \frac{1}{x-x_1} + A_2 \frac{1}{x-x_2} + \dots + A_m \frac{1}{x-x_m}, \quad (10.52)$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^m A_k \frac{1}{x-x_k},$$

где x_k — корни уравнения $M(x) = 0$.

Для определения коэффициента A_1 умножим обе части уравнения (10.52) на $(x-x_1)$. Получим

$$\frac{N(x)}{M(x)} (x-x_1) = A_1 + (x-x_1) \sum_{k=2}^m A_k \frac{1}{x-x_k}. \quad (10.53)$$

Рассмотрим выражение (10.53) при x , стремящемся к x_1 . Правая часть дает A_1 , левая часть представляет собой неопределенность, так как множитель $(x-x_1)$ при $x \rightarrow x_1$ дает нуль и знаменатель $M(x)$ при значении $x = x_1$ тоже дает нуль [x_1 есть корень уравнения $M(x) = 0$].

Раскроем неопределенность по правилу Лопиталья. С этой целью производную от числителя разделим на производную от знаменателя и найдем предел дроби:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(x-x_1) N(x)}{M(x)} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{N(x) + (x-x_1) N'(x)}{M'(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)}.$$

Здесь $M'(x)$ — производная от $M(x)$ по x ; $M'(x_1)$ — значение $M'(x)$ при $x = x_1$; $N(x_1)$ — значение $N(x)$ при $x = x_1$.

Следовательно, из (10.53) при $x \rightarrow x_1$ получаем уравнение

$$\frac{N(x_1)}{M'(x_1)} = A_1, \quad (10.54)$$

или

$$A_1 = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)}. \quad (10.55)$$

Аналогично,

$$A_k = \frac{N(x_k)}{M'(x_k)}. \quad (10.56)$$

Таким образом,

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)} \cdot \frac{1}{x-x_1} + \frac{N(x_2)}{M'(x_2)} \cdot \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{N(x_m)}{M'(x_m)} \cdot \frac{1}{x-x_m}, \quad (10.57)$$

или

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{N(x_k)}{M'(x_k)} \cdot \frac{1}{x-x_k}. \quad (10.58)$$

Пример 130. Найти коэффициенты разложения дроби $\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Решение. Корни уравнения $M(x) = 0$ равны: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$;

$$M'(x) = 2x - 5; \quad M'(x_1) = 2 \cdot 2 - 5 = -1; \quad M'(x_2) = 1;$$

$$N(x_1) = N(x_2) = 1.$$

По формуле (10.56),

$$A_1 = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)} = \frac{1}{-1} = -1; \quad A_2 = \frac{N(x_2)}{M'(x_2)} = \frac{1}{1} = 1.$$

§ 10.49. ФОРМУЛА РАЗЛОЖЕНИЯ

Переход от изображения $\frac{N(p)}{M(p)}$ к функции времени часто производят с помощью формулы

$$\frac{N(p)}{M(p)} \doteq \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (10.59)$$

которую принято называть формулой разложения.

Левая часть формулы является функцией p , правая часть — соответствующая ей функция времени t .

Вывод формулы можно осуществить следующим образом. Пусть изображение какой-либо функции времени, например тока, представлено в виде дроби:

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Для получения тока как функции времени $i(t)$ представим сначала $\frac{N(p)}{M(p)}$ в виде суммы простых дробей — разложим $\frac{N(p)}{M(p)}$. С этой целью в формуле (10.58) заменим x на p :

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}. \quad (10.60)$$

Перейдем от изображения к оригиналу. Оригиналом левой части является $i(t)$. Оригиналом правой части равен сумме оригиналов ее слагаемых.

Учтем, что множители $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ у слагаемых суммы правой части (10.60) есть постоянные числа (не функции p !) Кроме того, функциями p

в правой части являются только множители $\frac{1}{p-p_k}$; им соответствуют функции времени вида $e^{p_k t}$ [см. формулу (10.28)]. Поэтому

$$i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.61)$$

Переход от изображения (функции p) к оригиналу (функции t) с помощью формулы разложения (10.61) основан на том, что изображение представлено в виде суммы простых дробей $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}$, а оригиналами их являются показательные функции $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$.

Число слагаемых $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ равно числу корней уравнения $M(p) = 0$. Коэффициенты $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ можно сопоставить с постоянными интегрирования дифференциального уравнения (или уравнений) цепи в классическом методе расчета.

Если среди корней уравнения $M(p) = 0$ есть нулевой корень ($p = 0$), то ему в правой части уравнения (10.61) соответствует слагаемое:

$$\frac{N(0)}{M'(0)} e^{0t} = \frac{N(0)}{M'(0)}.$$

Слагаемое $\frac{N(0)}{M'(0)}$ представляет собой составляющую искомого тока или соответственно напряжения, обусловленную постоянными э. д. с. Если постоянных э. д. с. в схеме нет, то $\frac{N(0)}{M'(0)} = 0$.

Важно сделать некоторые замечания к формуле (10.61).

1. Формула разложения применима при любых начальных условиях и при любых практически встречающихся формах напряжения, воздействующего на схему.

2. Если начальные условия не нулевые, то в состав $N(p)$ войдут «внутренние» э. д. с.

3. Если уравнение $M(p) = 0$ имеет комплексно сопряженные корни, то слагаемые, соответствующие им в формуле (10.61), оказываются также комплексно сопряженными и в сумме дают действительное слагаемое.

4. Если воздействующая на схему э. д. с. синусоидальна $E_m \sin(\omega t + \psi)$ и изображение э. д. с. взять в виде $\dot{E}_m \frac{1}{p-j\omega}$, где комплексная амплитуда $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$, то при использовании формулы разложения из правой части ее для перехода от комплекса к мгновенному значению надо взять коэффициент при j (взять мнимую часть)*. В соответствии с этим внутренние э. д. с., которые появляются в правой части формулы разложения при ненулевых начальных усло-

* Мнимая, а не действительная часть из формулы разложения берется потому, что заданная э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$ есть мнимая часть комплекса $\dot{E}_m e^{j\omega t}$ (см. ч. I курса).

виях в цепях с синусоидальной э. д. с., должны быть умножены на коэффициент j .

Умножать внутренние э. д. с. на j необходимо потому, что только в этом случае наличие внутренних э. д. с. будет учтено при взятии мнимой части от правой части формулы разложения. В цепях с постоянной э. д. с. внутренние э. д. с. умножать на j не нужно.

5. Если воздействующее на схему напряжение синусоидально, то принужденная составляющая решения входит в число слагаемых $\sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ и определяется корнем $p = j\omega$. Вычисление принужденной составляющей в виде члена этой суммы, соответствующего корню $p = j\omega$ для сложных схем, в большинстве случаев более громоздко, чем непосредственное вычисление ее с помощью символического метода. Поэтому для сложных схем переменного тока принужденную составляющую рекомендуется вычислять символическим методом.

С помощью формулы, подобной формуле (10.61), можно определять не только токи и напряжения, но и любые другие функции времени (заряд конденсатора, скорость перемещения какого-либо тела механической системы и т. п.).

Пример 131. Определить ток $i_1(t)$ в схеме рис. 10.18 с помощью формулы разложения и сравнить с результатом решения классическим методом (см. пример 118 на стр. 346), если $E = 150$ в; $R = R_1 = R_3 = 50$ ом; $C = 100$ мкф; $u_C(0) = 50$ в.

Решение. Составим уравнения для изображений токов по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы. Учтем, что в схеме ненулевые начальные условия:

$$I_1(p) R_1 + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I_2(p)}{Cp} = \frac{E}{p};$$

$$I_1(p) R_1 + I_3(p) R_3 = \frac{E}{p};$$

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0,$$

где $\frac{u_C(0)}{p}$ — внутренняя э. д. с., обусловленная запасом энергии в электрическом поле конденсатора к началу переходного процесса.

Из системы трех уравнений найдем $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{[E - u_C(0)] R_3 Cp + E}{p(R_1 R_3 Cp + R_1 + R_3)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Уравнение $M(p) = 0$ имеет корни

$$p_1 = 0 \text{ и } p_2 = -\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3 C} = -400 \text{ сек}^{-1};$$

поэтому

$$N(p_1) = E = 150;$$

$$N(p_2) = (150 - 50) \cdot 50 \cdot 100 \cdot (-400) \cdot 10^{-6} + 150 = -50;$$

$$M'(p) = 2R_1 R_3 Cp + R_1 + R_3;$$

$$M'(p_1) = R_1 + R_3 = 100;$$

$$M'(p_2) = 2 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6} (-400) + 100 = -100.$$

Ток в схеме рис. 10.18

$$i_1(t) = \frac{150}{100} + \frac{(-50)e^{-400t}}{(-100)} = 1,5 + 0,5e^{-400t} \text{ а,}$$

что совпадает с результатом примера 118.

Пример 132. Найти $i(t)$ в схеме рис. 10.20 путем применения формулы разложения и сравнить результат с результатом решения той же задачи классическим методом (см. пример 119 на стр. 347).

Решение. Изображение синусоидальной э. д. с. $127 \sin(314t - 50^\circ)$

$$E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega},$$

где $\dot{E}_m = 127e^{-j50^\circ}$ в.

В схеме ненулевые начальные условия:

$$I(p)(R_2 + pL) = E(p) + Li(0); \quad i(0_-) = -25,35 \text{ а.}$$

Так как действующая в схеме э. д. с. синусоидальна и изображение ее взято в виде $\dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega}$ (где \dot{E}_m — комплексная амплитуда) и в дальнейшем в связи с этим от правой части формулы разложения надо будет взять коэффициент при мнимой части (см. п. 4 § 10.49), то умножим внутреннюю э. д. с. $Li(0)$ на j .

После небольших преобразований находим $I(p)$:

$$I(p) = \frac{\dot{E}_m + jLi(0)(p - j\omega)}{(p - j\omega)(R_2 + pL)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Следовательно,

$$N(p) = \dot{E}_m + jLi(0)(p - j\omega); \quad M(p) = (p - j\omega)(R_2 + pL).$$

Уравнение $M(p) = 0$ имеет корни:

$$p_1 = j\omega \text{ сек}^{-1} \text{ и } p_2 = -\frac{R_2}{L} = -210 \text{ сек}^{-1};$$

поэтому

$$M'(p) = R_2 + pL + L(p - j\omega);$$

$$M'(p_1) = 2 + 3j = 3,61e^{j56^\circ 20'};$$

$$M'(p_2) = -3,61e^{j56^\circ 20'} = 3,61e^{-j123^\circ 40'};$$

$$N(p_1) = 127e^{-j50^\circ};$$

$$\begin{aligned} N(p_2) &= 127e^{-j50^\circ} + j(-210 - j314) \cdot \frac{3}{314} \cdot (-25,35) = \\ &= 5,4 - j46,4 = 47,1e^{-j83^\circ 24'}. \end{aligned}$$

Ток

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Im} \left[\frac{127e^{j(\omega t - 50^\circ)}}{3,61e^{j56^\circ 20'}} + \frac{47,1e^{-j83^\circ 24'}}{3,61e^{-j123^\circ 40'}} e^{-210t} \right] = \\ &= 35,2 \sin(\omega t - 106^\circ 20') + 13,1 \sin 40^\circ 16' e^{-210t} \text{ а;} \\ &13,1 \cdot \sin 40^\circ 16' = 8,45. \end{aligned}$$

Результат совпадает с результатом примера 119.

§ 10.50. ДОПОЛНЕНИЯ К ОПЕРАТОРНОМУ МЕТОДУ

К операторному методу необходимо сделать два дополнения.

1. Для перехода от изображения $F(p)$ к соответствующей ей функции времени $f(t)$ в научной и учебной литературе часто пользуются известным из курса математики обратным преобразованием Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (a)$$

Функция $F(p)$ аналитична в области $\operatorname{Re} p > \gamma$ и стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$. При практическом использовании этой формулы интеграл по бесконечной прямой, параллельной оси ординат, заменяют контурным интегралом, охватывающим все полюса функции $F(p)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(p) e^{pt} dp. \quad (б)$$

Полюсами называют значения p , при которых $F(p)$ обращается в бесконечность.

В случае, когда $F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, полюсами являются корни уравнения $M(p) = 0$.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что правая часть формулы (б) равна сумме вычетов (Res) подынтегральной функции во всех ее полюсах, т. е.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint F(p) e^{pt} dp = \sum \operatorname{Res} F(p) e^{pt}.$$

Вычетом функции в некотором полюсе называют величину, на которую уменьшается разделенный на $2\pi j$ контурный интеграл от этой функции, когда контур при его стягивании пересечет этот полюс. Но вычет функции $\frac{N(p)}{M(p)} e^{pt}$ в простом полюсе p_k

равен $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$. Поэтому

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Таким образом, используя обратное преобразование Лапласа, также можно вывести формулу разложения (10.61).

2. Запишем формулу разложения при наличии кратных корней. Положим, что уравнение $M(p) = 0$ имеет q простых корней (p, p, \dots, p_q), корень p_r кратности r и корень p_s кратности s . В этом случае формулу разложения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{M(p)} &= \sum_{k=1}^q \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t} + \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \times \\ &\times \left[\frac{N(p) (p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_r} - \frac{1}{(s-1)!} \cdot \frac{ds-1}{dp^{s-1}} \left[\frac{N(p) (p-p_s)^s e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_s}. \end{aligned}$$

Пример 133. Найти оригинал $\frac{N(p)}{M(p)} = \frac{1}{p^2(p+a)}$. Корню $p = -a$ соответствует оригинал $\frac{N(p)}{M'(p)} e^{pt} = \frac{1}{a^2} e^{-at}$. Корню $p = 0$ второй кратности соответствует оригинал

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{p^2 e^{pt}}{p^2(p+a)} \right]_{p=0} = \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{p+a} \right)_{p=0} = \left(\frac{te^{pt}(p+a) - e^{pt}}{(p+a)^2} \right)_{p=0} = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p^2(p+a)} = \frac{e^{-at}}{a^2} + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}.$$

§ 10.51. ПЕРЕХОДНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

В § 1.15 говорилось о том, что ток i в любой ветви схемы может быть представлен в виде произведения напряжения U на входе схемы на собственную или взаимную проводимость g :

$$i = Ug.$$

При переходных процессах это соотношение также имеет силу. Если на вход какой-либо цепи в момент $t = 0$ включается постоянное напряжение U (или э. д. с. E), то ток $i(t)$ в любой ветви этой схемы будет равен произведению постоянного напряжения U на проводимость $g(t)$:

$$i(t) = Ug(t). \quad (10.62)$$

При переходном процессе проводимость является функцией времени, поэтому в скобках указывается время t ; $g(t)$ называют *переходной проводимостью*. Она измеряется в тех же единицах (сим), что и обычная проводимость.

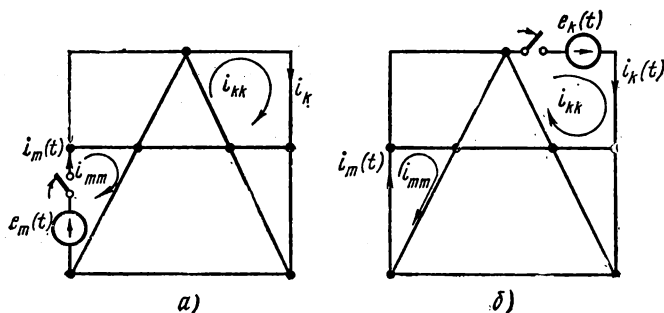


Рис. 10.33

Если в формуле (10.62) принять U равным 1 в, то при этом $i(t) = g(t)$, т. е. переходная проводимость какой-либо ветви схемы численно равна току $i(t)$ в этой ветви при подключении цепи к постоянному напряжению в 1 в. Индексы у $g(t)$ указывают, о какой именно переходной проводимости идет речь. Если индексы одинаковы, то имеется в виду собственная переходная проводимость ветви, номер которой соответствует цифре, указанной в индексе; если индексы разные, то — проводимость между теми ветвями, номера которых указаны в индексе.

Так, например, если источник постоянного напряжения U при нулевых начальных условиях включается в первую ветвь, то ток первой ветви $i_1(t) = Ug_{11}(t)$, а ток третьей ветви $i_3(t) = Ug_{31}(t)$.

Переходную проводимость можно определить либо расчетным, либо опытным путем. При расчетном определении $g_{kk}(t)$ классическим или операторным методами находят ток k -ветви при включении источника постоянного напряжения в k -ветвь. При определении $g_{km}(t)$ находят ток k -ветви при включении постоянного напряжения U в m -ветвь. Далее, в полученных формулах полагают U равным 1 в. При опытном

определении переходной проводимости ток $i(t)$ соответствующей ветви находят путем осциллографирования.

В § 1.16 было доказано, что $g_{km} = g_{mk}$. Это свойство вытекает из симметрии определителя системы относительно главной диагонали.

Аналогично можно доказать, что операторное изображение проводимости $g_{km}(p)$ равно операторному изображению $g_{mk}(p)$. Но если равны изображения двух переходных проводимостей, то равны и сами переходные проводимости, т. е.

$$g_{km}(t) = g_{mk}(t).$$

Данное равенство свидетельствует о том, что на переходные процессы распространяется *теорема взаимности*. Для переходных процессов теорема взаимности формулируется следующим образом (см. «скелетные» схемы рис. 10.33): в любой линейной электрической цепи ток переходного процесса k -ветви $i_k(t)$, вызываемый включением э. д. с. $e_m(t)$ в m -ветвь (рис. 10.33, а), равен току переходного процесса $i_m(t)$ в m -ветви, вызываемому включением э. д. с. $e_k(t)$ в k -ветвь (рис. 10.33, б), при условии, что $e_k(t) = e_m(t)$.

§ 10.52. ПОНЯТИЕ О ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО НАПРЯЖЕНИЮ

При подключении линейной электрической цепи с нулевыми начальными условиями к постоянному напряжению U между какими-то двумя точками a и b схемы возникает напряжение $u_{ab}(t)$, являющееся функцией времени и пропорциональное воздействию напряжению U :

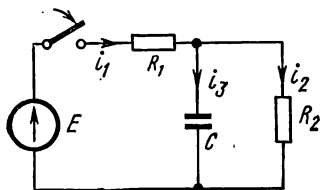


Рис. 10.34

$$u_{ab}(t) = U k(t). \quad (10.62')$$

$k(t)$ называют *переходной функцией по напряжению*. Это безразмерная величина, численно равная напряжению между точками a и b схемы, если на вход схемы подать постоянное напряжение в 1 в; $k(t)$ так же, как и $g(t)$, можно определить либо расчетным, либо опытным путем.

Пример 134. Определить переходную проводимость схемы рис. 10.2 (на стр. 325).

Решение. При замыкании ключа

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

По определению, переходная проводимость равна току в цепи при $E = 1$ в. Следовательно,

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Пример 135. Найти собственную переходную проводимость первой ветви $g_{11}(t)$, взаимную переходную проводимость между третьей и первой ветвями $g_{31}(t)$ и переходную функцию напряжения на конденсаторе $k_{uC}(t)$ для схемы рис. 10.34. Параметры схемы: $R_1 = 1000$ ом; $R_2 = 2000$ ом; $C = 50$ мкф.

Р е ш е н и е. По определению,

$$i_1 = E g_{11}(t); \quad i_3 = E g_{31}(t); \quad u_C = E k_{uC}(t).$$

С помощью классического метода получаем:

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} + E \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{pt}; \quad i_3 = \frac{E}{R_1} e^{pt};$$

$$u_C = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{pt}); \quad p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Полагая в этих формулах $E = 1$ в, находим:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t};$$

$$g_{31}(t) = \frac{1}{R_1} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t};$$

$$k_{uC}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right).$$

Подстановка числовых значений дает:

$$g_{11}(t) = 0,00033 + 0,00067 e^{-30t} \text{ сим};$$

$$g_{31}(t) = 0,001 e^{-30t} \text{ сим};$$

$$k_{uC}(t) = \frac{2}{3} (1 - e^{-30t}).$$

Пример 136. Определить взаимную проводимость между первой и третьей ветвями схемы рис. 10.4 (см. стр. 330) при включении э. д. с. в первую ветвь и следующих значениях параметров: $R_1 = R_2 = 100 \text{ ом}$; $L_1 = 1 \text{ гн}$; $C = 100 \text{ мкф}$.

Р е ш е н и е. Изображение тока третьей ветви

$$I_3(p) = \frac{E R_2 C}{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Корни уравнения $M(p) = 0$ (см. пример 113 на стр. 333):

$$p_1 = -100 + j100 \text{ сек}^{-1}; \quad p_2 = -100 - j100 \text{ сек}^{-1}.$$

Полагаем $E = 1$ в и в соответствии с формулой разложения находим:

$$i_3(t)_{\text{при } E=1 \text{ в}} = \frac{R_2 C}{2p_1 R_2 L_1 C + (R_1 R_2 C + L_1)} e^{p_1 t} +$$

$$+ \frac{R_2 C}{2p_2 R_2 L_1 C + (R_1 R_2 C + L_1)} e^{p_2 t}.$$

После подстановки значений параметров, значений корней p_1 и p_2 и использования формулы $\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x$ получим

$$g_{31}(t) = i_3(t) = 0,01 e^{-100t} \sin 100 t \text{ сим.}$$

при $E = 1 \text{ в}$

Таким образом, взаимная переходная проводимость между третьей и первой ветвями схемы рис. 10.4 при данных значениях параметров представляет собой затухающую синусоиду.

Пример 137. В схеме рис. 10.35: $u(t) = 170 \sin(314t + 30^\circ)$ в; $R_1 = 10$ ом; $R_2 = 5$ ом; $R_3 = 15$ ом; $L_1 = 30$ мГн; $L_2 = 50$ мГн; $M = 25$ мГн. Найти $i_1(t)$ с помощью формулы разложения.

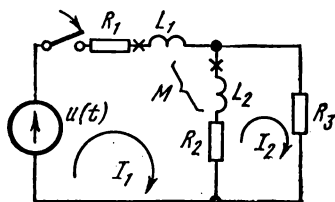


Рис. 10.35

Решение. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$\begin{aligned} I_1(p) [R_1 + R_2 + p(L_1 + L_2 + 2M)] - \\ - I_2(p) [R_2 + p(L_2 + M)] &= U(p); \\ - I_1(p) [R_2 + p(L_2 + M)] + \\ + I_2(p) (R_2 + R_3 + pL_2) &= 0. \end{aligned}$$

Совместное решение дает

$$I_1(p) = \frac{\dot{U}_m}{(p - j\omega) Z_1(p)} = \frac{\dot{U}_m (20 + 0,05p)}{(p - j\omega) (0,000875p^2 + 2,6p + 275)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Корни уравнения $M(p) = 0$:

$$p_1 = 314j, \quad p_2 = -2860 \text{ и } p_3 = -114 \text{ сек}^{-1};$$

$$M'(p) = 0,000875p^2 + 2,6p + 275 + (p - j\omega) (0,00175p + 2,6);$$

$$N(p_1) = 170e^{j30^\circ} (20 + 0,05 \cdot 314j) = 4301e^{j68^\circ 20'};$$

$$N(p_2) = 170e^{j30^\circ} (20 - 0,05 \cdot 2860) = 123 \cdot 170e^{j210^\circ};$$

$$N(p_3) = 170e^{j30^\circ} (20 - 0,05 \cdot 114) = 14,29 \cdot 170e^{j30^\circ};$$

$$M'(p_1) = -0,000875 \cdot 314^2 + 2,6 \cdot 314j + 275 = 188,7 + j817 = 838e^{j77^\circ};$$

$$M'(p_2) = 6890 + j756 = 6930e^{j6^\circ 16'};$$

$$M'(p_3) = -284 - 754j = 806e^{-j110^\circ 40'}.$$

Ток

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Im} \left\{ \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{N(p_3)}{M'(p_3)} e^{p_3 t} \right\} = \\ &= \text{Im} \{ 5,13e^{j(\omega t - 8^\circ 40')} + 3,03e^{j203^\circ 44'} e^{-2860t} + 3,01e^{j140^\circ} e^{-114t} \} = \\ &= 5,13 \sin(\omega t - 8^\circ 40') - 1,16e^{-2860t} + 1,97e^{-114t} (a). \end{aligned}$$

§ 10.53. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Познакомимся с третьим методом расчета переходных процессов в линейных электрических цепях — с расчетом с помощью интеграла Дюамеля.

При использовании интеграла Дюамеля условимся переменную, по которой производится интегрирование, обозначать через τ , а под t по-прежнему будем понимать тот момент времени, в который требуется найти ток в цепи. Пусть в цепь с нулевыми начальными условиями в момент времени $t = 0$ подключается напряжение $u(\tau)$ (рис. 10.36). Для того чтобы найти ток в цепи в момент времени t , заменим плавную

кривую ступенчатой и просуммируем токи от начального напряжения $u(0)$ и от всех ступенек напряжения, вступающих в действие с запозданием во времени.

Напряжение $u(0)$ в момент времени t вызовет в цепи ток $u(0)g(t)$, где $g(t)$ — переходная проводимость.

В момент времени $\tau + \Delta\tau$ (рис. 10.36) возникает скачок напряжения

$$\Delta u \approx \left(\frac{du}{d\tau}\right) \Delta\tau = u'(\tau) \Delta\tau.$$

Для того чтобы найти составляющую тока в момент времени t , вызываемую этим скачком напряжения Δu , необходимо величину $u'(\tau)\Delta\tau$ умножить на значение переходной проводимости с учетом времени действия скачка до момента времени t .

Из рис. 10.36 видно, что это время равно $t - \tau - \Delta\tau$. Следовательно, приращение тока равно $u'(\tau)g(t - \tau - \Delta\tau)\Delta\tau$.

Полный ток в момент времени t получим, если просуммируем все частичные токи от отдельных скачков и прибавим их к току $u(0)g(t)$:

$$i(t) = u(0)g(t) + \sum u'(\tau)g(t - \tau - \Delta\tau)\Delta\tau.$$

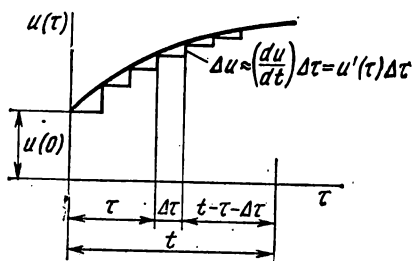


Рис. 10.36

Число членов суммы равно числу ступенек напряжения. Очевидно, что ступенчатая кривая тем лучше будет заменять плавную кривую, чем больше будет число ступенек.

С этой целью заменим конечный интервал времени $\Delta\tau$ на бесконечно малый $d\tau$ и перейдем от суммы к интегралу:

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (10.63)$$

Формулу (10.63) называют интегралом Дюамеля.

Приведем еще пять форм записи интеграла Дюамеля (одна из них в приложении Ж будет использована для вывода формулы, связывающей передаточную функцию и переходную функцию четырехполюсника). Интеграл в (10.63) возьмем по частям:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du; \\ u'(\tau)d\tau &= dv; \quad g(t - \tau) = u; \quad \int_0^t u'(\tau)g(t - \tau)d\tau = \\ &= g(t - \tau)u(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau = \\ &= g(0)u(t) - g(t)u(0) + \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Подставив результат в (10.63), получим

$$i(t) = u(t)g(0) + \int_0^t u(\tau)g'(t - \tau)d\tau. \quad (10.63a)$$

Но для любых двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ путем замены переменных можно доказать справедливость следующего соотношения:

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \quad (a)$$

Распространив это соотношение на (10.63) и (10.63а), получим:

$$i(t) = u(t) g(0) + \int_0^t u(t-\tau) g'(\tau) d\tau; \quad (10.63б)$$

$$i(t) = u(0) g(t) + \int_0^t u'(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (10.63в)$$

Имея в виду формулу дифференцирования определенного интеграла $Q(\alpha) = \int_{Z_1}^{Z_2} f(x, \alpha) dx$ по параметру α

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(Z_2, \alpha) \frac{dZ_2}{d\alpha} - f(Z_1, \alpha) \frac{dZ_1}{d\alpha} \quad (б)$$

и учитывая соотношение (а), получим еще две формы записи интеграла Дюамеля:

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau; \quad (10.63г)$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u(t-\tau) g(\tau) d\tau. \quad (10.63д)$$

Два последних соотношения имеют непосредственное отношение к *теореме свертки* операторного метода: если $F_1(p) \doteq f_1(t)$, $F_2(p) \doteq f_2(t)$, то

$$F_1(p) F_2(p) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau,$$

а

$$pF_1(p) F_2(p) \doteq \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

С помощью интеграла Дюамеля можно найти не только ток, но и любую другую величину, например напряжение. В этом случае в формулу вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция по напряжению $k(t)$.

§ 10.54. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ

Расчет с помощью интеграла Дюамеля проводят в четыре этапа:

1) определение переходной проводимости $g(t)$ для исследуемой цепи;

2) определение $g(t - \tau)$. С этой целью в формуле для $g(t)$ заменяют t на $(t - \tau)$;

3) определение $u'(\tau)$. Для этого находят производную от заданного напряжения $u(t)$ по времени t и в полученном выражении заменяют t на τ ;

4) подстановка найденных на этапах 1, 2, 3 функций в формулу (10.63), интегрирование по переменной τ и подстановка пределов.

Пример 138. Найти $i_1 = f(t)$ и $u_2 = f(t)$ при включении ключа в схеме рис. 10.37, а. Напряжение источника э. д. с. $u(t) = 100(1 - e^{-at})$ в; $a = 0,25 \text{ сек}^{-1}$; $R = 0,5 \text{ ом}$; $L_1 = 1 \text{ гн}$; $M = 0,5 \text{ гн}$.

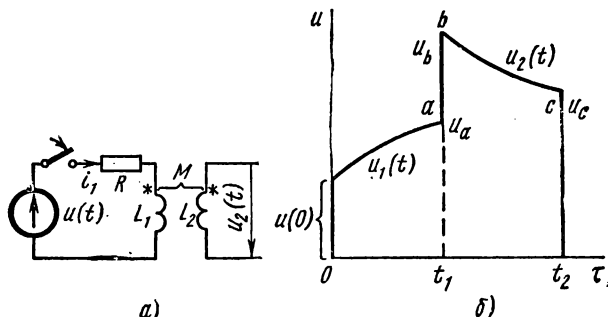


Рис. 10.37

Решение. Переходная проводимость цепи, состоящей из последовательно включенных R и L ,

$$g(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-bt}),$$

где

$$b = \frac{R}{L_1}; \quad g(t - \tau) = \frac{1}{R} [1 - e^{-b(t - \tau)}].$$

Первое слагаемое в формуле (10.63) выпадает, так как $u(0) = 0$. Находим:

$$u'(t) = \frac{d}{dt} 100(1 - e^{-at}) = 100ae^{-at};$$

$$u'(\tau) = 100ae^{-a\tau};$$

$$i_1(t) = \int_0^t u'(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{100a}{R} \int_0^t e^{-a\tau} [1 - e^{-b(t - \tau)}] d\tau.$$

При интегрировании учитываем, что e^{-bt} от τ не зависит:

$$i_1(t) = 200(1 + e^{-0,5t} - 2e^{-0,25t}) a.$$

Напряжение на зажимах вторичной обмотки

$$u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} = 50(e^{-0,25t} - e^{-0,5t}) \text{ в.}$$

§ 10.55. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ ПРИ СЛОЖНОЙ ФОРМЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть напряжение u (τ) изменяется во времени по сложному закону, например в соответствии с рис. 10.37, б. Начальное напряжение равно $u(0)$. В интервале от $\tau = 0$ до $\tau = t_1$ напряжение плавно растет, и закон его изменения в этом интервале времени будет $u_1(\tau)$. В момент $\tau = t_1$ оно меняется скачком от u_a до u_b , а затем снова плавно, но уже по другому закону $u_2(\tau)$ во времени по сравнению с первым интервалом. При $\tau = t_2$ напряжение скачком уменьшается со значения u_c до нуля.

Требуется найти ток в каждом из трех интервалов времени. Под первым интервалом будем понимать интервал от $\tau = 0$ до $\tau = t_1$ (не включая скачка напряжения от u_a до u_b); под вторым — от t_1 до t_2 , включая скачок от u_a до u_b , но не включая скачок от u_c до нуля; под третьим — при $\tau > t_2$, включая скачок от u_c до нуля.

Интегрирование по-прежнему проводим по τ , понимая под t фиксированный момент времени, в который требуется найти ток. Ток в любой момент времени t определится действием всех напряжений, вступивших в действие до момента t .

В первый интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'_1(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Во второй интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)g(t-\tau)d\tau + (u_b - u_a)g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

где слагаемое $(u_b - u_a)g(t - t_1)$ обусловлено скачком напряжения от u_a до u_b в момент времени t_1 .

В третий интервал времени

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)g(t-\tau)d\tau + (u_b - u_a)g(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau)g(t-\tau)d\tau + (0 - u_c)g(t - t_2).$$

Пример 139. В электрической цепи рис. 10.37, а в момент времени $t = 0$ замыкается ключ, и напряжение $u(t)$ изменяется в соответствии с рис. 10.37, б; $u(0) = 50$ в. В первый интервал времени от $t = 0$ до $t = t_1 = 4$ сек напряжение $u_1(t) = 150 - 100e^{-at}$, где $a = 0,25$ сек⁻¹.

Во второй интервал времени от $t = t_1 = 4$ сек до $t = t_2 = 6$ сек $u_2(t) = 50 + 100e^{-c(t-t_1)}$, где $c = 0,4$ сек⁻¹.

Параметры схемы рис. 10.37, а таковы: $R_1 = 0,5$ ом; $L_1 = 1$ гн (вторичная цепь разомкнута).

Найти закон изменения тока i_1 во времени для обоих интервалов времени, а также значения тока i_1 при $t = 2$ сек и $t = 5$ сек.

Р е ш е н и е.

$$g(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-bt}); \quad b = \frac{R}{L_1} = 0,5 \text{ сек}^{-1};$$

$$g(t - \tau) = \frac{1}{R} [1 - e^{-b(t - \tau)}].$$

В первый интервал времени: $u'_1(\tau) = 100ae^{-a\tau}$;

$$\begin{aligned} i_1(t) &= u(0)g(t) + \int_0^t u'_1(\tau)g(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{u(0)}{R} (1 - e^{-bt}) + \frac{100a}{R} \int_0^t e^{-a\tau} [1 - e^{-b(t - \tau)}] d\tau = \\ &= 100 (1 - e^{-0,5t}) + 200 (1 + e^{-0,5t} - 2e^{-0,25t}). \end{aligned}$$

При $t = 2 \text{ сек}$

$$i_1 = 100 (1 - e^{-1}) + 200 (1 + e^{-1} - 2e^{-0,5}) = 94,9a.$$

Во второй интервал времени (включая скачок $u_b - u_a = 36,9 \text{ в}$):

$$\begin{aligned} i_1(t) &= u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)g(t - \tau) d\tau + \\ &+ (u_b - u_a)g(t - t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)g(t - \tau) d\tau; \end{aligned}$$

$$u'_2(\tau) = -100ce^{-c\tau}e^{ct_1};$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 100 (1 - e^{-0,5t}) + 200 (0,632 - 1,718 \cdot e^{-0,5t}) + \\ &+ \frac{36,9}{0,5} [1 - e^{-0,5(t - t_1)}] - \frac{100c}{(b - c)R} \left[-\frac{b}{c} e^{-ct} + \right. \\ &\left. + \frac{b - c}{c} e^{-ct_1} + e^{-ct_1} e^{-b(t - t_1)} \right] e^{ct_1}. \end{aligned}$$

При $t = 5 \text{ сек}$

$$\begin{aligned} i_1 &= 100 (1 - e^{-2,5}) + 200 (0,632 - 1,718 \cdot e^{-2,5}) + \\ &+ \frac{36,9}{0,5} (1 - e^{-0,5}) - \frac{100 \cdot 0,4}{(0,5 - 0,4) 0,5} \times \\ &\times (-1,25e^{-0,4 \cdot 5} + 0,25e^{-1,6} + e^{-0,4 \cdot 4} e^{-0,5}) e^{1,6} = \\ &= 91,79 + 98,2 + 29 - 14,67 = 204,32a. \end{aligned}$$

§ 10.56. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

И классический и операторный методы расчета теоретически можно применять для решения задач любой сложности. Каким из них пользоваться, во многом зависит от навыка и привычки.

Однако классический метод более физически прозрачен, чем операторный, в котором решение дифференциальных уравнений весьма сильно «механизировано».

Если при сравнении методов исходить из объемов вычислительной работы, то решение уравнений первого и второго порядков для источ-

ников постоянной или синусоидальной э. д. с. или тока целесообразно проводить классическим методом, а решение уравнений третьего и более высоких порядков — операторным. Объясняется это тем, что чем выше порядок характеристического уравнения, тем более громоздкой и трудоемкой оказывается операция нахождения постоянных интегрирования в классическом методе.

Если воздействующее напряжение изменяется во времени линейно или в виде всплеска одной или нескольких экспонент, рекомендуется операторный метод или интеграл Дюамеля. Но основной областью применения интеграла Дюамеля являются случаи, когда напряжение изменяется по сложному закону во времени, например, при наличии скачков напряжения (см. § 10.55), или когда переходная проводимость $g(t)$ и (или) воздействующее на схему напряжение заданы графически (в последнем случае интеграл Дюамеля берется путем числового интегрирования).

Классический и операторный методы и интеграл Дюамеля в аналитической форме имеют общий недостаток: надо определять все корни характеристического уравнения, что для уравнений высоких степеней (например, 5-й, 6-й, 7-й...) требует много времени. В этих случаях используют метод трапецидальных частотных характеристик (см., например, [14]) или спектральный метод в том виде, в каком он рассмотрен, например, в § Ж.4, или применяют моделирующие установки.

§ 10.57. ПРОСТЕЙШЕЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО

На рис. 10.38, а представлен четырехполюсник, который при определенных условиях может служить в качестве простейшего дифференцирующего устройства. Он состоит из последовательно соединенных ак-

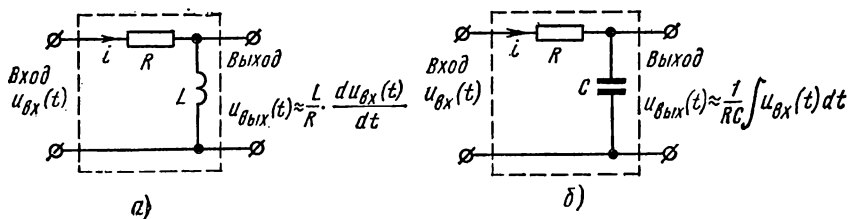


Рис. 10.38

тивного сопротивления R и индуктивности L . По второму закону Кирхгофа, $L \frac{di}{dt} + Ri = u_{\text{вх}}(t)$.

Если параметры цепи выбрать таким образом, что при некотором конкретном $u_{\text{вх}}(t)$ величина $L \frac{di}{dt}$ будет много меньше Ri , то

$$Ri \approx u_{\text{вх}}(t) \text{ и } i \approx \frac{u_{\text{вх}}(t)}{R}.$$

При этом напряжение на выходе четырехполюсника будет пропорционально производной от напряжения на входе:

$$u_{\text{вых}}(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Дифференцирование производят также, подавая напряжение на вход последовательно соединенных C и R и снимая напряжение с R . Для того чтобы дифференцирование осуществлялось с малыми искажениями, необходимо выполнить следующие соотношения между наивысшей частотой сигнала ω и параметрами схемы: для рис. 10.38, а $\frac{\omega L}{R} \ll 1$ и для цепочки CR $\omega RC \ll 1$.

Для обоснования этих соотношений следует составить передаточную функцию рассматриваемой цепочки (см. § 10.63) и выяснить, при каком условии она будет пропорциональна p ; затем в этом условии заменить p на $j\omega$.

При дифференцировании импульсных воздействий длительностью $t_{\text{и}}$ параметры дифференцирующих цепей должны удовлетворять условию $L/R \ll t_{\text{и}}$ и $RC \ll t_{\text{и}}$.

§ 10.58. ПРОСТЕЙШЕЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО

На рис. 10.38, б представлен четырехполюсник, напряжение на выходе которого при определенных условиях пропорционально интегралу от входного напряжения. Он состоит из последовательно соединенных R и C .

По второму закону Кирхгофа, $iR + u_C = u_{\text{вх}}(t)$.

Выберем параметры схемы (R и C) таким образом, что при некотором конкретном $u_{\text{вх}}(t)$ падение напряжения u_C будет много меньше iR ; тогда

$$iR \approx u_{\text{вх}}(t); \quad i \approx \frac{u_{\text{вх}}(t)}{R}.$$

Напряжение на выходе пропорционально интегралу от напряжения на входе:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{RC} \int u_{\text{вх}}(t) dt.$$

Для интегрирования применяют также цепь из последовательно соединенных L и R , снимая напряжение с R . Чтобы интегрирование происходило с относительно малыми искажениями, между частотой сигнала ω и параметрами интегрирующей цепи должно выполняться соотношение: для схемы рис. 10.38, б $\omega RC \gg 1$, для LR -цепи $\frac{\omega L}{R} \gg 1$. (В этом случае передаточная функция должна быть пропорциональна $\frac{1}{p}$.)

При интегрировании импульсных воздействий длительностью $t_{\text{и}}$ параметры интегрирующих цепей должны удовлетворять условию $L/R \gg t_{\text{и}}$ и $RC \gg t_{\text{и}}$.

Напряжение с выхода дифференцирующего и интегрирующего устройств подается для наблюдения или записи на катодный осциллограф с большим входным сопротивлением.

§ 10.59. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для расчета переходных процессов применяют также метод эквивалентного генератора. Рассмотрим его на примере трехфазной цепи рис. 10.39, а. В ней

$$\begin{aligned}e_A &= E_m \sin(\omega t + \varphi); \\e_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ + \varphi); \\e_C &= E_m \sin(\omega t + 120^\circ + \varphi).\end{aligned}$$

Внутреннее сопротивление источника трехфазной э. д. с. положим равным нулю.

В фазах В и С включены R и C, в фазе А — R и L. Требуется составить операторное изображение цепи фазы А при замыкании ключа.

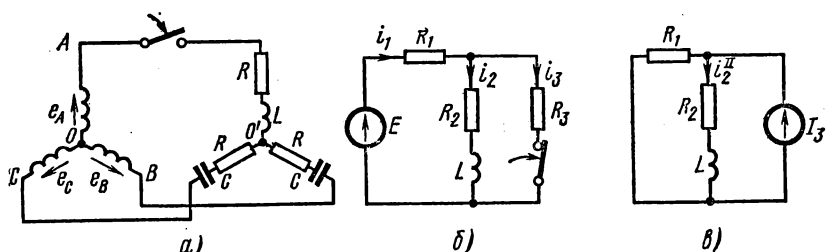


Рис. 10.39

Согласно методу эквивалентного генератора, надо операторное изображение напряжения разомкнутой ветви $U_{AO' \text{ х. х }}(p)$ разделить на сумму операторного сопротивления включаемой ветви $Z_A(p)$ и входного операторного сопротивления всей схемы по отношению к точкам А и О' — обозначим его $Z_{\text{вх}}(p)$:

$$I_A(p) = \frac{U_{AO' \text{ х. х }}(p)}{Z_A(p) + Z_{\text{вх}}(p)}.$$

При разомкнутом ключе мгновенное значение напряжения (см. стр. 186)

$$u_{AO' \text{ х. х }} = \frac{3}{2} E_m \sin(\omega t + \varphi);$$

его изображение

$$U_{AO' \text{ х. х }}(p) = \frac{3}{2} \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega};$$

$$Z_A(p) = R + pL; \quad Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{Cp} \right).$$

Следовательно,

$$I_A(p) = \frac{3\dot{E}_m C p}{(p - j\omega)(2p^2 LC + 3pRC + 1)}.$$

Для перехода к функции времени следует применить формулу разложения.

По существу поступаем так же, как и в § 1.23 (ч. I учебника) при обосновании применения метода эквивалентного генератора к расчету цепей постоянного тока.

Всю схему, за исключением ветви, в которой производится замыкание ключа, представляем в виде активного двухполюсника. Зажимы подключаемой ветви обозначим через A и O' .

Вводим в эту цепь две равные и противоположно направленные э. д. с. $e_1(t)$ и $e_2(t)$. Величина каждой э. д. с. равна напряжению на зажимах ветви при ее холостом ходе — обозначим его через $u_{AO'x, x}$.

Далее замыкаем ключ и для нахождения тока в любой ветви схемы пользуемся принципом наложения. Ток в любой ветви схемы представляем в виде суммы двух токов: $i(t) = i'(t) + i''(t)$.

Ток $i'(t)$ вызван всеми э. д. с. активного двухполюсника и э. д. с. $e_1(t)$, направленной встречно $u_{AO'x, x}$.

Ток $i''(t)$ вызван только одной э. д. с. $e_2(t)$, направленной так же, как и $u_{AO'x, x}(t)$.

Поскольку э. д. с. $e_1(t)$ направлена встречно напряжению $u_{AO'x, x}(t)$, то ток $i'(t)$ в подключенной ветви остается равным нулю, а в остальных ветвях схемы токи останутся теми же, какими они были до замыкания ключа. Ток $i''(t)$ находят от действия э. д. с. $e_2(t) = u_{AO'x, x}$, когда во всей схеме имеют место нулевые начальные условия.

В заключение необходимо отметить, что если производится размыкание какой-либо ветви некоторой схемы, то токи в остальных ветвях после размыкания упомянутой ветви могут быть найдены путем наложения двух режимов:

1) докоммутационного режима;

2) режима, возникающего в соответствующих ветвях пассивной схемы при нулевых начальных условиях от включения в размыкаемую ветвь источника тока.

Источник тока дает ток, равный и противоположно направленный току в размыкаемой ветви.

Пример 140. В качестве иллюстрации методики расчета переходных процессов путем введения источника тока найдем для схемы рис. 10.39, б ток i_2 при размыкании ключа третьей ветви, полагая, что до коммутации в схеме был установившийся режим: $R_1 = 40 \text{ ом}$, $R_2 = R_3 = 160 \text{ ом}$, $L = 2 \text{ гн}$, $E = 120 \text{ в}$. После размыкания ключа $i = i_1^I + i_2^{II}$, где $i_2^I = 0,5 \text{ а}$ — ток докоммутационного режима; i_1^{II} — ток от источника тока $\dot{I}_3 = 0,5 \text{ а}$ (в данном случае постоянного) в схеме рис. 10.39, в.

Изображение тока

$$I_2^{II}(p) = I_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + pL}.$$

Следовательно,

$$i_2^{II} = \frac{I_3 R_1}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \right) = 0,1 (1 - e^{-100t}) \text{ а};$$

$$i_2 = 0,5 + 0,1 (1 - e^{-100t}) \text{ а}.$$

§ 10.60. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСОВ НАПРЯЖЕНИЯ

Ток в любой схеме при воздействии на нее импульса напряжения, изображенного на рис. 10.40, а, можно найти, например, тремя способами:

1) применяя интеграл Дюамеля;

2) определяя ток при $t < t_1$ так же, как от действия постоянного напряжения U . При $t > t_1$ действующее на систему напряжение равно нулю. Следовательно, система освобождается от вынуждающих э. д. с. и по ней будут протекать свободные токи, обусловленные запасом энергии в индуктивностях и емкостях системы;

3) представляя импульс в виде двух постоянных напряжений. Положительное напряжение U действует, начиная с $t = 0$; отрицательное — начиная с $t = t_1$. При $t < t_1$ токи в цепи определяются одним напряжением U ; при $t > t_1$ — обоими напряжениями с учетом сдвига второго напряжения на время t_1 .

Рассмотрим третий способ. Положим, что требуется найти ток в цепи при подключении ее к напряжению, имеющему форму равнобедренного треугольника (рис. 10.40, б). Задача решается в три приема.

Сначала определяем ток в интервале времени от $t = 0$ до $t \leq t_1$ от действия напряжения $u_1 = kt$ (рис. 10.40, в). Затем для интервала времени $t_2 \geq t \geq t_1$ находим ток в цепи от действия двух напряжений (рис. 10.40, в и г): от продолжающего действовать напряжения $u_1 = kt$ и от вступающего в действие при $t = t_1$ дополнительного напряжения $u_2 = -2k(t - t_1)$.

Для интервала времени $t > t_2$ ток определяется действием трех напряжений; продолжающих действовать напряжений u_1 и u_2 и вновь вступающего в действие при $t = t_2$ напряже-

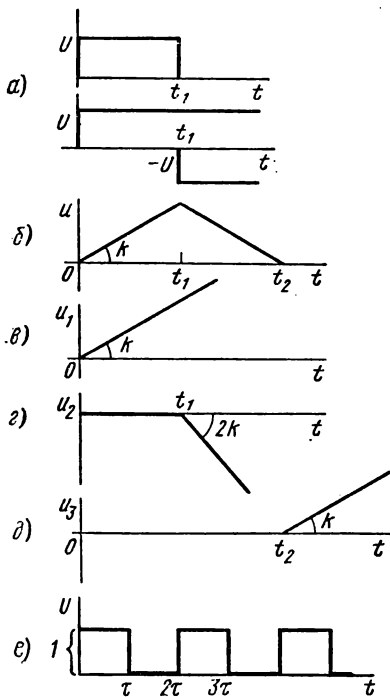


Рис. 10.40

ния $u_3 = k(t - t_2)$ (при $t \geq t_2$ сумма напряжений u_1 , u_2 и u_3 — рис. 10.40, д — даст нуль).

Из трех перечисленных способов обычно наиболее экономным является первый.

При воздействии серией импульсов переходный процесс рассчитывают часто операторным методом.

Пример 141. На последовательно соединенные R и L поступает серия прямоугольных импульсов напряжения единичной амплитуды; длительность импульса τ и длительность паузы также τ (рис. 10.40, е). Используя третий способ в сочетании с теоремой запаздывания (см. § 10.60), находим изображение напряжения:

$$u(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau} + \dots).$$

В скобках бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $-e^{-p\tau}$. Сумма членов ее равна $\frac{1}{1+e^{-p\tau}}$. Изображение тока

$$I(p) = \frac{1}{p(1+e^{-p\tau})(R+pL)}.$$

Применяем формулу разложения. Корни знаменателя равны:

$$p' = 0; \quad p'' = -\frac{R}{L}; \quad \tau p_k = (a_k + jb_k) \tau = j\pi(2k+1) \quad (-\infty < k < \infty).$$

Группируя член $k = 0$ с $k = -1$, член $k = 1$ с членом $k = -2$ и т. д., получим:

$$i(t) = \frac{1}{2R} - \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R\left(1+e^{\frac{R}{L}\tau}\right)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\pi(2k+1)\frac{t}{\tau} - \varphi_{2k+1}\right]}{Z_{2k+1}},$$

$$Z_{2k+1} = \sqrt{R^2 + \left[\frac{(2k+1)\pi L}{\tau}\right]^2}; \quad \varphi_{2k+1} = \arctg \frac{(2k+1)\pi L}{R\tau}.$$

§ 10.61. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ, ЕДИНИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ИХ СВОЙСТВА. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Дельта-функцией $\delta(t)$, или *единичным импульсом* (рис. 10.41, а), называют прямоугольный импульс амплитудой $\frac{1}{\Delta\tau}$ и длительностью $\Delta\tau$

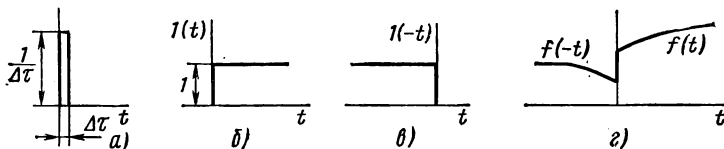


Рис. 10.41

при стремлении $\Delta\tau$ к нулю. Единичным называют потому, что площадь его равна единице:

$$\frac{1}{\Delta\tau} \Delta\tau = 1.$$

Размерность $\delta(t)$ равна сек^{-1} .

Единичной функцией $1(t)$ (рис. 10.41, б) называют функцию, равную единице при $t > 0$ и равную нулю при $t < 0$. Единичная функция $1(-t)$ (рис. 10.41, в) равна нулю при $t > 0$ и единице при $t < 0$. Функции $1(t)$ и $1(-t)$ имеют нулевую размерность. Свойства $\delta(t)$: 1) из определения ее следует, что

$$\int_0^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

2) производная функции $1(t)$ равна δ -функции, т. е.

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t);$$

3) δ -функция обладает фильтрующим действием, т. е.

$$f(t) \delta(t - t_1) = f(t_1) \delta(t - t_1);$$

4) изображение по Лапласу δ -функции равно 1, т. е.

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

Единичные функции $1(t)$ и $1(-t)$ также обладают фильтрующим действием. Умножение произвольной функции $f(t)$ на $1(t)$ обращает произведение $f(t) 1(t)$ в нуль при $t < 0$. Аналогично,

$$f(t) 1(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ f(t) & t < 0. \end{cases}$$

Импульсное (игольчатое) напряжение или ток в виде δ -функции записывают так: $\delta(t) \cdot 1$. Здесь единица имеет размерность *в · сек* или *а · сек* соответственно.

В соответствии с рис. 10.41, α δ -функцию можно представить как сумму двух прямоугольных импульсов: импульса напряжения $\frac{1}{\Delta\tau}$, вступающего в действие при $t = 0$, и импульса $-\frac{1}{\Delta\tau}$, вступающего в действие при $t = \Delta\tau$.

При $t > \Delta\tau$ и нулевых начальных условиях ток на входе цепи при воздействии на нее δ -функции $i(t) = 1 \cdot \frac{1}{\Delta\tau} [g(t) - g(t - \Delta\tau)]$.

Разложив $g(t - \Delta\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\tau$ и учитывая малость $\Delta\tau$, получим

$$i(t) = 1 \cdot \frac{1}{\Delta\tau} [g(t) - g(t) + \Delta\tau g'(t)] = 1 \cdot \frac{1}{\Delta\tau} \Delta\tau g'(t) = g'(t) \cdot 1,$$

где $g'(t)$ — импульсная переходная проводимость. Для моментов времени $t > \Delta\tau$ она численно равна току в цепи при воздействии на цепь напряжения в виде δ -функции.

Обратим внимание на то, что в двух формах записи интеграла Дюамеля [формулы (10.63а) и (10.63б)] используется импульсная переходная проводимость.

§ 10.62. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РАСЧЕТАХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обобщенными функциями (ОФ) [27, 28 и др.] называют функции времени $f\{t\}$, которые терпят разрыв, например, при $t = 0$. Значение функции при $t < 0$ обозначим $f_-(t)$, при $t > 0$ обозначим $f_+(t)$ (рис. 10.41, в). Имея в виду фильтрующее свойство единичных функций, можно записать

$$f\{t\} = f_-(t) 1(-t) + f_+(t) 1(t).$$

В общем случае $f\{t\}$ может содержать также δ -функцию и ее производные. Производная от $f\{t\}$

$$\begin{aligned}\frac{df\{t\}}{dt} &= f'_-(t) 1(-t) + f'_+(t) 1(t) + f_-(t) \frac{d \cdot 1(-t)}{d(-t)} \cdot \frac{d(-t)}{dt} + \\ &+ f_+(t) \frac{d \cdot 1(t)}{dt} = f'_-(t) 1(-t) + f'_+(t) 1(t) + \delta(t) [f_+(0) - f_-(0)].\end{aligned}$$

Используя ОФ, можно решать задачи на переходные процессы, о которых говорилось в § 10.28, а также задачи на импульсные воздействия. В этом случае необходимо, как обычно, составить уравнения для послекоммутационной схемы, выразить токи, напряжения и их производные через ОФ и, воспользовавшись фильтрующим свойством $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$, в этих уравнениях приравнять коэффициенты, содержащиеся только $1(-t)$, только $1(t)$ и только $\delta(t)$, а затем их совместно решить.

Пример 142. Решить задачу примера 123 (см. рис. 10.24). Уравнение для послекоммутационной схемы

$$R \left(C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} + C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \right) + u_{C_1} = E. \quad (a)$$

Решение. Подставим в (a):

$$\begin{aligned}u_{C_1} &= u_{C_1-}(t) 1(-t) + u_{C_1+}(t) 1(t); \quad u_{C_2} = u_{C_2-}(t) 1(-t) + u_{C_2+}(t) 1(t); \\ u'_{C_1} &= u'_{C_1-}(t) 1(-t) + u'_{C_1+}(t) 1(t) + \delta(t) [u_{C_1}(0_+) - u_{C_1}(0_-)]; \\ u'_{C_2} &= u'_{C_2-}(t) 1(-t) + u'_{C_2+}(t) 1(t) + \delta(t) [u_{C_2}(0_+) - u_{C_2}(0_-)]; \\ E &= E 1(-t) + E \cdot 1(t).\end{aligned}$$

Коэффициенты при $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$ дают три уравнения:

$$R [C_1 u'_{C_1-}(t) + C_2 u'_{C_2-}(t)] + u_{C_1-}(t) = E; \quad (б)$$

$$R [C_1 u'_{C_1+}(t) + C_2 u'_{C_2+}(t)] + u_{C_1+}(t) = E; \quad (в)$$

$$u_{C_1}(0_+) (C_1 + C_2) = C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-). \quad (г)$$

Из (б) находим $u_{C_1-}(t) = E$, из (г) $u_{C_1}(0_+) = \frac{C_1 E}{C_1 + C_2}$, далее решаем (в) классическим или операторным методом, имея в виду, что $u_{C_1+}(t) = u_{C_2+}(t)$, и получаем тот же ответ, что и в примере 123.

§ 10.63. НЕКОТОРЫЕ СХЕМЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ОСОБЫМИ СВОЙСТВАМИ

Если в схемах рис. 10.42, а и б взять $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R$, составить операторное сопротивление, то оно будет равно R . Это означает, что при таком соотношении

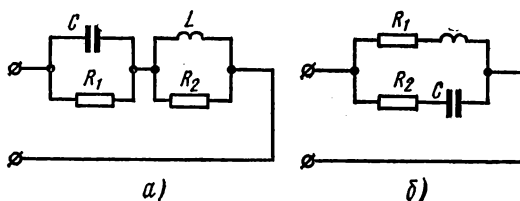


Рис. 10.42

параметров ток в неразветвленной части обеих цепей во времени будет изменяться по тому же закону, что и напряжение на входе.

Двухполюсник R_1C в схеме рис. 10.42, а дополняет двухполюсник R_2L до активного. Аналогично, двухполюсник R_1L в схеме рис. 10.42, б дополняет до активного двухполюсник R_2C .

§ 10.64. ПОНЯТИЕ О ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЯХ И О ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ

Нередко, особенно в теории автоматического регулирования, об устойчивости и характере переходного процесса судят по виду частотной характеристики системы.

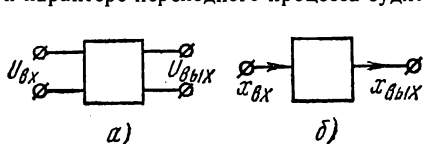


Рис. 10.43

Принято расчленять систему на отдельные элементы или звенья.

Каждое звено можно схематически представить либо в виде некоторого четырехполюсника (рис. 10.43, а), либо в однолинейном начертании (рис. 10.43, б). Входными $x_{вх}$ и выходными $x_{вых}$ величинами могут быть как электрические величины, например ток, напряжение, заряд, так и

неэлектрические величины, например координата или скорость перемещения какого-либо тела механической системы.

На рис. 10.43, а: $U_{вх}$ — входное напряжение, $U_{вых}$ — выходное напряжение.

Какова бы ни была схема внутренних соединений каждого звена, всегда можно выразить операторное изображение выходной величины $x_{вых}(p)$ через операторное изображение входной величины $x_{вх}$:

$$x_{вых}(p) = x_{вх}(p) K(p).$$

Коэффициент пропорциональности $K(p)$ между $x_{вых}(p)$ и $x_{вх}(p)$ называют *передаточной функцией звена*:

$$K(p) = \frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)}. \quad (10.64)$$

Передаточная функция зависит от схемы внутренних соединений звена и является функцией оператора p .

Пример 143. Составить выражение для передаточной функции четырехполюсника рис. 10.44, а.

Решение. Операторное изображение напряжения на выходе $U_{вых}(p)$ выразим через операторное изображение напряжения на входе $U_{вх}(p)$ следующим образом:

$$U_{вых}(p) = \frac{U_{вх}(p)}{R + \frac{1}{Cp}} R.$$

Отсюда

$$K(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{p}{p + a}, \quad a = \frac{1}{RC}.$$

С понятием передаточной функции звена тесно связано понятие о частотной характеристике звена.

Выражение для частотной характеристики получают из выражения для передаточной функции путем замены оператора p на $j\omega$, где ω — угловая частота:

$$K(j\omega) = \frac{x_{вых}(j\omega)}{x_{вх}(j\omega)}; \quad (10.65)$$

$K(j\omega)$ представляет собой комплексное число и может быть записано в алгебраической и в показательной формах:

$$K(j\omega) = U + jV = Ae^{j\varphi}; \quad A = \sqrt{U^2 + V^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{V}{U}.$$

Зависимость $U = f(\omega)$ называют *действительной (вещественной) частотной характеристикой* звена или соответственно системы; зависимость $V = f(\omega)$ — *мнимой частотной характеристикой*; $A = f(\omega)$ — *амплитудной частотной характеристикой*; $\varphi = f(\omega)$ — *фазовой частотной характеристикой*; $A = f(\lg \omega)$ — *логарифмической частотной характеристикой*. Характеристику $Ae^{j\varphi} = f(\omega)$, построенную в полярных координатах, называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой*.

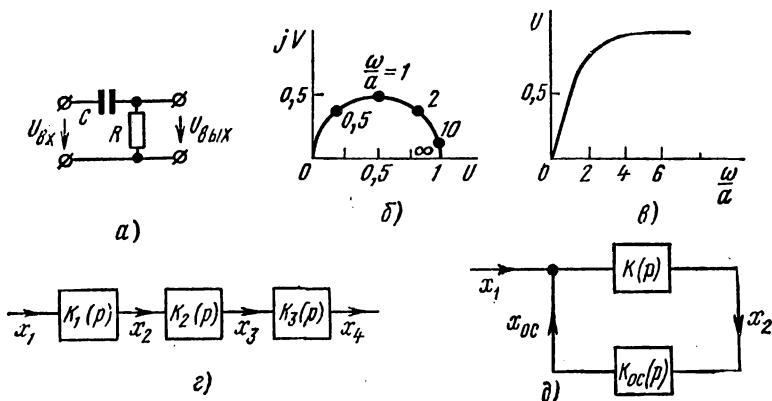


Рис. 10.44

Пример 144. Построить в координатах U, jV зависимость $K(j\omega)$ и в координатах U, ω зависимость $U = f(\omega)$ для четырехполюсника рис. 10.44, а.

Решение. В выражении $K(p) = \frac{p}{p+a}$ заменим p на $j\omega$ и получим

$$K(j\omega) = \frac{j\omega}{a+j\omega} = \frac{j\omega(a-j\omega)}{a^2+\omega^2} = \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} + j \frac{a\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Таким образом, для рассматриваемого примера

$$U = \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} \quad \text{и} \quad V = \frac{a\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Придавая ω различные значения, например $\frac{\omega}{a} = 0; 0,5; 1; 2; 10; \dots; \infty$, можно подсчитать значения U и V и построить на комплексной плоскости зависимость $K(j\omega) = f(\omega)$ в декартовой системе координат (рис. 10.44, б).

На рис. 10.44, в построена вещественная частотная характеристика $U = f(\omega)$ для четырехполюсника рис. 10.44, а.

Частотные характеристики отдельных звеньев и всей системы в целом можно определять либо расчетным путем, если известны схемы внутренних соединений звеньев и значения параметров, либо опытным путем. При опытном определении частотных характеристик поступают следующим образом.

На вход звена (или соответственно системы в целом) подают синусоидальное напряжение неизменной амплитуды и, изменяя частоту от 0 до максимально возможной (теоретически до бесконечности), определяют амплитуду и фазу выходной величины. Отношение амплитуды выходной величины к амплитуде входной величины дает значение A , а сдвиг по фазе выходной величины по отношению ко входной — значение φ .

Вернемся к вопросу о передаточных функциях. Положим, что система образована несколькими последовательно включенными звеньями, например тремя (рис. 10.44, г). Обозначим: $K_1(p)$ — передаточная функция первого звена, $K_2(p)$ — второго; $K_3(p)$ —

третьего. Тогда операторные изображения выходных величин звеньев можно выразить через операторные изображения входных величин следующим образом:

$$x_2(p) = x_1(p) K_1(p); \quad (a)$$

$$x_3(p) = x_2(p) K_2(p); \quad (б)$$

$$x_4(p) = x_3(p) K_3(p). \quad (в)$$

Для того чтобы выразить выходную величину всей системы $x_4(p)$ через входную величину $x_1(p)$, перемножим (а), (б) и (в). Получим

$$x_2(p) x_3(p) x_4(p) = x_1(p) K_1(p) x_2(p) K_2(p) x_3(p) K_3(p).$$

Отсюда

$$x_4(p) = x_1(p) K(p),$$

где

$$K(p) = K_1(p) K_2(p) K_3(p). \quad (10.66)$$

Таким образом, для получения передаточной функции нескольких последовательно включенных звеньев следует перемножить передаточные функции этих звеньев.

На рис. 10.44, д изображена замкнутая система (система с обратной связью), широко применяемая в автоматике и радиотехнике. Она состоит из основного звена с передаточной функцией $K(p)$ и звена обратной связи с передаточной функцией $K_{oc}(p)$. Роль последнего часто выполняет усилитель, работающий в режиме пропорционального усиления. В соответствии с рис. 10.44, д

$$x_{oc}(p) = K_{oc}(p) x_2(p) \quad \text{и} \quad x_2(p) = K(p) [x_1(p) + x_{oc}(p)].$$

Отсюда

$$x_2(p) = x_1(p) \frac{1}{1 \mp K(p) K_{oc}(p)}.$$

Минус в знаменателе соответствует стрелке для x_{oc} к узлу 1 (положительная обратная связь), плюс — от узла 1 — изменена полярность на выходе звена обратной связи (отрицательная обратная связь).

Если значение $K_{oc}(p)$ выбрано так, что $1 - K(p)K_{oc}(p) = 0$, в системе возникают автоколебания. При автоколебаниях выходная величина периодически изменяется во времени при отсутствии входного сигнала x_1 .

Глава одиннадцатая

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 11.1. ХАРАКТЕРИСТИКА СИНТЕЗА

Синтезом линейной электрической цепи называют определение структуры цепи и числовых значений составляющих ее элементов R , L , C по известным операторным выражениям этой цепи или по временным характеристикам при воздействии на вход импульса определенной формы. Одному и тому же операторному выражению, принятому в качестве исходного при синтезе, может соответствовать несколько различных схем разной структуры. Поэтому, после того как получено несколько решений, выбирают из них наиболее подходящее. Чаще всего критериями при окончательном выборе схемы являются стоимость, габариты и вес устройства.

Задачи синтеза ставят и решают в теории сложных фильтров, в теории корректирующих контуров в автоматике, связи, радиотехнике, а также в кибернетике при создании предсказывающих и сглаживающих устройств.

Синтез развивался главным образом по двум направлениям: 1) по известным операторным функциям [по $Z(p)$ для двухполюсников и по передаточной функции для четырехполюсников]; 2) по временным характеристикам, т. е. по известному временному отклику системы при воздействии импульса обычно прямоугольной формы.

Эти два направления взаимно дополняют и развивают друг друга. В настоящее время наибольшие результаты достигнуты на первом из упомянутых направлений.

В § 11.2—11.8 рассмотрены основные сведения о синтезе цепей по заданной операторной функции цепи (более полно об этом см., например, в [17]). Методика синтеза цепей по заданным временным функциям здесь не рассматривается (для ознакомления с ней следует обратиться, например, к [21] — [23]).

В теории автоматического регулирования распространен синтез, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик; в импульсной технике подбор параметров электронных и полупроводниковых схем, т. е. в известном смысле синтез этих схем, производят, используя спектральный метод, рассмотренный далее (см. § Ж. 4).

§ 11.2. УСЛОВИЯ, КОТОРЫМ ДОЛЖНЫ УДОВЛЕТВОРЯТЬ ВХОДНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Если представить входное сопротивление двухполюсника в виде отношения двух полиномов, расположенных по убывающим степеням оператора p ,

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (11.1)$$

то должны выполняться следующие пять условий:

1) все коэффициенты a и b в числителе и знаменателе должны быть не отрицательны (в дальнейшем будет ясно, что условие 1 вытекает из условия 3);

2) наивысшая степень полинома числителя (n) не может отличаться от наивысшей степени полинома знаменателя (m) более чем на 1. То же и в отношении минимальных степеней числителя и знаменателя;

3) если условиться значения p , при которых $Z(p) = 0$, называть нулями функции $Z(p)$, а значения p , при которых $Z(p) = \infty$, называть полюсами $Z(p)$, то нули и полюсы должны быть расположены только в левой части плоскости p ;

4) нули, расположенные на мнимой оси плоскости p , должны быть только простые, не кратные;

5) если вместо p в выражение $Z(p)$ подставить $j\omega$, то при любом значении ω должно быть

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0.$$

Поясним эти требования. Из § 10.11 известно, что свободные процессы описываются слагаемыми вида $A_k e^{p_k t}$ и обязательно должны затухать во времени; p_k — корни уравнения $Z(p) = 0$. Но затухать свободные процессы (слагаемые вида $A_k e^{p_k t}$) могут только в том случае, если действительная часть p_k отрицательна. Отсюда следует, что нули уравнения $Z(p) = 0$ должны обязательно находиться в левой части плоскости p .

Поскольку каждому планарному двухполюснику соответствует дуальный, а входная проводимость дуального двухполюсника $Y(p) = \frac{Z(p)}{k}$, где k — некоторый коэффициент, имеющий размерность ом^2 (см. § Б.1), то входное сопротивление дуального двухполюсника равно $\frac{k}{Z(p)}$. Нули дуального двухполюсника, являющиеся полюсами исходного, также должны быть расположены в левой части плоскости p .

Из курса математики известно, что если имеются два кратных корня уравнения $N(p) = 0$, то соответствующие им слагаемые в решении берутся в таком виде: $(\dot{C}_1 + \dot{C}_2 t)e^{p t}$. Если допустить, что на мнимой оси могут быть два кратных корня $p = j\beta$, то соответствующая им свободная составляющая $(\dot{C}_1 + \dot{C}_2 t)e^{j\beta t}$ нарастала бы до бесконечности, чего физически быть не может. Все коэффициенты a и b в числителе и в знаменателе $Z(p)$ должны быть положительны. Если бы это условие нарушилось, то на основании леммы, вытекающей из теоремы Гурвица (см. § И. 2), среди корней уравнения $Z(p) = 0$ появились бы корни с положительной действительной частью.

Поясним, почему степень m не может отличаться от степени n более чем на 1. Допустим, что степень m больше степени n на 2. Тогда $p \rightarrow \infty$ будет являться нулем второй кратности для $Z(p)$, а то, что происходит при $p \rightarrow \infty$, можно считать, что происходит на мнимой оси плоскости p (мнимая ось простирается в бесконечность). Но тогда на мнимой оси получается кратный корень, чего быть не может.

Проведя такое же рассуждение для дуального двухполюсника, убедимся, что степень n не может быть больше степени m более чем на 1.

Если в $Z(p)$ вместо p подставить $j\omega$, то $Z(j\omega)$ будет представлять собой комплексное сопротивление двухполюсника в установившемся синусоидальном режиме при частоте ω , а $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ — это действительная часть входного сопротивления. В том случае, когда двухполюсник содержит активные сопротивления, его $\operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$ [он потребляет активную мощность $I^2 \operatorname{Re} Z(j\omega)$]. Если же он чисто реактивный, то его $\operatorname{Re} Z(j\omega) = 0$. В общем случае для пассивного двухполюсника всегда должно быть $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$.

Пример 145. Задано несколько выражений вида $\frac{N(p)}{M(p)}$. Выяснить, могут ли они представлять входные сопротивления некоторых двухполюсников:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{5p-6}{25p^2+12p+2}; & 2) \quad & \frac{20p^2+12p+6}{12p^4+8p^3+12p^2+13p+1}; \\ 3) \quad & \frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1}; & 4) \quad & \frac{2p^2+p+1}{(p+1)(p^2+1)}. \end{aligned}$$

Решение. Первое выражение не может представлять $Z(p)$, так как один из коэффициентов в числителе отрицателен. Второе и третье выражения также не могут представлять $Z(p)$: второе потому, что максимальная степень p в знаменателе больше максимальной степени p числителя на 2, третье потому, что

$$\operatorname{Re}_{p=j\omega} \left[\frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1} \right] = \frac{(1-\omega^2)(1-2\omega^2)}{(1-\omega^2)^2(1+\omega^2)}$$

при значениях ω от 0,707 до 1 отрицательно. Четвертое выражение всем требованиям удовлетворяет и потому может представлять $Z(p)$ некоторого двухполюсника.

Кроме названных общих свойств $Z(p)$, перечислим свойства $Z(p)$ двухполюсников, состоящих только из R и C , только из R и L и только из L и C . RC - и RL -двухполюсники имеют чередующиеся простые нули и полюсы на отрицательной вещественной оси плоскости p . Для двухполюсников RC ближайшей особой точкой к началу координат является полюс, в бесконечности полюс отсутствует. Для двухполюсников типа RL ближайшей к началу координат особой точкой является нуль, при $p = 0$ полюс отсутствует. Двухполюсники типа LC имеют чередующиеся простые нули и полюсы на мнимой оси. Степени полиномов числителя и знаменателя отличаются на 1.

Существует несколько способов реализации двухполюсников по заданной $Z(p)$, удовлетворяющей перечисленным в § 11.2 условиям. Два основных способа реализации рассмотрены в § 11.3 и 11.4.

§ 11.3. РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ЛЕСТНИЧНОЙ (ЦЕПНОЙ) СХЕМОЙ

Познакомимся с понятием цепной (непрерывной) дроби. Непрерывной дробью называют дробь вида

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}}$$

Входное сопротивление или входная проводимость лестничной (цепной) схемы по типу рис. 11.1, *a*, в которой продольные сопротивления названы Z_1, Z_3, Z_5, \dots и поперечные проводимости — Y_2, Y_4, Y_6, \dots , могут быть представлены непрерывной дробью.

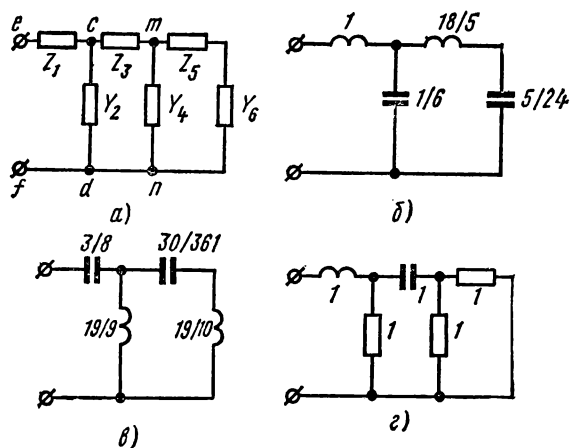


Рис. 11.1

Для того чтобы убедиться в этом, сделаем небольшие выкладки. Найдем входную проводимость правой части схемы по отношению к зажимам *mn*. Она равна $\frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}$. Суммарная проводимость правой части схемы по отношению к зажимам *mn* с учетом ветви с проводимостью Y_4 равна $Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}$. Входное сопротивление по отношению к тем же зажимам

$$\frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}.$$

Далее найдем, что входное сопротивление всей схемы равно

$$Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}. \quad (11.2)$$

Таким образом, возникает задача о переходе от выражения (11.1) к выражению (11.2), т. е. задача о последовательном упорядоченном определении элементов лестничной схемы ($Z_1, Z_3, Z_5, \dots; Y_2, Y_4, Y_6, \dots$) по выражению (11.1). С этой целью:

1) располагаем полиномы $N(p)$ и $M(p)$ либо по убывающим, либо по возрастающим степеням p ;

2) делим многочлен на многочлен, следя за тем, чтобы в процессе деления получались положительные (не отрицательные) слагаемые и чтобы они не содержали p в степени больше 1;

3) учитываем, что если в процессе деления возникнет необходимость перейти от расположения полиномов по убывающим степеням к расположению их по возрастающим степеням, то эта операция вполне допустима.

При делении полинома N на полином M будет получено частное Z_1 и остаток $\frac{O_1}{M}$, т. е.

$$Z = Z_1 + \frac{O_1}{M} = Z_1 + \frac{1}{\frac{O_1}{O_1}}.$$

При делении $\frac{M}{O_1}$ будет получено частное Y_2 и остаток $\frac{O_2}{O_1} = \frac{1}{O_2}$.

Но $\frac{O_1}{O_2} = Z_3 + \frac{O_3}{O_2} = Z_3 + \frac{1}{\frac{O_3}{O_2}}$. Поэтому $\frac{M}{O_1} = Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{\frac{O_3}{O_2}}}$.

На основании изложенного процесс последовательного определения элементов можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{r} N \\ \hline MZ_1 \left| \frac{M}{Z_1} \right. \\ \hline M \\ \hline O_1Y_2 \left| \frac{O_1}{Y_2} \right. \\ \hline O_1 \\ \hline O_1Z_3 \left| \frac{O_2}{Z_3} \right. \\ \hline O_1Z_3 \\ \hline O_2Y_4 \left| \frac{O_3}{Y_4} \right. \\ \hline O_2Y_4 \\ \hline O_3Z_5 \left| \frac{O_4}{Z_5} \right. \\ \hline O_3Z_5 \\ \hline \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Пример 146. Требуется найти параметры лестничных схем, для которых

$$Z(p) = \frac{p^4 + 9p^2 + 8}{p^3 + 3p},$$

располагая сначала при делении полиномы по убывающим степеням p , а затем (для реализации второй схемы) по возрастающим степеням. Как будет видно из дальнейшего, в процессе деления в обоих этих случаях не возникнет необходимость перехода от расположения по убывающим степеням к расположению по возрастающим степеням p .

Р е ш е н и е. Производим деление, расположив слагаемые по убывающим степеням p :

$$\begin{array}{r}
 p^4 + 9p^2 + 8 \quad \Big| \quad \frac{p^3 + 3p}{p \rightarrow Z_1} \\
 \underline{p^4 + 3p^2} \\
 p^3 + 3p \quad \Big| \quad \frac{6p^2 + 8}{\frac{1}{6} p \rightarrow Y_2} \\
 \underline{p^3 + \frac{8}{6} p} \\
 6p^2 + 8 \quad \Big| \quad \frac{10}{6} p \\
 \underline{6p^2} \\
 \frac{10}{6} p \quad \Big| \quad \frac{36}{10} p \rightarrow Z_3 \\
 \underline{\frac{10}{6} p} \\
 \frac{10}{6} p \quad \Big| \quad \frac{5}{24} p \rightarrow Y_4 \\
 \underline{\frac{10}{6} p} \\
 0.
 \end{array}$$

На рис. 11.1, б изображена схема и на ней указаны соответственно в генри и фарадах значения индуктивностей и емкостей, полученные при делении, когда слагаемые были расположены по убывающим степеням p^* .

Схема и параметры для второго случая, когда при делении слагаемые были расположены по возрастающим степеням p , даны на рис. 11.1, в.

Рассмотрим далее пример, который является иллюстрацией того, что иногда в процессе деления возникает необходимость изменять порядок расположения слагаемых.

Пример 147. Требуется реализовать лестничной схемой

$$\begin{array}{r}
 Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1} : \\
 \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^3 + 2p^2 + p} \quad \Big| \quad \frac{2p^2 + 2p + 1}{p \rightarrow Z_1} \\
 \underline{2p^2 + 2p + 1} \\
 \frac{2p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 2} \quad \Big| \quad \frac{p^2 + p + 1}{2} \\
 \underline{2p^2 + 2p + 2} \\
 -1
 \end{array}$$

Р е ш е н и е. Так как получаем отрицательные слагаемые, дальнейшее деление прекращаем и переходим к расположению по возрастающим степеням p :

$$\begin{array}{r}
 \frac{1 + 2p + 2p^2}{1 + p + p^2} \quad \Big| \quad \frac{1 + p + p^2}{1 \rightarrow Y_2} \\
 \underline{1 + p + p^2} \\
 1 + p + p^2 \quad \Big| \quad \frac{p + p^2}{\frac{1}{p} \rightarrow Z_3} \\
 \underline{1 + p} \\
 p + p^2 \quad \Big| \quad \frac{p^2}{\frac{1}{p} \rightarrow Y_4} \\
 \underline{p} \\
 p^2 \quad \Big| \quad \frac{p^2}{1 \rightarrow Z_5} \\
 \underline{p^2} \\
 0
 \end{array}$$

* Так как примеры имеют чисто иллюстративный характер, то не следует обращать внимания на то, что индуктивности и емкости в примерах достигают практически трудно осуществимых значений.

На рис. 11.1, *г* изображена соответствующая схема. На рис. 11.1, *г* проводимость Y_1 считать индуктивной.

В заключение отметим, что могут встретиться такие $Z(p)$, которые невозможно представить лестничной схемой. В этом случае применяют второй способ реализации, описанный в § 11.4. [Второй способ применяют не только в случае невозможности представления $Z(p)$ лестничной схемой.]

Если и он окажется неприменимым (например, при комплексных нулях и полюсах), то следует воспользоваться, например, методом Бруне [17].

§ 11.4. РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ПУТЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

В качестве введения ко второму способу реализации двухполюсника запишем операторные сопротивления для простейших одно- и двухэлементных двухполюсников. На рис. 11.2, *а—д* изображены простейшие двухполюсники и записаны соответствующие им операторные сопро-

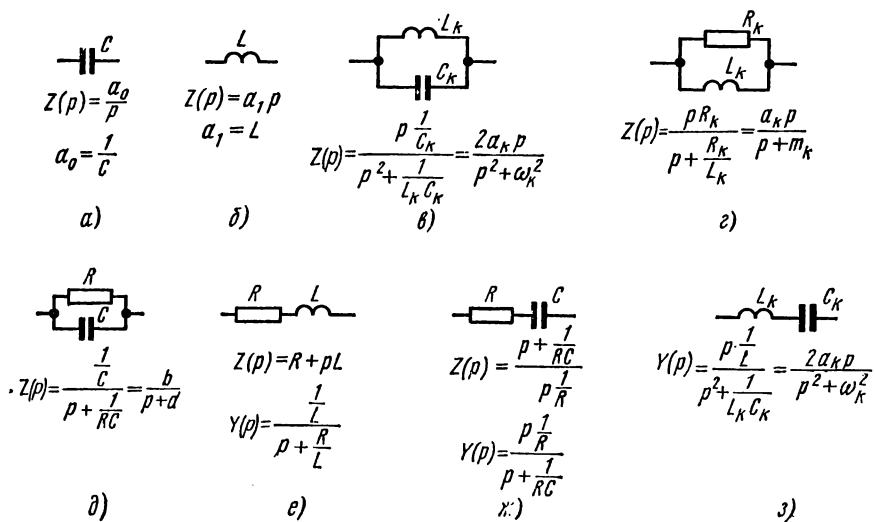


Рис. 11.2

тивления; на рис. 11.2, *е, ж* — сопротивления и проводимости и на рис. 11.2, *з* — проводимость. Для рис. 11.2, *а* емкость $C = \frac{1}{a_0}$. Для рис. 11.2, *б* индуктивность $L = a_1$. Для рис. 11.2, *в* $2a_k = \frac{1}{C_k}$ и $\omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}$. Для рис. 11.2, *г* $a_k = R_k$ и $m_k = \frac{R_k}{L_k}$. Для рис. 11.2, *д* $b = \frac{1}{C}$ и $d = \frac{1}{RC}$.

Сущность метода состоит в том, что заданное $Z(p)$ представляют в таком виде (см. схему рис. 11.3, а):

$$Z(p) = a_1 p + \frac{a_0}{p} + \sum \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Z_1(p). \quad (11.3)$$

Первому слагаемому ($a_1 p$) соответствует последовательно соединенная индуктивность a_1 , второму — последовательная емкость $\frac{1}{a_0}$. Каждому слагаемому вида $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ соответствует последовательно соединенный параллельный резонансный контур. Слагаемому $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ соответствует пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси плоскости p . Сопротивление $Z_1(p)$ уже не содержит полюсов

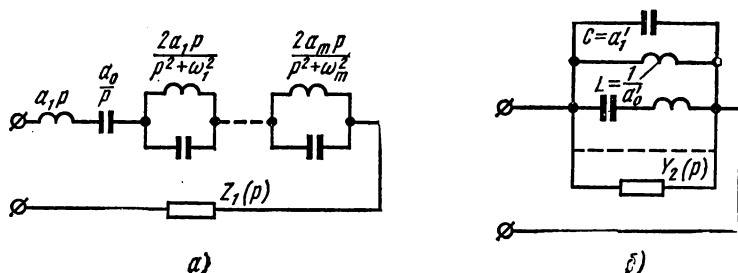


Рис. 11.3

на мнимой оси. Функцию $Z_1(p)$, среди полюсов которой нет полюсов, находящихся на мнимой оси, называют *функцией минимального реактивного сопротивления*. Возможны следующие варианты для $Z_1(p)$ *:

а) $Z_1(p) = \sum \frac{a_k p}{p + m_k}$, в этом случае его осуществляют последовательным соединением двухполюсников рис. 11.2, з;

б) $Z_1(p) = \sum \frac{b_k}{p + d_k} + b_0$; $Z_1(p)$ реализуют в виде активного сопротивления b_0 и последовательно с ним соединенных двухполюсников рис. 11.2, д;

в) $Z_1(p) = b_0$; его осуществляют в виде активного сопротивления b_0 .

a_0 определяют как интегральный вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p = 0$:

$$a_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Z(p) = \frac{N(0)}{M'(0)}.$$

Коэффициент a_k в выражении $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ определяют как интегральный вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p = j\omega_k$ (ему же будет равен вычет

* В пунктах а, б, в полагаем, что коэффициенты a_k , b_k и b_0 действительны и положительны.

функции $Z(p)$ при $p = -j\omega_k$, так как они оба действительны]:

$$a_k = \operatorname{Res}_{p=j\omega_k} Z(p) = \frac{N(j\omega_k)}{M'(j\omega_k)}.$$

После того как найдено a_k , можно определить L_k и C_k двухполюсника рис. 11.2, в:

$$C_k = \frac{1}{2a_k}; \quad L_k = \frac{1}{\omega_k^2 C_k}.$$

Реализацию двухполюсника можно осуществлять не только по его входному сопротивлению $Z(p)$, но и по его входной проводимости $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$. $Y(p)$ представляют в таком виде (рис. 11.3, б):

$$Y(p) = a'_1 p + \frac{a'_0}{p} + \sum \frac{2a'_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Y_2(p). \quad (11.4)$$

В соответствии с правой частью (11.4) двухполюсник осуществляют в виде параллельного соединения емкости a'_1 , индуктивности $\frac{1}{a'_0}$, двухполюсников по типу рис. 11.2, з [им соответствуют слагаемые вида $\frac{2a'_k p}{p^2 + \omega_k^2}$] и двухполюсника минимальной реактивной проводимости $Y_2(p)$, не содержащего полюсов на мнимой оси. Коэффициенты a'_0 и a'_1 определяют путем нахождения интегральных вычетов функции $Y(p)$ соответственно при $p = 0$ и при $p = j\omega_k$.

Если функция $Y_2(p) = \sum \frac{m}{p+n}$, то ее реализуют в виде параллельного соединения двухполюсников рис. 11.2, е. Если функция $Y_2(p) = \sum \frac{rp}{p+s}$, то ее реализуют параллельным соединением двухполюсника рис. 11.2, ж*. Следует иметь в виду, что, реализуя двухполюсник по его $Z(p)$ в виде последовательного соединения простейших двухполюсников начиная с некоторого этапа, может оказаться целесообразным перейти к проводимости и дальнейшую реализацию осуществлять уже параллельно соединенными двухполюсниками. Потребность в таком переходе может возникнуть, например, когда остающаяся для реализации часть $Z(p)$ имеет нуль при $p = 0$. Этому нулю соответствует полюс $Y(p)$ при $p = 0$, который реализуют емкостью.

Пример 148. Реализовать $Z(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}{p(p^2 + 2p + 2)}$.

Решение. Так как $Z(p)$ имеет полюс при $p = 0$, то в схеме может быть выделена последовательно включенная емкость $C = \frac{1}{a_0}$, где $a_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Z(p) = \frac{2}{2} = 1$.

$Z(p)$ не имеет полюсов, лежащих на мнимой оси. Поэтому в состав его не входят последовательно включенные двухполюсники типа

* Полагаем, что коэффициенты m и r действительны и положительны.

рис. 11.2, в. Найдем, какое $Z(p)$ осталось реализовать [назовем его $Z_3(p)$]:

$$Z_3(p) = Z(p) - \frac{a_0}{p} = \frac{p^2 + 2p}{p^2 + 2p + 2}.$$

$Z_3(p)$ имеет нуль при $p = 0$. Для реализации оставшейся части схемы перейдем к проводимости $Y_3(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{p(p+2)}$. Полюсу этой проводимости при $p = 0$ соответствует индуктивность

$$a_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Y_3(p) = 1.$$

Осталось реализовать

$$Y_2(p) = Y_3(p) - \frac{1}{p} = \frac{p^2 + p}{p(p+2)} = \frac{p}{p+2} + \frac{1}{p+2}.$$

Слагаемому $\frac{p}{p+2}$ в соответствии с рис. 11.2, ж отвечает ветвь из последовательно соединенных $R = 1 \text{ ом}$ и $C = \frac{1}{2} \phi$. В соответствии с рис. 11.2, е проводимости $\frac{1}{p+2}$ отвечает ветвь с $L = 1 \text{ гн}$ и $R = 2 \text{ ом}$. Полученная схема изображена на рис. 11.4, а.

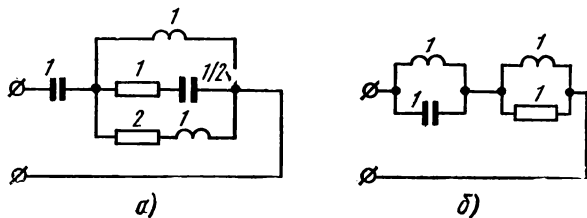


Рис. 11.4

Пример 149. Реализовать $Z(p) = \frac{p^3 + p^2 + 2p}{p^3 + p^2 + p + 1}$.

При $p = 0$ у $Z(p)$ нет полюса, поэтому последовательная емкость у искомого двухполюсника отсутствует. $Z(p)$ имеет два полюса $p_{1,2} = \pm j$, расположенных на мнимой оси. Выделим параллельный резонансный контур рис. 11.2, в, соответствующий этим полюсам:

$$a_k = \operatorname{Res}_{p=j} Z(p) = \left(\frac{p^3 + p^2 + 2p}{3p^2 + 2p + 1} \right)_{p=j} = \frac{-j - 1 + 2j}{-3 + 2j + 1} = \frac{1}{2};$$

$$C_k = \frac{1}{2a_k} = 1 \text{ ф}; \quad \omega_k = 1; \quad L_k = \frac{1}{\omega_k^2 C_k} = 1 \text{ гн}.$$

Найдем функцию минимального реактивного сопротивления:

$$Z_1(p) = Z(p) - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p+1}.$$

В соответствии с рис. 11.2, г реализуем $Z_1(p)$ в виде параллельного соединения активного сопротивления 1 ом и индуктивности 1 гн . Схема искомого двухполюсника изображена на рис. 11.4, б.

§ 11.5. ПОНЯТИЕ О МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОМ И НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОМ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАХ

Из § 10.63 известно, что передаточная функция четырехполюсника $K(p)$ равна отношению операторного изображения выходной величины к операторному изображению входной. Ее можно представить в виде отношения двух полиномов.

Полюса $K(p)$ всегда находятся в левой части плоскости p . В самом общем случае часть нулей $K(p)$ может находиться и в правой части плоскости p . В соответствии с расположением нулей передаточной функции все четырехполюсники можно подразделить на два класса: на минимально-фазовые и неминимально-фазовые.

Минимально-фазовыми (м. ф.) называют такие четырехполюсники, все нули передаточной функции которых расположены в левой части плоскости p . У неминимально-фазовых (н. ф.) четырехполюсников хотя бы часть нулей находится в правой части плоскости p .

Название объясняется тем, что при одинаковом значении модулей передаточной функции м. ф. и н. ф. четырехполюсников фаза передаточной функции м. ф. четырехполюсника меньше фазы передаточной функции н. ф. четырехполюсника. Поясним сказанное. С этой целью разложим числитель и знаменатель передаточной функции на множители:

$$K(p) = \frac{(p-p_1)(p-p_3)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)\dots(p-p_m)},$$

где p_1, p_3, \dots, p_n — нули;

p_2, p_4, \dots, p_m — полюсы передаточной функции.

И нули и полюсы в общем случае представляют собой комплексные числа.

Если исследуется работа четырехполюсника в установившемся синусоидальном процессе при изменяющейся частоте ω , то вместо p в $K(p)$ подставим $j\omega$. Каждый из биномов $p - p_k$ можно представить в показательной форме в виде $p_k'' e^{j\varphi_k}$, где p_k'' — модуль, а φ_k — аргумент комплекса $p - p_k$. Угол φ_k отсчитывается от оси $+1$ комплексной плоскости в направлении против часовой стрелки до положительного направления вектора $p - p_k$. С учетом сказанного

$$K(p) = \frac{p_1'' p_3'' \dots p_n''}{p_2'' p_4'' \dots p_m''} e^{j[(\varphi_1 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n) - (\varphi_2 + \varphi_4 + \dots + \varphi_m)]}.$$

Сравним выражения для двух передаточных функций:

$$K'(p) = \frac{p-p_1}{p-p_2} \quad \text{и} \quad K''(p) = \frac{p-p_1'}{p-p_2}.$$

Положим, что p_1 и p_1' равны по модулю и действительны. Ноль первого выражения находится в левой части плоскости p (рис. 11.5, а), а ноль второго $p_1' = -p_1$ — в правой части плоскости p (рис. 11.5, б). Пусть на вход обоих четырехполюсников воздействует синусоидальное напряжение частотой ω . Некоторой конкретной частоте на комплексной плоскости соответствует точка a на оси $+j$. образуем разности $p - p_1$ и $p - p_2$ на рис. 11.5, а и разности $p - p_1'$ и $p - p_2$ на рис. 11.5, б:

$$\frac{p-p_1}{p-p_2} = \frac{p_1''}{p_2''} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{и} \quad \frac{p-p_1'}{p-p_2} = \frac{p_1''}{p_2''} e^{j(\varphi_1' - \varphi_2)}.$$

Модули этих передаточных функций одинаковы и равны $\frac{p_1''}{p_2''}$, тогда как аргументы различны. Аргумент $\varphi_1 - \varphi_2$ первого четырехполюсника меньше аргумента

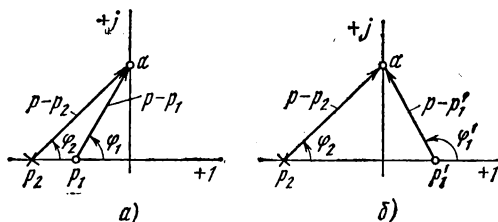


Рис. 11.5

$\Phi_1' - \Phi_2$ второго четырехполюсника. Четырехполюсник с передаточной функцией $K'(p)$ будет минимально-фазовым, а четырехполюсник с $K''(p)$ — неминимально-фазовым.

В м. ф. четырехполюснике существует однозначная зависимость между модулем и аргументом передаточной функции. В н. ф. четырехполюсниках между модулем и аргументом передаточной функции нет однозначной зависимости.

Рассмотрим далее совокупность вопросов, которые позволяют определить, можно ли физически осуществить четырехполюсник по заданной передаточной функции или по Z - или Y -параметрам.

§ 11.6. УСЛОВИЯ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И НА ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ

Перед тем как рассмотреть совокупность перечисленных вопросов, напомним основные уравнения пассивного четырехполюсника в Z - и Y -форме.

Уравнения четырехполюсника в Z -форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}; \\ \dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}. \end{cases} \quad (11.5)$$

Схемы для опытного определения Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} изображены на рис. 11.6, а и б; Z_{11} — входное сопротивление четырехполюсника по отношению к зажимам 1—1 при разомкнутых зажимах 2—2 (в § 6.2 оно обозначалось также Z_{10}); Z_{22} — входное со-

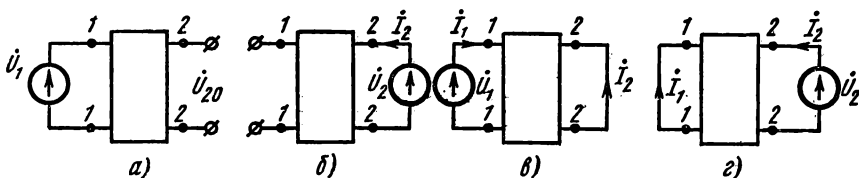


Рис. 11.6

противление по отношению к зажимам 2—2 при разомкнутых зажимах 1—1 (в § 6.2 оно было обозначено Z_{20}); Z_{12} — взаимное сопротивление между входной и выходной ветвями. Для схемы рис. 11.6, а напряжение на зажимах 2—2 $\dot{U}_{20} = \dot{I}_1 Z_{21}$ и $\dot{I}_1 =$

$= \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}}$. Следовательно, $\dot{U}_{20} = \dot{U}_1 \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$. На основании теоремы взаимности $Z_{12} = Z_{21}$.

Уравнения четырехполюсника в Y -форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{U}_1 Y_{11} + \dot{U}_2 Y_{12}; \\ \dot{I}_2 = \dot{U}_1 Y_{21} + \dot{U}_2 Y_{22}. \end{cases} \quad (11.6)$$

Схемы для опытного определения Y_{11} , Y_{22} и $Y_{12} = Y_{21}$ изображены на рис. 11.6, в и г; Y_{11} — входная проводимость четырехполюсника по отношению к зажимам 1—1 при короткозамкнутых зажимах 2—2; Y_{22} — входная проводимость по отношению к зажимам 2—2 при короткозамкнутых зажимах 1—1.

Обратим внимание на то, что положительное направление для тока \dot{I}_2 уравнений (11.5) и (11.6) выбрано противоположным положительному направлению для тока \dot{I}_2 , изображенному на рис. 6.2. Между Z - и Y -параметрами существуют соотношения:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{Y_{22}}{|Y|}; & Z_{12} &= Z_{21} = \frac{-Y_{12}^*}{|Y|}; & Z_{22} &= \frac{Y_{11}}{|Y|}; \\ |Y| &= Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 \end{aligned}$$

* Знак минус у Y_{12} объясняется выбранным на рис. 11.6 положительным направлением для тока \dot{I}_2 .

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{|Z|}; \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Z_{12}}{|Z|}; \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{|Z|}; \quad |Z| = \frac{1}{|Y|} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2.$$

Если вычеты функции Z_{11} , Z_{22} , Z_{12} в рассматриваемом полюсе обозначить соответственно K_{11} , K_{22} и K_{12} , то в любом полюсе на оси j между вычетами имеет место соотношение

$$K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \geq 0, \quad (11.7)$$

которое называют *условием вычетов*. Доказательство условия производят методами матричной алгебры, в силу громоздкости оно здесь не дано (см., например, [17]). Условие (11.7) означает, что матрица вычетов Z -параметров в полюсах является неотрицательной. Для Y -параметров условие (11.7) также имеет силу, причем под K_{11} , K_{22} и K_{12} в этом случае следует понимать соответственно вычеты в полюсах функций Y_{11} , Y_{22} и Y_{12} на оси j .

Заметим, что если в полюсе выполняется условие

$$K_{11}K_{22} - K_{12}^2 = 0,$$

то полюс называют компактным. Z - или Y -параметры, во всех полюсах которых выполняется условие компактности, называют компактными Z - или Y -параметрами.

Входные сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов 1—1 при х. х. и при к. з. со стороны зажимов 2—2, а также входные сопротивления со стороны зажимов 2—2 при х. х. и при к. з. со стороны зажимов 1—1 должны удовлетворять тем же условиям, что и входные сопротивления двухполюсников (см. § 11.2).

Кроме того, Z -параметры любого четырехполюсника на любой частоте ω ($p = j\omega$) должны удовлетворять еще так называемому *условию вещественной части* (условию Геверца):

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 \geq 0. \quad (11.8)$$

Здесь $r_{11} = \operatorname{Re} Z_{11}(j\omega)$, $r_{22} = \operatorname{Re} Z_{22}(j\omega)$ и $r_{12} = \operatorname{Re} Z_{12}(j\omega)$.

Соотношение (11.8) является следствием того, что Z -матрица пассивного четырехполюсника является положительной вещественной. Формулы (11.7) и (11.8) накладывают ограничения на величины коэффициента усиления Q синтезируемого четырехполюсника. Для Y -параметров условие вещественной части записывается так:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \geq 0. \quad (11.9)$$

Здесь $g_{11} = \operatorname{Re} Y_{11}(j\omega)$; $g_{22} = \operatorname{Re} Y_{22}(j\omega)$ и $g_{12} = \operatorname{Re} Y_{12}(j\omega)$.

В литературе по синтезу четырехполюсников используют также некоторые дополнительные понятия и теоремы (условия), до сих пор не упоминавшиеся. Познакомимся с основными из них.

Если у входной и выходной ветвей четырехполюсника без взаимной индукции нет общего зажима, то такие четырехполюсники называют *уравновешенными*. Если общий зажим имеется, то четырехполюсник называют *неуравновешенным*. С практической точки зрения неуравновешенные четырехполюсники выгоднее уравновешенных, так как содержат меньшее число элементов.

Для неуравновешенных четырехполюсников существует *условие Фиалкова и Герста*. Оно состоит в том, что:

а) коэффициенты при p в числителе и в знаменателе функции — Y_{12} , Y_{11} и Y_{22} неотрицательны;

б) коэффициенты при соответствующих степенях p в — Y_{12} не превышают коэффициентов при соответствующих степенях p в Y_{11} или Y_{22} . При этом предполагается, что общий множитель, если он имеется в числителе и в знаменателе соответствующей функции, не сокращается.

При синтезе четырехполюсника задается обычно его передаточная функция. Передаточная функция может быть задана различным образом. Так, например, она может быть задана в виде передаточной функции по напряжению, по току, при наличии и при отсутствии нагрузки на выходе четырехполюсника, с учетом и без учета входного сопротивления источника питания и т. п. Довольно часто в руководствах по синтезу цепей ее задают в виде передаточной функции по напряжению при питании со стороны зажимов 1—1 и х. х. на зажимах 2—2 (см. рис. 11.6, а). Будем ее обозна-

чать $K_{u_{x.x}}(p) = K_{u_{x.x}}$ (в литературе распространено обозначение ее T_{12}):

$$K_{u_{x.x}} = T_{12} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{12}}{Z_{11}} = -\frac{Y_{12}}{Y_{22}}.$$

Полюсы $K_{u_{x.x}}$ образуются из нулей Z_{11} , которые не являются одновременно нулями Z_{12} , и из полюсов Z_{12} , не являющихся одновременно полюсами Z_{11} .

$K_{u_{x.x}}$ можно представить в виде отношения двух полиномов по степеням p :

$$K_{u_{x.x}} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Если вынести за скобки a_n в числителе и b_m в знаменателе, то получим

$$K_{u_{x.x}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n}}{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{b_m} p + \frac{b_0}{b_m}}.$$

Величину $\frac{a_n}{b_m}$ обозначают k (или Q) и называют коэффициентом усиления четырехполюсника.

Как уже говорилось, при решении задач синтеза четырехполюсников необходимо знать свойства $K_{u_{x.x}}$ и ее составляющих Z_{12} , Z_{11} или $-Y_{12}$ и Y_{22} . Ряд этих свойств был сформулирован в настоящем параграфе. Дополним их и другими не менее важными, опуская доказательства. (Доказательства можно найти в специальных руководствах по синтезу, например в [17] и др.)

Далее в п. I перечислены важные для синтеза свойства Z_{11} , Z_{12} , Y_{11} , Y_{12} , $K_{u_{x.x}}$, которые должны быть выполнены для любого пассивного четырехполюсника. В пп. II—V рассмотрены те дополнительные свойства, которыми обладают частные виды четырехполюсников.

I. Условия, накладываемые на Z_{11} , Z_{12} , Y_{11} , Y_{12} и $K_{u_{x.x}}$ для всех пассивных четырехполюсников.

A. Должно быть удовлетворено условие вычетов и условие вещественной части.

B. Условия, которые должны выполняться в полюсах функций:

- 1) полюсы Z_{12} , Y_{12} и $K_{u_{x.x}}$ не могут находиться в правой полуплоскости;
- 2) у $K_{u_{x.x}}$ не может быть полюса в нуле и в бесконечности;
- 3) полюсы Z_{12} и Y_{12} на оси $j\omega$ простые с вещественными значениями вычетов;
- 4) полюсы $K_{u_{x.x}}$ на оси $j\omega$ простые с мнимыми вычетами.

B. Условия, которые выполняются в отношении нулей функций: нули Z_{12} , Y_{12} и $K_{u_{x.x}}$ могут быть кратными и находиться в любой точке плоскости p .

II. Передаточная функция $K_{u_{x.x}}$ неуравновешенного четырехполюсника без взаимной индуктивности обладает следующими свойствами:

1) нули ее могут находиться на комплексной плоскости всюду, кроме положительной вещественной оси;

2) при положительных вещественных p величина передаточной функции находится между 0 и 1;

3) коэффициенты числителя передаточной функции положительны (часть из них может равняться нулю) и не превышают соответствующих коэффициентов знаменателя при условии, что функцию не сокращают на общий множитель.

III. Свойства передаточной функции $K_{u_{x.x}}$ уравновешенных четырехполюсников:

1) нули передаточной функции могут находиться в любой точке комплексной плоскости, включая и положительную вещественную ось;

2) для положительных вещественных p величина передаточной функции находится в пределах -1 ; $+1$. Крайние значения можно получить только при $p = 0$, или при $p = \infty$, или в обоих этих случаях;

3) коэффициенты числителя передаточной функции могут быть отрицательными, не превышая по величине соответствующие коэффициенты знаменателя при условии, что функцию не сокращают на общий множитель.

Частным типом четырехполюсника с общим зажимом (неуравновешенного) является цепная схема.

IV. Передаточная функция цепных схем обладает дополнительным свойством — ее нули не могут находиться в правой полуплоскости.

V. В еще более частном случае — в случае цепной схемы, собранной только из активных сопротивлений и емкостей, — нули передаточной функции могут быть только на отрицательной вещественной оси.

Для цепных RC-четырёхполюсников нули и полюсы Y_{11} являются простыми, расположены на отрицательной вещественной оси и чередуются. Полюсы Y_{12} располагают также на отрицательной вещественной оси и являются простыми. Нули Y_{12} могут быть на отрицательной вещественной оси.

Перейдем к вопросу о реализации четырехполюсника по его заданной передаточной функции, полагая, что она удовлетворяет условиям физической реализуемости. Существует много различных методов реализации. В одних методах в основу положена передаточная функция при холостом ходе четырехполюсника, в других — передаточная функция четырехполюсника, нагруженного на согласованное активное сопротивление. В последнем случае принято нагрузку брать равной 1 ом и называть ее нормализованной.

Так как в действительности нагрузка обычно не равна 1 ом, то после определения вида схемы и значений параметров производят пересчет числовых значений параметров, чтобы входное сопротивление стало равным не 1 ом, а заданной величине нагрузки. Далее рассмотрены два способа реализации: первый способ (см. § 11.7) — по заданной передаточной функции при холостом ходе, удовлетворяющей условию передаточной функции RC-четырёхполюсника; второй способ (см. § 11.8) — по заданной передаточной функции при нормализованной нагрузке. (Для ознакомления с другими способами синтеза рекомендуется [17]).

§ 11.7. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ Г-ОБРАЗНЫМИ RC-СХЕМАМИ

Г-образный четырехполюсник рис. 11.7 является делителем напряжения. Его передаточная функция по напряжению при холостом ходе

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (11.10)$$

В дальнейшем вместо $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ будем писать соответственно Z_1 и Z_2 .

Положим, что с помощью Г-образного четырехполюсника, состоящего из элементов RC, требуется реализовать передаточную функцию по напряжению при холостом ходе

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{N}{M}, \quad (11.11)$$

где N и M — полиномы по степеням p . $\frac{N}{M}$ удовлетворяет условиям, которые предъявляются к передаточной функции четырехполюсников, составленных из R и C и рассмотренных в § 11.6.

Приравняем правые части (11.10) и (11.11):

$$\frac{N}{M} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (11.12)$$

Разделим числитель и знаменатель правой части (11.12) на некоторый полином $Q = Q(p)$ (не имеет ничего общего с коэффициентом усиления), выбранный таким образом, что он имеет тот же порядок, что и полиномы N и M , а корни его чередуются

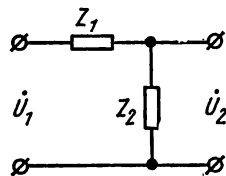


Рис. 11.7

с корнями уравнений $N = 0$ и $M = 0$. Тогда

$$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{N}{Q}}{\frac{M}{Q}}. \quad (11.13)$$

Из уравнения (11.13) находим $Z_2 = \frac{N}{Q}$ и $Z_1 = \frac{M - N}{Q}$. Далее реализуем двухполюсники Z_1 и Z_2 по найденным их операторным сопротивлениям *. Реализация двух полюсников производится в соответствии с § 11.3 и 11.4.

Аналогично производится синтез Г-образными RL -схемами.

§ 11.8. РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНЯЮЩИХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Данный метод, разработанный в [18], заключается в следующем.

1. Подлежащую реализации передаточную функцию по напряжению $K(p)$ при нагрузке четырехполюсника на нормализованную нагрузку, т. е. на активное со-

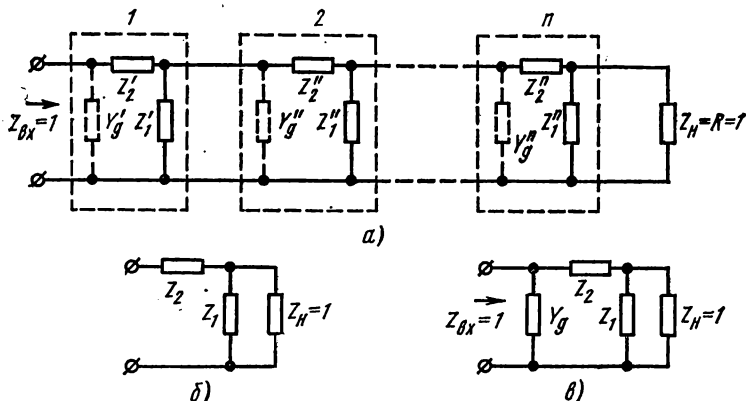


Рис. 11.8

противление $Z_H = R_H = 1$ ом, сначала представляют в виде произведения передаточных функций

$$\frac{b_1 p + c_1}{b_2 p + c_2} \quad \text{и} \quad \frac{a_1 p^2 + b_1 p + c_1}{a_2 p^2 + b_2 p + c_2}.$$

В частных случаях какие-либо из коэффициентов в этих выражениях могут равняться нулю. Выражая $K(p)$ в виде произведения множителей, необходимо следить за тем, чтобы комплексно сопряженные нули (и соответственно полюсы) не оказались разделенными и чтобы передаточная функция каждого четырехполюсника удовлетворяла условиям физической реализуемости. Таким образом,

$$K(p) = Q' \frac{(p + p_1)(p + p_3) \dots (p + p_n)}{(p + p_2)(p + p_4) \dots (p + p_m)} = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p),$$

где Q' — результирующий коэффициент усиления.

2. Искомый четырехполюсник реализуют путем каскадного соединения согласно нагруженных простейших четырехполюсников, каждый из которых собран по Г-образной схеме (рис. 11.8, а). Каждый четырехполюсник рис. 11.8, а состоит из сопротивлений Z_1 и Z_2 (число штрихов у которых соответствует номеру четырехполюсника, считая от начала) и дополняющего двухполюсника — сопротивление

* Предполагаем, что полином $Q(p)$ может быть найден и что Z_1 и Z_2 удовлетворяют условиям, перечисленным в § 11.2.

с проводимостью Y_g (изображенного пунктиром и также снабженного соответствующим количеством штрихов), который включают параллельно входным зажимам каждого четырехполюсника.

Сопротивления Z_1 и Z_2 играют роль делителя напряжения; сопротивления с проводимостью Y_g выбирают на заключительном этапе расчета каждого четырехполюсника (поэтому они на рисунке и изображены пунктиром) исходя из того, что входное сопротивление каждого четырехполюсника должно равняться 1.

3. Определение Z_1 , Z_2 и Y_g каждого четырехполюсника по известной для данного четырехполюсника $K(p)$ производят исходя из того, что при нагрузке на 1 ом его входное сопротивление должно равняться 1 ом.

Если сопротивление параллельно соединенных Z_1 и Z_n (рис. 11.8, б) обозначить $Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{Z_1 Z_n}{Z_1 + Z_n}$, то передаточная функция по напряжению данного четырехполюсника

$$K(p) = \frac{Z_0}{Z_2 + Z_0}. \quad (11.14)$$

Но передаточная функция каждого четырехполюсника в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$K(p) = Q \frac{N(p)}{M(p)}, \quad (11.15)$$

где Q — коэффициент усиления, а $N(p)$ и $M(p)$ — полиномы по степеням p ; причем в соответствии с п. 1 степень каждого полинома не выше 2. Составим выражение $\frac{1}{K(p)} - 1$, сначала воспользовавшись формулой (11.14), а затем формулой (11.15), и приравняем полученные результаты. Исходя из формулы (11.14), имеем

$$\frac{1}{K(p)} - 1 = Z_2 Y_0,$$

согласно (11.15) получим

$$\frac{1}{K(p)} - 1 = \frac{M(p)}{QN(p)} - 1 = \frac{M(p) - QN(p)}{QN(p)}.$$

Следовательно,

$$Z_2 Y_0 = \frac{M(p) - QN(p)}{QN(p)}. \quad (11.16)$$

Здесь

$$Y_0 = Y_1 + Y_n = Y_1 + 1; \quad Y_1 = \frac{1}{Z_1}.$$

Величину Y_1 выбирают произвольно и потому возможны несколько вариантов исполнения каждого четырехполюсника. Например, можно принять $Y_1 = 0$. При этом $Y_0 = 1$. Получим одно из возможных решений. Второе возможное решение получим, если примем, что Y_1 образовано индуктивностью L . В этом случае $Y_1 = \frac{1}{pL}$ и $Y_0 = 1 + \frac{1}{pL}$. Третье возможное решение $Y_1 = pC$ и $Y_0 = 1 + pC$ и т. д. После того

как Y_1 выбрано, из формулы (11.16) находят $Z_2 = \frac{M(p) - QN(p)}{QN(p) Y_0(p)}$ и используют любой из известных методов реализации двухполюсников, стремясь к тому, чтобы коэффициент усиления Q имел максимально возможное значение.

Заключительный этап расчета каждого четырехполюсника состоит в определении проводимости Y_g дополняющего двухполюсника (рис. 11.8, в) на основе того, что входное сопротивление четырехполюсника, а значит и его входная проводимость должны быть равны единице:

$$Y_g + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{1 + Y_1}} = Y_g + \frac{1 + Y_1}{1 + Z_2 + Z_2 Y_1} = 1.$$

Отсюда находят Y_g и затем реализуют дополняющий двухполюсник.

Глава двенадцатая

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 12.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной главе рассмотрены основы теории установившихся процессов в электрических и магнитных цепях, содержащих линии с распределенными параметрами.

Электрическими линиями с распределенными параметрами называют такие линии, в которых ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки (сечения) линии к другой, соседней точке.

Под *магнитными линиями с распределенными параметрами* понимают такие линии, магнитный поток и магнитное напряжение вдоль которых непрерывно меняются при переходе от одной точки линии к соседней.

Эффект непрерывного изменения тока (или потока) и электрического (магнитного) напряжения вдоль линии имеет место вследствие того, что линии обладают распределенными продольными и поперечными сопротивлениями (рис. 12.1,а).

На схеме рис. 12.1, а изображен участок линии с распределенными параметрами, через dx обозначен бесконечно малый элемент длины линии.

Сопротивления Z_1, Z_2, Z_3, \dots называют продольными сопротивлениями, в них включены сопротивления и прямого, и обратного проводов; сопротивления Z_4, Z_5, Z_6, \dots называют поперечными сопротивлениями.

В результате утечки тока через сопротивление Z_4 ток i_1 не равен току i_2 . Аналогично, ток i_3 не равен току i_2 и т. д. Напряжение между точками a и b не равно напряжению между точками c и d и т. д.

В электрических линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления образованы активными сопротивлениями проводов линии и индуктивностями двух противостоящих друг другу участков линии длиной dx . Поперечные сопротивления состоят из сопротивлений утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции между проводами линии, и емкостей, образованных противостоящими друг другу элементами (участками) линии. В магнитных линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления представляют собой магнитные сопротивления самих магнитных стержней, образующих магнитную линию, а поперечные сопротивления обусловлены утечкой магнитного потока по воздуху между противостоящими друг другу участками линии.

Линию с распределенными параметрами называют *однородной*, если равны друг другу все продольные сопротивления участков линии одинаковой длины и если равны друг другу все поперечные сопротивления

участков линии одинаковой длины. Так, участок линии рис. 12.1, а будет однородным, если $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots$ и $Z_4 = Z_5 = Z_6$.

Линию с распределенными параметрами называют *неоднородной*, если продольные сопротивления в ней различны или если поперечные сопротивления неодинаковы.

Кроме того, линии с распределенными параметрами можно подразделить на две большие группы: нелинейные и линейные. В нелинейных линиях с распределенными параметрами продольные и (или) поперечные сопротивления являются функциями протекающих по ним токов, в линейных продольные и поперечные сопротивления не являются функциями протекающих через них токов.

В качестве примера нелинейной электрической линии с распределенными параметрами можно назвать электрическую линию передачи высокого напряжения при наличии между проводами линии тихого электрического разряда — явление короны на проводах. В этом

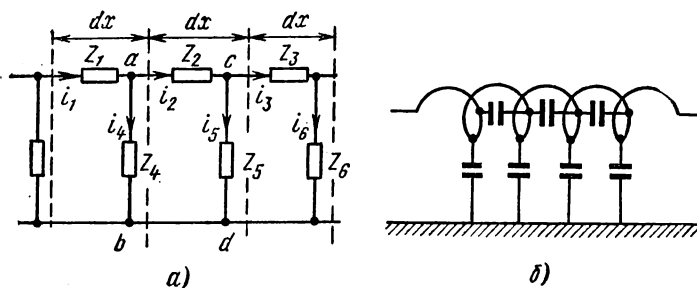


Рис. 12.1

случае емкость между противостоящими друг другу участками линии является функцией напряжения между этими участками.

В качестве примера нелинейной магнитной линии с распределенными параметрами можно назвать линию, образованную параллельно расположенными магнитными сердечниками, которые в процессе работы линии могут насыщаться.

Когда говорят о линии с распределенными параметрами, то обычно этот термин мысленно связывают с мощными линиями передачи электрической энергии на большие расстояния, с телефонными и телеграфными воздушными и кабельными линиями, с рельсовыми линиями автоблокировки на железнодорожном транспорте, с антеннами в радиотехнике и другими родственными линиями и установками.

В то же время с линиями с распределенными параметрами имеют дело и тогда, когда «линий» в буквальном смысле слова, казалось бы, вовсе нет. Так, обычная индуктивная катушка практически представляет собой линию с распределенными параметрами. Действительно, между каждым двумя соседними витками катушки, как и между каждым двумя телами, есть емкость (рис. 12.1, б). Кроме того, между каждым витком и корпусом прибора (землей) также есть емкость.

Если по катушке будет протекать переменный ток, то через межвитковые емкости и емкости на землю также потечет ток. При одном

и том же напряжении между соседними витками ток через емкости будет тем больше, чем выше частота переменного тока. При низкой частоте (десятки, сотни, тысячи герц) ток через емкости будет несоизмеримо мал по сравнению с токами через витки катушки и наличие емкостей можно не учитывать в расчете (что и делалось до сих пор) *. Если же частота тока будет очень велика, например сотни миллиардов герц, то токи через емкости могут во много раз превышать токи через витки катушки. В этом случае вся катушка в целом будет оказывать прохождению переменного тока емкостное, а не индуктивное сопротивление (количество переходит в новое качество). При промежуточных частотах порядка нескольких мегагерц (когда линейные размеры катушки соизмеримы с длиной волны) индуктивная катушка является типичной линией с распределенными параметрами. Если индуктивная катушка намотана на стальной сердечник, который способен насыщаться, и частота тока достаточно велика, то все устройство в целом представляет собой сложную совокупность из электрической и магнитной нелинейных цепей с распределенными параметрами.

В курсе ТОЭ изучают только основы однородных линейных цепей с распределенными параметрами. Вся теория излагается применительно к электрическим линиям с распределенными параметрами на переменном токе. Теория однородных линейных электрических цепей с распределенными параметрами на постоянном токе непосредственно следует из теории цепей переменного тока, если принять угловую частоту равной нулю.

Теория однородных линейных магнитных линий на постоянном токе в значительной мере аналогична теории однородных линейных электрических линий с распределенными параметрами, только вместо тока в уравнении должен быть подставлен магнитный поток, вместо электрического напряжения — магнитное напряжение, вместо продольного активного сопротивления — продольное магнитное сопротивление, вместо поперечной электрической проводимости — поперечная магнитная проводимость.

§ 12.2. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть R_0 — продольное активное сопротивление единицы длины линии, L_0 — индуктивность единицы длины линии, C_0 — емкость единицы длины линии и G_0 — поперечная проводимость единицы длины линии. Поперечная проводимость G_0 не является обратной величиной продольного сопротивления R_0 .

Разобьем линию на участки длиной dx (рис. 12.2), где x — расстояние, отсчитываемое от начала линии. На длине dx активное сопротивление равно $R_0 dx$, индуктивность — $L_0 dx$, проводимость утечки —

* В дальнейшем (см. § 13.1—13.5) при рассмотрении теории электрических фильтров, работающих при относительно низких частотах, наличие распределенных емкостей в самих индуктивных катушках также не учитывается.

$G_0 dx$ и емкость — $C_0 dx$. Обозначим ток в начале рассматриваемого участка линии через i и напряжение между проводами линии в начале участка u . И ток, и напряжение являются в общем случае функциями расстояния вдоль линии x и времени t . Поэтому в дальнейшем в уравнениях использованы частные производные от u и от i по времени t и по расстоянию x .

Если для некоторого момента времени t ток в начале рассматриваемого участка равен i , то в результате утечки через поперечный элемент ток в конце участка для того же момента времени равен $i +$

$\frac{\partial i}{\partial x} dx$, где $\frac{\partial i}{\partial x}$ — скорость изменения тока в направлении x . Скорость, умноженная на расстояние dx , является приращением тока на пути dx .

Аналогично, если напряжение в начале участка u , то в конце участка для того же момента времени напряжение равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного участком линии длиной dx , обойдя его по часовой стрелке:

$$-u + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

После упрощения и деления уравнения на dx получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i. \quad (12.1)$$

По первому закону Кирхгофа,

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx. \quad (12.2)$$

Ток di (см. рис. 12.2) равен сумме токов, проходящих через проводимость $G_0 dx$ и через емкость $C_0 dx$:

$$di = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) G_0 dx + \frac{\partial}{\partial t} C_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right).$$

Пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости, тогда

$$di = u G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (12.3)$$

Подставим (12.3) в (12.2), упростим и поделим уравнение на dx :

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (12.4)$$

Уравнения (12.1) и (12.4) являются основными дифференциальными уравнениями для линии с распределенными параметрами.

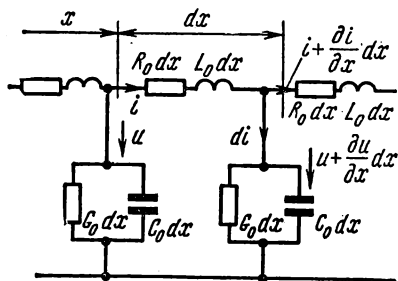


Рис. 12.2

§ 12.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Пусть напряжение и ток в линии изменяются по синусоидальному закону во времени. Воспользуемся символическим методом.

Изображение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \dot{I} e^{j\omega t},$$

где $\dot{I} = \frac{I_m e^{j\varphi_i}}{\sqrt{2}}.$

Изображение напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \dot{U} e^{j\omega t},$$

где $\dot{U} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{\sqrt{2}}.$

Комплексы \dot{U} и \dot{I} являются функциями расстояния x , но не являются функциями времени. Множитель $e^{j\omega t}$ есть функция времени t , но не зависит от x .

Представление изображений тока и напряжения в виде произведения двух множителей, из которых один является функцией только x , а другой — функцией только t , дает возможность перейти от уравнений в частных производных [уравнений (12.1) и (12.4)] к уравнениям в простых производных. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\rightarrow e^{j\omega t} \frac{d\dot{U}}{dx}; \\ L_0 \frac{\partial i}{\partial t} &\rightarrow L_0 \dot{I} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega L_0 \dot{I} e^{j\omega t}; \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &\rightarrow e^{j\omega t} \frac{d\dot{I}}{dx}; \\ C_0 \frac{\partial u}{\partial t} &\rightarrow j\omega C_0 \dot{U} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Подставим (12.5) и (12.6) в (12.1) и в (12.4) и сократим в полученных уравнениях множитель $e^{j\omega t}$. Получим:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \dot{I}; \quad (12.7)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0 \dot{U}, \quad (12.8)$$

где $Z_0 = R_0 + j\omega L_0; \quad (12.9)$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0. \quad (12.10)$$

Решим систему уравнений (12.7) и (12.8) относительно \dot{U} . С этой целью продифференцируем (12.7) по x :

$$-\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 \frac{d\dot{I}}{dx}. \quad (12.11)$$

В (12.11) вместо $\frac{dI}{dx}$ подставим правую часть уравнения (12.8), получим

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}. \quad (12.12)$$

Уравнение (12.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение его:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}. \quad (12.13)$$

Комплексные числа \dot{A}_1 и \dot{A}_2 есть постоянные интегрирования, которые в дальнейшем определим через напряжение и ток в начале линии или через напряжение и ток в конце линии.

Комплексное число

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} \quad (12.14)$$

принято называть *постоянной распространения*; его можно представить в таком виде:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (12.15)$$

здесь α — коэффициент затухания [он характеризует затухание падающей волны на единицу длины линии (на 1 км)]; β — коэффициент фазы; он характеризует изменение фазы падающей волны на единицу длины линии (на 1 км или м):

$$[\gamma] = [\alpha] = [\beta] = 1/\text{км}.$$

Ток I найдем из уравнения (12.7):

$$I = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\dot{A}_2 e^{-\gamma x} - \dot{A}_1 e^{\gamma x}}{Z_0 \gamma}. \quad (12.16)$$

Величину $\frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$, имеющую размерность сопротивления, обозначают Z_B и называют *волновым сопротивлением*:

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_B e^{j\varphi_B}, \quad (12.17)$$

где z_B — модуль, а φ_B — аргумент волнового сопротивления Z_B .

Следовательно,

$$I = \frac{\dot{A}_2}{Z_B} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_B} e^{\gamma x}. \quad (12.16')$$

§ 12.4. ПОСТОЯННАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Как уже говорилось ранее, постоянная распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (12.18)$$

Для линии постоянного тока $\omega = 0$ и потому

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0}. \quad (12.19)$$

Для линии переменного тока без потерь ($R_0 = 0$ и $G_0 = 0$)

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (12.20)$$

Составим выражения для приближенного определения β и α в линии с малыми потерями, когда $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ и $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$. С этой целью перепишем уравнение (12.18) следующим образом:

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \left(1 - j \frac{R_0}{\omega L_0}\right)^{1/2} \left(1 - j \frac{G_0}{\omega C_0}\right)^{1/2}$$

и разложим биномы в ряды, ограничившись двумя членами каждого ряда (т. е. воспользуемся соотношением $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$). Получим

$$\gamma \approx \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (12.21)$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad (12.22a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (12.22b)$$

Рассмотрим теперь выражение для волнового сопротивления. Для постоянного тока ($\omega = 0$) из (12.17) следует, что

$$Z_B = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}. \quad (12.23)$$

Для линии переменного тока без потерь ($R_0 = G_0 = 0$)

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (12.23')$$

Для линии переменного тока с малыми потерями, когда $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ и $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$,

$$Z_B \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left[1 + j \left(-\frac{R_0}{2\omega L_0} + \frac{G_0}{2\omega C_0}\right)\right]. \quad (12.24)$$

§ 12.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ ЛИНИИ ЧЕРЕЗ КОМПЛЕКСЫ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В НАЧАЛЕ ЛИНИИ

Как и раньше, через x будем обозначать расстояние от начала линии до текущей точки на ней.

Пусть в начале линии при $x = 0$ напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 . Составим уравнения для определения постоянных A_1 и A_2 через \dot{U}_1 и \dot{I}_1 . Из (12.13) и (12.16') следует (при $x = 0$):

$$\dot{U}_1 = A_2 + A_1; \quad (12.25)$$

$$\dot{I}_1 Z_B = A_2 - A_1. \quad (12.26)$$

Для определения A_1 из уравнения (12.25) вычтем уравнение (12.26):

$$A_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_B}{2} = A_1 e^{j\psi_0}, \quad (12.27)$$

где A_1 — модуль; ψ_0 — аргумент * комплекса A_1 ;

$$A_2 = \frac{\dot{U}_1 + I_1 Z_B}{2} = A_2 e^{j\psi_p}, \quad (12.28)$$

где A_2 — модуль, ψ_p — аргумент * комплекса A_2 .

Подставим (12.27) и (12.28) в (12.13):

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 - I_1 Z_B}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 + I_1 Z_B}{2} e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - I_1 Z_B \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Введем гиперболические функции. Известно, что

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \operatorname{ch} \gamma x \quad (12.29)$$

и

$$\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \operatorname{sh} \gamma x. \quad (12.30)$$

Следовательно,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - I_1 Z_B \operatorname{sh} \gamma x. \quad (12.31)$$

Аналогичные преобразования, примененные к (12.16), дают

$$I = I_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma x. \quad (12.32)$$

Формулы (12.31) и (12.32) дают возможность найти комплексы напряжения и тока в точке линии, расположенной на расстоянии x от начала линии.

Следует иметь в виду, что аргументом гиперболических функций в этих формулах является комплексное число $\gamma x = \alpha x + j\beta x$.

§ 12. 6. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СИНУСА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО КОСИНУСА ОТ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Гиперболические функции от комплексного аргумента сами являются комплексами и могут быть изображены векторами на комплексной плоскости.

Заменим γx в уравнениях (12.29) и (12.30) на $\alpha x + j\beta x$:

$$\operatorname{ch} \gamma x = \frac{1}{2} (e^{\alpha x} e^{j\beta x} + e^{-\alpha x} e^{-j\beta x});$$

$$\operatorname{sh} \gamma x = \frac{1}{2} (e^{\alpha x} e^{j\beta x} - e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}).$$

По таблицам показательных функций найдем значения $e^{\alpha x}$ и $e^{-\alpha x}$; на комплексной плоскости (рис. 12.3) отложим вектор $e^{\alpha x} e^{j\beta x}$ и век-

* Индексы «о» и «п» — начальные буквы слов «отраженная» и «падающая» (волны), см. § 12.8.

тор $e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}$. Первый из них по модулю равен $e^{\alpha x}$ и по отношению к оси действительных значений повернут на угол βx против часовой стрелки; второй по модулю — $e^{-\alpha x}$ и по отношению к оси действительных значений повернут на угол βx по часовой стрелке.

Гиперболический косинус равен полусумме этих векторов, а гиперболический синус — полуразности их.

§ 12.7. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ ЛИНИИ ЧЕРЕЗ КОМПЛЕКСЫ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В КОНЦЕ ЛИНИИ

Обозначим расстояние от текущей точки на линии до конца линии через y и длину всей линии (рис. 12.4) — через l ;

$$y = l - x. \quad (12.33)$$

Пусть будут известны напряжение и ток в конце линии \dot{U}_2 и I_2 . Подставим в (12.13) и (12.16') $x = l$, $\dot{U} = \dot{U}_2$, $I = I_2$ и составим два

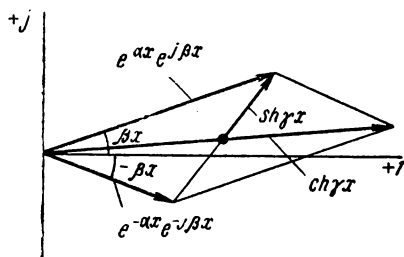


Рис. 12.3

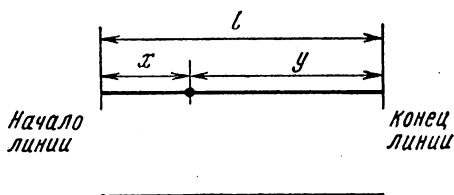


Рис. 12.4

уравнения для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 :

$$\dot{U}_2 = A_2 e^{-\gamma l} + A_1 e^{\gamma l};$$

$$I_2 Z_B = A_2 e^{-\gamma l} - A_1 e^{\gamma l}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\dot{U}_2 - I_2 Z_B}{2} e^{-\gamma l} = A_1 e^{j\psi_0}; \\ A_2 &= \frac{\dot{U}_2 + I_2 Z_B}{2} e^{\gamma l} = A_2 e^{j\psi_n}. \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

Если подставить (12.34) в (12.13) и (12.16'), заменить $l - x$ на y и перейти к гиперболическим функциям, то получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + I_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma y; \quad (12.35)$$

$$I = \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma y + I_2 \operatorname{ch} \gamma y. \quad (12.36)$$

Зная \dot{U}_2 и I_2 , с помощью формул (12.35) и (12.36) можно найти комплексы напряжения и тока в точке, находящейся на расстоянии y от конца линии.

§ 12.8. ПАДАЮЩИЕ И ОТРАЖЕННЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИИ

Подставим в формулу (12.13) $A_1 e^{j\psi_0}$ вместо A_1 , $A_2 e^{j\psi_n}$ — вместо A_2 (см. 12.34) и заменив γ на $\alpha + j\beta$, получим

$$\dot{U} = A_1 e^{\alpha x} e^{j(\psi_0 + \beta x)} + A_2 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_n - \beta x)}. \quad (12.37')$$

Аналогичную операцию сделаем с формулой (12.16'), причем в дополнение заменим Z_B на $z_B e^{j\varphi_B}$ [см. формулу (12.17)]:

$$I = -\frac{A_1}{z_B} e^{\alpha x} e^{j(\psi_0 + \beta x - \varphi_B)} + \frac{A_2}{z_B} e^{-\alpha x} e^{j(\psi_n - \beta x - \varphi_B)}. \quad (12.38')$$

Для перехода от комплексов напряжения и тока к функциям времени умножим правые части формул (12.37') и (12.38') на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от произведений возьмем мнимую часть:

$$u = A_1 \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x) + A_2 \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x); \quad (12.37)$$

$$i = -\frac{A_1}{z_B} \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_B) + \frac{A_2}{z_B} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x - \varphi_B). \quad (12.38)$$

Падающей электромагнитной волной называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от источника энергии к приемнику, т. е. в нашем случае в направлении увеличения координаты x . Электромагнитное состояние определяется совокупностью электрического и магнитного полей. Падающая волна, распространяясь от источника энергии к приемнику, несет энергию, заключенную в ее электрическом и магнитном полях.

Отраженной электромагнитной волной называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от приемника энергии к источнику энергии, т. е. в нашем случае в сторону уменьшения координаты x .

Падающая электромагнитная волна состоит из падающей волны напряжения [второе слагаемое формулы (12.37)] и падающей волны тока [второе слагаемое формулы (12.38)]. Отраженная электромагнитная волна образована отраженной волной напряжения [первое слагаемое формулы (12.37)] и отраженной волной тока [первое слагаемое формулы (12.38)].

Знак минус у отраженной волны тока свидетельствует о том, что поток энергии, который несет с собой отраженная электромагнитная волна, движется в обратном направлении по сравнению с потоком энергии, который несет с собой падающая волна.

Каждая из составляющих падающей волны (волна напряжения или волна тока) представляет собой синусоидальное колебание, ампли-

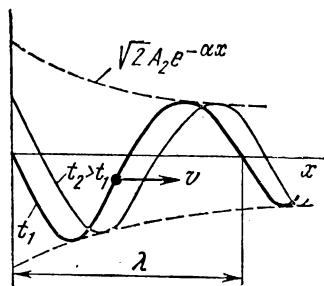


Рис. 12.5

туда которого уменьшается по мере роста x (множитель $e^{-\alpha x}$), а аргумент является функцией времени и координаты x .

Каждая из составляющих отраженной электромагнитной волны затухает по мере продвижения волны от конца линии к началу (множитель $e^{\alpha x}$). Физически эффект уменьшения амплитуд падающей и отраженной волн по мере продвижения их по линии объясняется наличием потерь в линии.

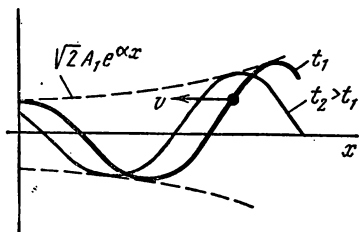


Рис. 12.6

На рис. 12.5 изображены графики распределения падающей волны напряжения вдоль линии (в функции x) для двух смежных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Падающая волна распространяется слева направо. При построении принято $\omega t_1 + \psi_n = 0$.

На рис. 12.6 представлены графики распределения отраженной волны напряжения для двух смежных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Отраженная волна распространяется справа налево.

§ 12.9. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ

Отношение напряжения отраженной волны в конце линии к напряжению падающей волны в конце линии называют *коэффициентом отражения* по напряжению и обозначают K_u . В соответствии с формулой (12.34)

$$K_u = \frac{A_1 e^{\gamma l}}{A_2 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_n - Z_B}{Z_n + Z_B}.$$

При согласованной нагрузке $K_u = 0$, при холостом ходе $K_u = 1$. Коэффициент отражения по току $K_i = -K_u$.

§ 12.10. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ

Фазовой скоростью v_ϕ называют скорость, с которой надо перемещаться вдоль линии, чтобы наблюдать одну и ту же фазу колебания, или иначе: фазовая скорость — это скорость перемещения по линии неизменного фазового состояния. Если фаза падающей волны напряжения неизменна, то в соответствии с формулой (12.37)

$$\omega t + \psi_n - \beta x = \text{const.}$$

Возьмем производную по времени от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{d}{dt} (\omega t + \psi_n - \beta x) = 0, \quad \text{или} \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Пример 150. Найти фазовую скорость для воздушной двухпроводной линии с малыми потерями.

Решение. Из формулы (12.22б) следует, что $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$. Поэтому

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (12.39)$$

Индуктивность единицы длины двухпроводной воздушной линии [см. формулу (4.10), ч. I]

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r},$$

где μ_0 — магнитная постоянная;

d — расстояние между осями проводов;

r — радиус каждого провода.

Емкость единицы длины воздушной двухпроводной линии [см. формулу (15.43)]

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная.

Фазовая скорость

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м} \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}}} \approx 300\,000 \text{ км/сек.}$$

§ 12.11. ДЛИНА ВОЛНЫ

Под длиной волны λ понимают расстояние, на которое распространяется волна за один период $T = 1/f$:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}. \quad (12.40)$$

Пример 151. Найти длину электромагнитной волны при $f = 50$ гц и при $f = 50 \cdot 10^6$ гц.

Решение. При $f = 50$ гц

$$\lambda = \frac{300\,000 \text{ км/сек}}{50 \text{ сек}^{-1}} = 6000 \text{ км.}$$

При $f = 50 \cdot 10^6$ гц $\lambda = 6 \text{ м.}$

§ 12.12. ЛИНИЯ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

Линия без искажений представляет собой линию, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и затухают в равной степени.

При движении электромагнитной волны по линии без искажений волна напряжения и волна тока уменьшаются по амплитуде, но формы

волн напряжения в конце и начале линии подобны; точно так же подобны формы волн тока в начале и в конце линии.

Неискажающие линии находят применение в телефонии. При телефонном разговоре по таким линиям не искажается тембр голоса, т. е. не искажается спектральный состав голоса.

Для того чтобы линия была неискажающей, коэффициент затухания α и фазовая скорость v_ϕ не должны зависеть от частоты; α и v_ϕ не будут зависеть от частоты, если между параметрами линии имеет место следующее соотношение:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (12.41)$$

Для сокращения записи обозначим:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = k.$$

По определению,

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0}.$$

Но

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0 (k + j\omega);$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0 (k + j\omega)$$

и

$$\gamma = (k + j\omega) \sqrt{L_0 C_0}.$$

Следовательно,

$$\alpha = k \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0}; \quad (12.42)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

и

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (12.43)$$

Из формул (12.42) и (12.43) следует, что коэффициент затухания α и фазовая скорость v_ϕ в линии без искажений действительно не зависят от частоты.

В линии без искажений волновое сопротивление

$$Z_n = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

является действительным числом и также не зависит от частоты.

Чтобы убедиться, что форма волны напряжения в конце линии u_2 полностью подобна форме волны напряжения в начале линии u_1 , возьмем напряжение на входе линии в виде суммы двух синусоидальных колебаний, одно из которых имеет частоту ω , а другое 2ω , и составим выражение для u_2 . Пусть

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2).$$

Так как для линии без искажения коэффициент затухания α не зависит от частоты [см. формулу (12.42)], то амплитуды обоих колебаний на расстоянии l уменьшаются в одинаковой степени и становятся равными $U_{1m}e^{-\alpha l}$ и $U_{2m}e^{-\alpha l}$.

Для линии без искажения коэффициент фазы β прямо пропорционален частоте, поэтому для частоты 2ω коэффициент β в 2 раза больше, чем для частоты ω .

Следовательно, мгновенное значение напряжения в конце линии запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_2 &= U_{1m} e^{-\alpha l} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta l) + U_{2m} e^{-\alpha l} \sin(2\omega t + \psi_2 - 2\beta l) = \\ &= U_{1m} e^{-\alpha l} \sin\left[\omega\left(t - \frac{\beta l}{\omega}\right) + \psi_1\right] + U_{2m} e^{-\alpha l} \sin\left[2\omega\left(t - \frac{2\beta l}{2\omega}\right) + \psi_2\right]. \end{aligned}$$

Вынесем $e^{-\alpha l}$ за скобку и обозначим время $t - \frac{\beta l}{\omega}$ через τ . Получим

$$u_2 = e^{-\alpha l} [U_{1m} \sin(\omega\tau + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega\tau + \psi_2)].$$

Если сопоставить последнее выражение с выражением для u_1 , то можно сделать вывод, что напряжение в конце линии имеет ту же форму, что и напряжение в начале линии. Однако оно уменьшено по амплитуде за счет затухания и смещено во времени на $\frac{\beta l}{\omega} = \frac{l}{v_\phi}$ сек — на время движения волны по линии длиной l .

§ 12.13. СОГЛАСОВАННАЯ НАГРУЗКА

Линия с распределенными параметрами, как правило, служит в качестве промежуточного звена между источником энергии и нагрузкой.

Обозначим сопротивление нагрузки через Z_2 ($Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$). Если Z_2 не равно волновому сопротивлению линии Z_v , то падающая волна частично пройдет в нагрузку, частично отразится от нее (возникает отраженная волна). Часто берут $Z_2 = Z_v$. Такую нагрузку называют *согласованной*; при ней отраженная волна отсутствует. В этом можно убедиться с помощью формулы (12.34). Действительно, отраженная волна будет отсутствовать, так как A_1 будет равно нулю:

$$A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_v) e^{-\gamma l} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{U}_2) e^{-\gamma l} = 0.$$

§ 12.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА ПРИ СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

Чтобы получить формулы для определения напряжения и тока в любой точке, удаленной от конца линии на расстояние y , в формулы (12.35) и (12.36) вместо Z_v подставим Z_2 , заменим $\dot{I}_2 Z_2$ на \dot{U}_2 и $\frac{\dot{U}_2}{Z_2}$ на \dot{I}_2 . Получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 (\operatorname{ch} \gamma y + \operatorname{sh} \gamma y) = \dot{U}_2 e^{\gamma y}; \quad (12.44)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 (\operatorname{ch} \gamma y + \operatorname{sh} \gamma y) = \dot{I}_2 e^{\gamma y}. \quad (12.45)$$

В начале линии при $y = l$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= U_2 e^{y l} = U_2 e^{j \varphi_{U_2}} e^{\alpha l} e^{j \beta l}; \\ I_1 &= I_2 e^{y l} = I_2 e^{j \varphi_{I_2}} e^{\alpha l} e^{j \beta l}, \end{aligned} \right\} \quad (12.46)$$

где U_2 — модуль, а φ_{U_2} — аргумент комплекса \dot{U}_2 ;
 I_2 — модуль, а φ_{I_2} — аргумент комплекса \dot{I}_2 .

§ 12.15. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ПРИ СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

Коэффициент полезного действия линии передачи равен отношению активной мощности в конце линии P_2 к активной мощности в начале линии P_1 :

$$P_2 = U_2 I_2 \cos (\varphi_{U_2} - \varphi_{I_2}) = U_2 I_2 \cos \varphi_{\text{в}},$$

где $\varphi_{\text{в}}$ — аргумент волнового сопротивления $Z_{\text{в}}$.

При согласованной нагрузке угол между \dot{U}_1 и \dot{I}_1 также равен $\varphi_{\text{в}}$, поэтому в соответствии с формулами (12.46)

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_{\text{в}} = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \varphi_{\text{в}}.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (12.47)$$

§ 12.16. ЕДИНИЦА ИЗМЕРЕНИЯ ЗАТУХАНИЯ

Произведение αl характеризует собой затухание падающей волны на длине линии l . Логарифмируя формулу (12.47), найдем, что при согласованной нагрузке

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (12.48)$$

Произведение αl в технике связи условились измерять в неперах (*неп*). Линия обладает затуханием в 1 *неп*, если $\frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = 1$, т. е. если $\frac{P_1}{P_2} = e^2$.

При этом

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e,$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Затухание измеряют также в белах (*б*) и децибелах (*дб*). Затухание равно одному белу, если при согласованной нагрузке полная мощность на входе S_1 в 10 раз больше полной мощности на выходе S_2 . При этом $\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{10} = 3,16$, а затухание в неперах $b_{\text{неп}} = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln 3,16 = 1,15$. Таким образом, 1 *б* = 1,15 *неп* или 1 *неп* = 0,868 *б* = 8,68 *дб*.

Обратим внимание на то, что неперы определены на основе натуральных логарифмов, а белы — на основе десятичных. Понятие затухания относится не только к линиям с распределенными параметрами, но и к четырехполюсникам (пассивным и активным).

Активные четырехполюсники усиливают, а не ослабляют входной сигнал. Усиление измеряют как отношение выходного сигнала ко входному. Единицами измерения усиления также служат непер и бел.

§ 12.17. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ НАГРУЖЕННОЙ ЛИНИИ

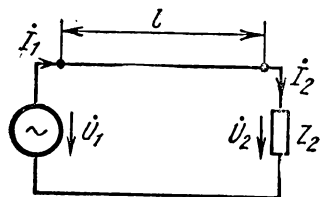


Рис. 12.7

На рис. 12.7 изображена схема, состоящая из источника напряжения \dot{U}_1 , линии с распределенными параметрами длиной l и нагрузки Z_2 . Входное сопротивление $Z_{вх}$ равно отношению \dot{U}_1 к I_1 . В формулах (12.35) и (12.36) вместо y подставим l и заменим \dot{U}_2 на $I_2 Z_2$. Получим

$$Z_{вх} = \frac{I_2 Z_2 \operatorname{ch} \gamma l + I_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma l}{I_2 \frac{Z_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l + I_2 \operatorname{ch} \gamma l},$$

или

$$Z_{вх} = \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_B \operatorname{sh} \gamma l}{\frac{Z_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l + \operatorname{ch} \gamma l}. \quad (12.49)$$

Если нагрузка согласована (т. е. $Z_2 = Z_B$), то из (12.49) следует, что входное сопротивление равно волновому:

$$Z_{вх} = \frac{Z_B (\operatorname{ch} \gamma l + \operatorname{sh} \gamma l)}{\operatorname{sh} \gamma l + \operatorname{ch} \gamma l} = Z_B.$$

§ 12.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПЯЖЕНИЯ И ТОКА В ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Строго говоря, линий без потерь не существует. Однако можно создать линию с очень малыми потерями (с очень малыми R_0 и G_0 по сравнению с ωL_0 и ωC_0 соответственно) и распространить на нее теорию линий без потерь.

Из предыдущего [см. формулу (12.20)] известно, что если

$$R_0 = G_0 = 0,$$

то

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

т. е. коэффициент затухания $\alpha = 0$, а коэффициент фазы

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

При этом волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ является чисто активным [см. формулу (12.23')] и равно $\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

Для определения напряжения \dot{U} и тока I в любой точке линии обратимся к формулам (12.35) и (12.36):

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + I_2 Z_{\text{в}} \operatorname{sh} \gamma y;$$

$$I = \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{в}}} \operatorname{sh} \gamma y + I_2 \operatorname{ch} \gamma y.$$

Учтем, что

$$\gamma y = (\alpha + j\beta) y = (0 + j\beta) y = j\beta y.$$

Гиперболический косинус от мнимого аргумента jx равен круговому косинусу от аргумента x :

$$\operatorname{ch} jx = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{1}{2} (\cos x + j \sin x + \cos x - j \sin x) = \cos x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch} \gamma y = \operatorname{ch} j\beta y = \cos \beta y.$$

Гиперболический синус от аргумента jx равен круговому синусу от аргумента x , умноженному на j :

$$\operatorname{sh} jx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} = \frac{1}{2} (\cos x + j \sin x - \cos x + j \sin x) = j \sin x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \gamma y = \operatorname{sh} j\beta y = j \sin \beta y.$$

Поэтому для линии без потерь формулы (12.35) и (12.36) перепишем следующим образом:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y + j I_2 Z_{\text{в}} \sin \beta y; \quad (12.35')$$

$$I = j \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{в}}} \sin \beta y + I_2 \cos \beta y. \quad (12.36')$$

§ 12.19. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ ХОЛОСТОМ ХОДЕ

При холостом ходе $I_2 = 0$. Поэтому

$$Z_{\text{вх}, x} = \frac{\dot{U}}{I} = \frac{\dot{U}_2 \cos \beta y}{j \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{в}}} \sin \beta y} = \frac{-j Z_{\text{в}}}{\operatorname{tg} \beta y} = \frac{-j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}{\operatorname{tg} \beta y} = jx. \quad (12.50)$$

Исследуем характер изменения $Z_{\text{вх}, x}$ при изменении расстояния y от конца линии до текущей точки на ней.

В интервале значений βy от 0 до $\pi/2$ $\operatorname{tg} \beta y$ изменяется от 0 до ∞ , поэтому $Z_{\text{вх } x, x}$ имеет емкостный характер (множитель $-j$) и по модулю изменяется от ∞ до 0 (рис. 12.8, а). На рис. 12.8, а расположение кривой выше оси абсцисс соответствует индуктивному характеру реактивного сопротивления линии x , ниже оси — емкостному. В интервале значений βy от $\pi/2$ до π $\operatorname{tg} \beta y$ отрицателен и изменяется от $-\infty$ до 0, поэтому $Z_{\text{вх } x, x}$ изменяется по модулю от 0 до ∞ и имеет индуктивный характер (множитель $+j$) и т. д.

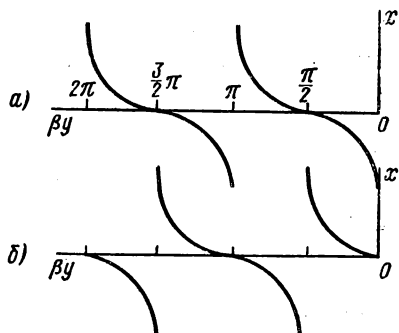


Рис. 12.8

Таким образом, изменяя длину отрезка линии без потерь, можно имитировать емкостное и индуктивное сопротивление любой величины. Практически это свойство используют при высокой частоте в различных радиотехнических устройствах.

§ 12.20. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ НА КОНЦЕ ЛИНИИ

При коротком замыкании на конце линии $U_2 = 0$ и из формул (12.35') и (12.36') следует, что входное сопротивление

$$Z_{\text{вх } k, z} = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta y = j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \operatorname{tg} \beta y, \quad (12.51)$$

где

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Будем менять длину отрезка линии y и исследуем характер изменения входного сопротивления.

В интервале значений βy от 0 до $\pi/2$ $\operatorname{tg} \beta y$ положителен и изменяется от 0 до ∞ ; следовательно, в этом интервале входное сопротивление имеет индуктивный характер и по модулю изменяется от 0 до ∞ (рис. 12.8, б).

В интервале βy от $\pi/2$ до π входное сопротивление имеет емкостный характер и изменяется по модулю от $-\infty$ до 0 (в точке $\beta y = \pi/2$ $\operatorname{tg} \beta y$ скачком изменяется от $+\infty$ до $-\infty$).

Таким образом, изменяя длину отрезка линии, короткозамкнутой на конце, также можно создавать различные по величине индуктивные и емкостные сопротивления. Отрезок короткозамкнутой на конце линии без потерь длиной в четверть длины волны теоретически имеет входное сопротивление, равное бесконечности. Это позволяет применять его при подвеске проводов в качестве изолятора.

§ 12.21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОЯЧИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В линиях без потерь при холостом ходе, при коротком замыкании, а также при чисто реактивных нагрузках возникают стоячие электромагнитные волны.

Стоячая электромагнитная волна представляет собой электромагнитную волну, полученную в результате наложения движущихся навстречу падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячей волной напряжения и стоячей волной тока. Математически стоячая волна напряжения и стоячая волна тока описываются произведением двух периодических (в нашем случае — тригонометрических) функций. Одна из них — функция координаты текущей точки на линии (в нашем случае βy), другая — функция времени (ωt). Всегда стоячая волна напряжения и стоячая волна тока сдвинуты по отношению друг к другу в пространстве и во времени.

Сдвиг во времени между стоячей волной напряжения и стоячей волной тока равен 90° . Сдвиг в пространстве между стоячей волной напряжения и стоячей волной тока равен четверти длины волны [см. формулы (12.52') и (12.53'), (12.54') и (12.55')].

Точки линии, где периодическая функция координаты проходит через нуль, называют *узлами*, а точки линии, в которых периодическая функция координаты принимает максимальные значения, — *пучностями*.

При возникновении стоячих волн электромагнитная энергия от начала к концу линии не передается. Однако на каждом отрезке линии, равном четверти длины волны, запасена некоторая электромагнитная энергия.

Эта энергия периодически переходит из одного вида (из энергии электрического поля) в другой (в энергию магнитного поля).

В моменты времени, когда ток вдоль всей линии оказывается равным нулю, а напряжение достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию электрического поля.

В моменты времени, когда напряжение вдоль всей линии равно нулю, а ток достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию магнитного поля.

§ 12.22. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ ХОЛОСТОМ ХОДЕ ЛИНИИ

Из формул (12.35') и (12.36') следует, что при холостом ходе

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y; \quad (12.52)$$

$$I = j \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta y. \quad (12.53)$$

Для перехода к функциям времени умножим правые части формул (12.52) и (12.53) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от полученных произведений возьмем мнимые части:

$$u = \sqrt{2} U_2 \cos \beta y \sin \omega t; \quad (12.52')$$

$$i = \frac{\sqrt{2} U_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta y \sin (\omega t + 90^\circ). \quad (12.53')$$

Угол 90° в аргументе у синуса в формуле (12.53') соответствует множителю j в формуле (12.53).

В точках $\beta y = k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, будут узлы тока и пучности напряжения.

График стоячих волн напряжения и тока для трех смежных моментов времени $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = \pi/2$ и $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ показан на рис. 12.9:

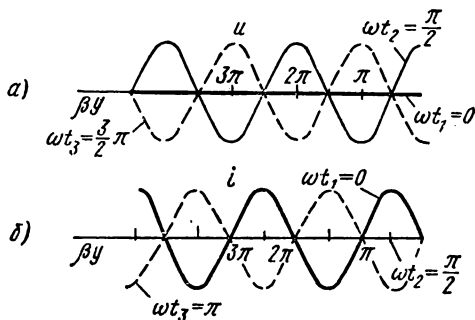


Рис. 12.9

a — напряжения, *б* — тока. Утолщенными линиями обозначена волна при $\omega t_1 = 0$, тонкими — при $\omega t_2 = \pi/2$, пунктирными — при $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ для напряжения и при $\omega t_3 = \pi$ для тока.

§ 12.23. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ НА КОНЦЕ ЛИНИИ

Из формул (12.35') и (12.36') следует, что при коротком замыкании на конце линии

$$\dot{U}_1 = jI_2 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sin \beta y; \quad (12.54)$$

$$I = I_2 \cos \beta y. \quad (12.55)$$

Для перехода к мгновенным значениям умножим правые части формул (12.54) и (12.55) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от произведений возьмем мнимые

части:

$$u = \sqrt{2} I_2 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ); \quad (12.54')$$

$$i = \sqrt{2} I_2 \cos \beta y \sin \omega t. \quad (12.55')$$

В правой части формулы (12.54') — в формуле для напряжения — есть множитель $\sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ)$, как и в формуле (12.53') для тока i .

Следовательно, картина стоячей волны напряжения при коротком замыкании на конце линии качественно повторяет картину стоячей волны тока при холостом ходе линии.

Аналогично, картина стоячей волны тока в короткозамкнутой линии качественно повторяет картину стоячей волны напряжения при холостом ходе линии.

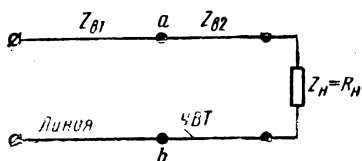


Рис. 12.10

§ 12.24. ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВЫЙ ТРАНСФОРМАТОР

Для согласования линии без потерь, имеющей волновое сопротивление Z_{B1} , с активной нагрузкой $Z_H = R_H \neq Z_{B1}$ применяют четвертьволновый трансформатор (ЧВТ). Он представляет собой отрезок линии без потерь длиной в четверть волны $\lambda/4$ с волновым сопротивлением Z_{B2} . Сопротивление Z_{B2} рассчитывают так, чтобы входное сопротивление в схеме рис. 12.10 по отношению к точкам a и b оказалось равным Z_{B1} (при этом на линии с Z_{B1} не будет отраженных волн):

$$Z_{B1} = \frac{R_H \cos 90^\circ + j Z_{B2} \sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + j \frac{R_H}{Z_{B2}} \sin 90^\circ} = \frac{Z_{B2}^2}{R_H} = Z_{B1}.$$

Отсюда $Z_{B2} = \sqrt{R_H Z_{B1}}$.

На линии с Z_{B2} есть и падающие и отраженные волны.

§ 12.25. БЕГУЩИЕ, СТОЯЧИЕ И СМЕШАННЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ БЕЗ ПОТЕРЬ. КОЭФФИЦИЕНТЫ БЕГУЩЕЙ И СТОЯЧЕЙ ВОЛН

При согласованной нагрузке на линии имеются только бегущая волна напряжения $\dot{U} = U_2 e^{j\beta y}$ и бегущая волна тока $I = I_2 e^{j\beta y}$. Так как при любом y $|e^{j\beta y}| = 1$, то для бегущей волны действующее значение напряжения и тока вдоль линии неизменно. При возникновении на линии стоячих волн действующее значение напряжения на линии изменяется в функции расстояния y пропорционально $|\cos \beta y|$ при холостом ходе [см. формулу (12.52)] или пропорционально $|\sin \beta y|$ при коротком замыкании [см. формулу (12.54)].

При несогласованной активной нагрузке на линии возникает смешанная волна — комбинация бегущей и стоячей волн. Если обо-

значить $m = Z_B/Z_B$, то

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y + j m_2 \dot{U}_2 \sin \beta y = \\ &= \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{U}_2 \sin \beta y + j \dot{U}_2 (m - 1) \sin \beta y,\end{aligned}$$

или

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta y} + j(m-1)\dot{U}_2 \sin \beta y.$$

Первое слагаемое — бегущая, второе — стоячая волна.

Распределение напряжения на линии в функции расстояния y

$$U = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}.$$

При $m > 1$ напряжение на конце линии минимально (U_{\min}), а через четверть длины волны $\beta y = \pi/2$ максимально (U_{\max}). При $m < 1$ на конце линии U_{\max} , а через $\beta y = \pi/2$ минимум.

Коэффициентом бегущей волны называют отношение минимума напряжения смешанной волны к ее максимуму:

$$K_{бв} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}.$$

Коэффициент стоячей волны

$$K_{св} = \frac{1}{K_{бв}}.$$

§ 12.26. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И УРАВНЕНИЯМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Напряжение и ток на входе линии с распределенными параметрами (\dot{U}_1, \dot{I}_1) связаны с напряжением и током в конце этой линии (\dot{U}_2, \dot{I}_2) следующими уравнениями [они получены из (12.35) и (12.36), в которые вместо y подставлена длина всей линии l]:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l.$$

Сопоставим их с известными из ч. I учебника уравнениями четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2.$$

Из сопоставления следует, что уравнения по форме полностью аналогичны, а если принять, что

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l; \quad (12.56)$$

$$B = Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \quad (12.57)$$

$$C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_B}, \quad (12.58)$$

то зависимость между \dot{U}_1 , и \dot{U}_2 , и \dot{I}_2 и зависимость между \dot{I}_1 , и \dot{U}_2 , и \dot{I}_2 в линиях с распределенными параметрами точно такие же, как и в четырехполюснике. Другими словами, при соблюдении условий (12.56) — (12.58) четырехполюсник эквивалентен линии с распределенными

параметрами в отношении связи между входными и выходными токами и напряжениями.

Если сопротивление нагрузки $Z_H = Z_c$, то у четырехполюсника, как и у линии, $Z_{вх} = Z_c$ (см. § 12.17). Входное сопротивление в этом случае повторяет Z_c и потому называется *повторным*.

§ 12.27. ЗАМЕНА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЕМУ ЛИНИЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ОБРАТНАЯ ЗАМЕНА

При перемене местами источника и нагрузки в схеме рис. 12.7 токи в источнике и нагрузке не изменятся. Таким же свойством обладает симметричный четырехполюсник. Поэтому однородная линия с распределенными параметрами может быть заменена симметричным четырехполюсником и, наоборот, симметричный четырехполюсник можно заменить участком однородной линии с распределенными параметрами. При замене будем исходить из уравнений (12.56) — (12.58) и зависимостей, с помощью которых параметры симметричного четырехполюсника связаны с коэффициентами A , B , C .

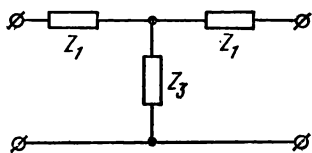


Рис. 12.11

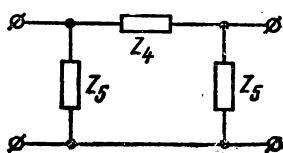


Рис. 12.12

Из ч. I учебника известны (см. § 6.4) две схемы замещения четырехполюсника: Т-схема (рис. 12.11) и П-схема (рис. 12.12).

Для симметричной Т-схемы

$$Z_1 = \frac{A-1}{C} \quad (12.59)$$

$$\text{и} \quad Z_3 = \frac{1}{C}, \quad (12.60)$$

или

$$A = D = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; \quad (12.61)$$

$$B = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_3}; \quad (12.62)$$

$$C = \frac{1}{Z_3}. \quad (12.63)$$

Для симметричной П-схемы

$$Z_4 = B; \quad (12.64)$$

$$Z_5 = \frac{B}{A-1}. \quad (12.65)$$

или

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_5}; \quad (12.66)$$

$$B = Z_4; \quad (12.67)$$

$$C = \frac{2}{Z_5} + \frac{Z_4}{Z_5^2}. \quad (12.68)$$

Рассмотрим сначала последовательность операций при замене Т- и П-схем замещения четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами (имеется в виду замена при фиксированной частоте).

Пусть известны параметры Z_1 и Z_3 в Т-схеме (или Z_4 и Z_5 в П-схеме). Требуется найти Z_v и γl для эквивалентной линии.

По формулам (12.61) — (12.63) [или соответственно (12.66) — (12.68)] находим коэффициенты A , B , C .

Для определения волнового сопротивления Z_v разделим (12.57) на (12.58) и найдем

$$Z_v = \sqrt{\frac{B}{C}}. \quad (12.69)$$

Для определения γl составим выражение для $\text{th} \gamma l$, используя (12.56), (12.57) и (12.69):

$$\text{th} \gamma l = \frac{\text{sh} \gamma l}{\text{ch} \gamma l} = \frac{\frac{B}{\sqrt{\frac{B}{C}}}}{\frac{A}{\sqrt{\frac{B}{C}}}} = \frac{\sqrt{BC}}{A}. \quad (12.70)$$

Но

$$\text{th} \gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

Умножив и числитель, и знаменатель последней формулы на $e^{\gamma l}$, получим

$$\text{th} \gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}.$$

Отсюда

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + \text{th} \gamma l}{1 - \text{th} \gamma l}. \quad (12.71)$$

Правую часть формулы (12.71) переведем в показательную форму. Пусть она будет равна $M e^{j\nu}$. Тогда

$$e^{2\alpha l} = M \quad \text{и} \quad 2\beta l = \nu.$$

Следовательно,

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln M \quad \text{и} \quad \beta l = \frac{\nu}{2}.$$

Рассмотрим теперь последовательность операций при замене линии с распределенными параметрами эквивалентным ей четырехполюсником.

Известны γ и $Z_{\text{в}}$. Требуется найти сопротивления Z_1 и Z_3 в Т-схеме (или Z_4 и Z_5 в П-схеме). С этой целью по формулам (12.56) — (12.58) находим значения коэффициентов A, B, C , а затем по формулам (12.59) и (12.60) определяем Z_1 и Z_3 для Т-схемы [или по формулам (12.64) и (12.65) сопротивления Z_4 и Z_5 для П-схемы].

Любой ли симметричный четырехполюсник можно заменить участком линии с распределенными параметрами и любую ли линию с распределенными параметрами можно заменить четырехполюсником?

Очевидно, подобную замену можно осуществить, если полученные в результате расчета параметры таковы, что заменяющее устройство физически можно выполнить. Как правило, замена участка линии с распределенными параметрами четырехполюсником всегда возможна, а обратная замена возможна не всегда. Невозможна она в тех случаях, когда в результате расчета волновое сопротивление окажется чисто мнимым числом: в реальных линиях этого не бывает.

§ 12.28. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК ЗАДАННОГО ЗАТУХАНИЯ

Включаемый между источником сигнала и нагрузкой четырехполюсник, предназначенный для ослабления амплитуды сигнала в заданное число раз, называют четырехполюсником заданного затухания (*аттенюатором*). Его собирают обычно по симметричной Т-или П-схеме и нагружают согласованно.

Положим, что требуется найти сопротивления Z_1 и Z_3 такого четырехполюсника, собранного по Т-схеме, полагая известными затухание (в неперах) и характеристическое сопротивление Z_c . Исходим из двух соотношений: $\text{ch } a = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ и $Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{2Z_1Z_3 + Z_c^2}$. Из первого находим $Z_1/Z_3 = \text{ch } a - 1$ и подставляем во второе.

Пример 151а. $a = 0,963$ непер, $Z_c = 700$ ом. Найти Z_1 и Z_3 .

Решение. $Z_1/Z_3 = \text{ch } 0,963 - 1 = 0,5$; $Z_1 = 0,5Z_3$; $Z_c = 2,25Z_1$; $Z_1 = 311$ ом; $Z_3 = 622$ ом.

§ 12.29. ЦЕПНАЯ СХЕМА

На практике приходится встречаться со схемой, представляющей собой каскадное включение нескольких одинаковых симметричных четырехполюсников (рис. 12.13).

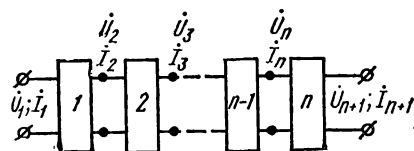


Рис. 12.13

Такую схему принято называть *цепной схемой*. Исследование распределения тока и напряжения вдоль цепной схемы удобно проводить, используя теорию линий с распределенными параметрами.

Действительно, в предыдущем параграфе говорилось о замене одного четырехполюсника отрезком линии длиной l , имеющей коэффициент распространения γ и волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$. Если число четырехполюсников равно n , то длина отрезка линии с распределенными параметрами будет в n раз больше, т. е. равна nl .

Обозначим напряжение и ток на выходе n четырехполюсника через \dot{U}_{n+1} и \dot{I}_{n+1} ; тогда напряжение и ток на входе первого четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} \gamma n l + \dot{I}_{n+1} Z_B \operatorname{sh} \gamma n l; \quad (12.72)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma n l + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} \gamma n l. \quad (12.73)$$

Напряжение и ток на входе k от начала четырехполюсника ($k \leq n$):

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} (n - k + 1) \gamma l + \dot{I}_{n+1} Z_B \operatorname{sh} (n - k + 1) \gamma l; \quad (12.74)$$

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_B} \operatorname{sh} (n - k + 1) \gamma l + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} (n - k + 1) \gamma l. \quad (12.75)$$

Рассмотрим несколько числовых примеров на материал, изложенный в § 12.1—12.28.

Пример 152. Для некоторой линии длиной 5 км на частоте 1000 гц были проведены опыты по определению ее входного сопротивления при холостом ходе и коротком замыкании на конце линии. Оказалось, что $Z_{\text{вх х. х}} = 535e^{-j64^\circ}$ ом и $Z_{\text{вх к. з}} = 467,5e^{-j10^\circ}$ ом. Требуется найти волновое сопротивление Z_B и коэффициент распространения γ этой линии на частоте 1000 гц.

Р е ш е н и е. Из формулы (12.49) следует, что при холостом ходе, когда $Z_2 = \infty$,

$$Z_{\text{вх х. х}} = \frac{Z_B}{\operatorname{th} \gamma l}.$$

При коротком замыкании, когда $Z_2 = 0$,

$$Z_{\text{вх к. з}} = Z_B \operatorname{th} \gamma l;$$

отсюда

$$Z_B = \sqrt{Z_{\text{вх х. х}} Z_{\text{вх к. з}}} = \sqrt{535e^{-j64^\circ} 467,5e^{-j10^\circ}} = 500e^{-j37^\circ} \text{ ом};$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{\text{вх к. з}}}{Z_{\text{вх х. х}}}} = 0,935e^{j27^\circ}.$$

По формуле (12.71),

$$e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + 0,935e^{j27^\circ}}{1 - 0,935e^{j27^\circ}} = 4,11e^{j81^\circ 10'} = e^{1,414} e^{j1,414};$$

$$4,11 = e^{1,414}; \quad 81^\circ 10' = 1,414 \text{ рад}; \quad 2\alpha l = 1,414;$$

$$\alpha = \frac{1,414}{2l} = 0,1414; \quad 2\beta l = 1,414; \quad \beta = 0,1414;$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,2e^{j45^\circ} \text{ км}^{-1}.$$

Пример 153. Определить R_0 , L_0 , G_0 и C_0 для линии примера 152 полагая известными $Z_B = 500e^{-j37^\circ}$ ом и $\gamma = 0,2e^{j45^\circ}$ км⁻¹.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулами (12.17) и (12.18)

$$\gamma Z_B = R_0 + j\omega L_0.$$

Следовательно,

$$R_0 + j\omega L_0 = 0,2e^{j45^\circ} \cdot 500e^{-j37^\circ} = 100e^{j8^\circ} = 99 + j13,9,$$

или

$$R_0 = 99 \text{ ом/км} \text{ и } L_0 = \frac{13,9}{2\pi \cdot 1000} = 0,00222 \text{ гн/км};$$

$$\frac{\gamma}{Z_B} = G_0 + j\omega C_0.$$

Таким образом,

$$G_0 + j\omega C_0 = \frac{0,2e^{j45^\circ}}{500e^{-j37^\circ}} = 0,0557 \cdot 10^{-3} + j0,396 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 154. Линия примера 153 подключена к постоянному напряжению ($\omega = 0$). Определить величину напряжения и величину тока в начале линии, если на конце линии включена нагрузка 400 ом и ток в нагрузке 0,5 а.

Решение. По формуле (12.23) находим волновое сопротивление линии Z_B для постоянного тока:

$$Z_B = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{99}{0,0557 \cdot 10^{-3}}} = 1330 \text{ ом}.$$

Постоянная распространения [см. формулу (12.19)]

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{99 \cdot 0,0557 \cdot 10^{-3}} = 0,0743 \text{ км}^{-1}.$$

По формулам (12.35) и (12.36), при $y = l$

$$U_1 = U_2 \operatorname{ch} \gamma l + I_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma l; \quad I_1 = I_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{U_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l.$$

По условию,

$$I_2 = 0,5 \text{ а}; \quad U_2 = I_2 R_2 = 0,5 \cdot 400 = 200 \text{ в};$$

$$\gamma l = \alpha l = 0,0743 \cdot 5 = 0,371; \quad \operatorname{ch} \alpha l = \operatorname{ch} 0,371 = 1,07;$$

$$\operatorname{sh} \alpha l = \operatorname{sh} 0,371 = 0,379.$$

Следовательно,

$$U_1 = 200 \cdot 1,07 + 0,5 \cdot 1330 \cdot 0,379 = 466 \text{ в};$$

$$I_1 = 0,5 \cdot 1,07 + \frac{200}{1330} \cdot 0,379 = 0,694 \text{ а}.$$

Таблица 12.1

Значения показательной и гиперболической функций

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2
e^x	1	1,10	1,22	1,35	1,49	1,65	1,82	2,01	2,22	2,46	2,72	3,32
$\operatorname{sh} x$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,41	0,52	0,64	0,76	0,89	1,03	1,17	1,51
$\operatorname{ch} x$	1,00	1,005	1,02	1,04	1,08	1,13	1,18	1,25	1,34	1,43	1,54	1,81

x	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5	5,5	6
e^x	4,05	4,95	6,05	7,39	12,18	20,09	33,11	54,6	90	148	244,7	400
$\operatorname{sh} x$	1,90	2,38	2,94	3,63	6,05	10,01	16,54	27,29	45,00	74,20	122,3	200
$\operatorname{ch} x$	2,15	2,58	3,10	3,76	6,13	10,07	16,57	27,30	45,01	74,21	122,3	200

Пример 155. Линия примера 152 короткозамкнута на конце и присоединена к источнику синусоидального напряжения 1000 *гц*. Определить напряжение и ток в начале линии, если ток в конце линии $\dot{I}_2 = 1$ *а*.

Решение. При коротком замыкании

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma l \text{ и } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l.$$

По данным примера 152,

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,1414 + j0,1414 \text{ км}^{-1}; \quad l = 5 \text{ км};$$

$$\gamma l = 0,707 + j0,707; \quad Z_B = 500e^{-j37^\circ} \text{ ом};$$

$$e^{\gamma l} = e^{0,707} e^{j0,707} = 2,02 (\cos 40^\circ 20' + j \sin 40^\circ 20') = 1,54 + j1,305;$$

$$e^{-\gamma l} = e^{-0,707} e^{-j0,707} = 0,495 (\cos 40^\circ 20' - j \sin 40^\circ 20') = 0,377 - j0,32;$$

$$\operatorname{ch} \gamma l = 0,5 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = 0,96 + j0,4925 = 1,07e^{j27^\circ 20'};$$

$$\operatorname{sh} \gamma l = 0,5 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0,582 + j0,812 \approx e^{j54^\circ 20'}.$$

Следовательно,

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma l = 1 \cdot 500e^{-j37^\circ} e^{j54^\circ 20'} = 500e^{j17^\circ 20'} \text{ в};$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l = 1,07e^{j27^\circ 20'} \text{ а}.$$

Пример 156. Линия примера 152 замкнута на активное сопротивление $Z_2 = 400$ *ом*. Определить \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , если по нагрузке протекает ток $\dot{I}_2 = 0,5$ *а*; $f = 1000$ *гц*.

Решение.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma l = 200 \cdot 1,07e^{j27^\circ 20'} + \\ &+ 0,5 \cdot 500e^{-j37^\circ} e^{j54^\circ 20'} = 463e^{j22^\circ} \text{ в}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma l = 0,8e^{j53^\circ 38'} \text{ а}.$$

Пример 157. По данным примера 156 определить комплекс действующего значения падающей волны в начале линии (\dot{A}_2).

Решение. В соответствии с формулой (12.28)

$$\dot{A}_2 = A_2 e^{j\Phi_n} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_B}{2};$$

$$\dot{A}_2 = \frac{463e^{j22^\circ} + 0,8e^{j53^\circ 38'} \cdot 500e^{-j37^\circ}}{2} = 431e^{j19^\circ 30'} \text{ в}.$$

Пример 158. Записать выражение для мгновенного значения падающей волны напряжения в начале и конце линии по данным примера 157.

Решение. Мгновенное значение падающей волны напряжения в начале линии при $x = 0$

$$\sqrt{2} \cdot 431 \sin (\omega t + 19^\circ 30').$$

Мгновенное значение падающей волны напряжения в конце линии при $x = l$ в общем виде

$$\sqrt{2} A_2 e^{-\alpha l} \sin(\omega t + \psi_n - \beta l);$$

отсюда

$$e^{-\alpha l} = e^{-0,707} = 0,495; \quad \beta l = 0,707 \text{ рад} = 40^\circ 20';$$

$$\sqrt{2} A_2 e^{-\alpha l} = \sqrt{2} \cdot 431 \cdot 0,495 = 301 \text{ в};$$

$$\psi_n - \beta l = 19^\circ 30' - 40^\circ 20' = -20^\circ 50'.$$

Следовательно, мгновенное значение падающей волны напряжения в конце линии $301 \sin(\omega t - 20^\circ 50')$ в.

Пример 159. Определить величину затухания в неперях для линии примера 152, если на конце ее включена согласованная нагрузка.

Решение. Затухание в неперах равно величине αl . Так как произведение αl равно $0,1414 \cdot 5 = 0,707$, то затухание линии равно $0,707$ неп.

Пример 160. Какой величины надо включить дополнительную индуктивность $L_{\text{доп}}$ на каждом километре телефонной линии с параметрами: $R_0 = 3 \text{ ом/км}$; $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км}$; $G_0 = 10^{-6} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{км}^{-1}$; $C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ ф/км}$, чтобы линия стала неискажающей?

Решение. Для того чтобы линия была неискажающей, ее параметры должны удовлетворять уравнению (12.41). Следовательно,

$$L_{0\text{доп}} + L_0 = \frac{R_0 C_0}{G_0} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ гн/км}$$

и

$$L_{0\text{доп}} = 18 - 2 = 16 \text{ мгн/км}.$$

Пример 161. Определить наименьшую длину короткозамкнутой на конце двухпроводной воздушной линии, чтобы при частоте 10^8 гц входное сопротивление ее равнялось $800j \text{ ом}$. Расстояние между осями проводов $d = 20 \text{ см}$, радиус каждого провода $r = 2 \text{ мм}$.

Решение. В соответствии с формулой (12.51)

$$Z_{\text{вх.з}} = j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \operatorname{tg} \beta y.$$

Для двухпроводной линии:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r}; \quad C_0 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}}; \quad \frac{L_0}{C_0} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \left(\frac{\ln \frac{d}{r}}{\pi} \right)^2;$$

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\ln \frac{d}{r}}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}; \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ ом};$$

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 377 \frac{\ln \frac{200}{2}}{\pi} = 553 \text{ ом}.$$

По условию, $800j = j 553 \operatorname{tg} \beta y$.

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta y = \frac{800}{553} = 1,445; \quad \beta y = 55^\circ 20' = 0,963 \text{ рад};$$

$$\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \text{ сек/см};$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{10}} = 2,092 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}.$$

Искомая длина линии

$$y = \frac{0,963}{2,092 \cdot 10^{-2}} = 46,1 \text{ см}.$$

Пример 162. В Т-схеме рис. 12.11 $Z_1 = 100 \text{ ом}$, $Z_3 = -500j \text{ ом}$. Определить характеристическое сопротивление четырехполюсника и величину γl эквивалентной ему линии с распределенными параметрами.

Решение. В соответствии с формулами (12.61) — (12.63):

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + \frac{100}{-500j} = 1 + 0,2j = 1,02e^{j11^\circ 18'};$$

$$B = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_3} = 200 + \frac{10^4}{-500j} = 200 + 20j \approx 200e^{j5^\circ 40'};$$

$$C = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{-500j} = 0,002e^{j90^\circ}.$$

По формуле (12.69),

$$Z_B = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{200e^{j5^\circ 40'}}{0,002e^{j90^\circ}}} = 316e^{-j42^\circ 10'} \text{ ом}.$$

По формуле (12.70),

$$\operatorname{tg} \gamma l = \frac{\sqrt{BC}}{A} = \frac{\sqrt{200e^{j5^\circ 40'} \cdot 0,002e^{j90^\circ}}}{1,02e^{j11^\circ 18'}} = 0,498 + j0,369.$$

По формуле (12.71),

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + \operatorname{th} \gamma l}{1 - \operatorname{th} \gamma l} = \frac{1,498 + j0,369}{0,502 - j0,369} = 2,475e^{j50^\circ 10'};$$

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln 2,475 = 0,454; \quad \beta l = 25^\circ 5' \approx 0,437 \text{ рад};$$

$$\gamma l = 0,454 + j0,437.$$

Глава тринадцатая

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

§ 13.1. НАЗНАЧЕНИЕ И ТИПЫ ФИЛЬТРОВ

Под *электрическими фильтрами* понимают четырехполюсники, включаемые между источником питания и приемником (нагрузкой), назначение которых состоит в том, чтобы беспрепятственно — без затухания — пропускать к приемнику токи одних частот и задерживать, или пропускать, но с большим затуханием, токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называют *полосой прозрачности*; диапазон частот, пропускаемых с затуханием, — *полосой затухания*.

Электрические фильтры собирают обычно из индуктивных катушек и емкостей. Исключение составляют *RC*-фильтры (см. § 13.6). Фильтры используют главным образом в радиотехнике и технике связи, применяя токи довольно высоких частот.

При высоких частотах индуктивные сопротивления ωL катушек индуктивностей во много раз больше их активных сопротивлений. Поэтому будем полагать, что активные сопротивления катушек индуктивности равны нулю, т. е. что фильтры составлены только из реактивных элементов.

Фильтры обычно собирают по симметричной *T*- или *Π*-схеме (см. рис. 12.11 и 12.12). Из предыдущего известно, что линия с распределенными параметрами может быть замещена симметричной *T*- или *Π*-схемой. Таким образом, схема фильтра та же, что и схема замещения линии с распределенными параметрами. При изучении фильтров будем пользоваться понятием о коэффициенте затухания и коэффициенте фазы.

Условимся сопротивления Z_1 в схеме рис. 12.11 и сопротивление Z_4 в схеме рис. 12.12 называть продольными сопротивлениями, а сопротивление Z_3 в схеме рис. 12.11 и сопротивления Z_5 в схеме рис. 12.12 — поперечными сопротивлениями.

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление представляет собой некоторое постоянное для данного фильтра число (число k), не зависящее от частоты, принято называть *k*-фильтрами. Фильтры, в которых это произведение зависит от частоты, называют *m*-фильтрами.

В *k*-фильтрах сопротивление присоединяемой к выходу фильтра нагрузки должно равняться характеристическому сопротивлению фильтра (согласованная нагрузка). В *m*-фильтрах нагрузка может быть несогласованной (в них характеристическое сопротивление меньше зависит от частоты, чем в *k*-фильтрах).

Качество фильтра тем выше, чем более резко выражены его фильтрующие свойства.

Фильтрующие свойства четырехполюсников физически обусловлены возникновением в них резонансных режимов — резонансов токов или резонансов напряжений.

§ 13.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ ТИПА k

Из § 6.3 известно, что если нагрузка Z_2 согласована с характеристическим сопротивлением Z_c четырехполюсника (или эквивалентной ему линии с распределенными параметрами), то напряжение \dot{U}_2 и ток в нагрузке \dot{I}_2 связаны с напряжением \dot{U}_1 и током \dot{I}_1 на входе четырехполюсника (или эквивалентной ему линии с распределенными параметрами) следующими соотношениями:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\gamma l}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-\gamma l}.$$

Обозначим

$$\gamma l = \alpha l + j\beta l = a + jb = g^*.$$

Тогда

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-a} e^{-jb}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-a} e^{-jb}.$$

Множитель e^{-a} характеризует, во сколько раз модуль напряжения (тока) на выходе фильтра меньше модуля напряжения (тока) на входе фильтра.

Если $a = 0$, то $e^{-a} = e^0 = 1$ и фильтр пропускает колебания без затухания. Таким образом, в полосе прозрачности $a = 0$.

В полосе затухания $a > 0$. Множитель e^{-jb} , по модулю равный 1, свидетельствует о том, что напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 на угол b отстают соответственно от \dot{U}_1 и \dot{I}_1 . Фильтрующие свойства четырехполюсника рассмотрим путем сравнения выражения для коэффициента A четырехполюсника с равным ему [см. формулу (12.56)] выражением гиперболического косинуса от аргумента $a + jb$:

$$A = \operatorname{ch}(a + jb).$$

Гиперболический косинус от суммы двух аргументов (с учетом того, что $\operatorname{ch} jb = \cos b$ и $\operatorname{sh} jb = j \sin b$) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b.$$

Для любого фильтра, собранного по Т-схеме [см. формулу (12.61)],

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}.$$

Для фильтра, собранного по П-схеме [см. (12.66)], $A = 1 + \frac{Z_4}{Z_5}$.

Из каких бы реактивных сопротивлений ни был собран фильтр, отношение $\frac{Z_1}{Z_3}$ в Т-схеме и отношение $\frac{Z_4}{Z_5}$ в П-схеме всегда будет действительным (не мнимым и не комплексным) числом — отношение двух мнимых чисел всегда есть число действительное.

Следовательно, всегда будет действительным и коэффициент A . Но если A действительно, то действительным должно быть и выра-

$$* \quad \operatorname{es} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = CZ_2 + A, \quad g = \ln(A + \sqrt{BC}).$$

жение равного ему $\operatorname{ch}(a + jb)$:

$$\operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b = A.$$

Выражение $\operatorname{ch}(a + jb)$ будет действительным числом, если

$$\operatorname{sh} a \sin b = 0. \quad (13.1)$$

При этом

$$\operatorname{ch} a \cos b = A. \quad (13.2)$$

Уравнения (13.1) и (13.2) используют для определения границ полосы прозрачности и характера изменения угла b в зоне прозрачности, а также характера изменения коэффициента затухания a в полосе (полосах) затухания.

Равенство (13.1) для полосы прозрачности ($a = 0$) удовлетворяется, так как $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} 0 = 0$. В силу того, что $\operatorname{ch} 0 = 1$, уравнение (13.2) для полосы прозрачности переходит в следующее:

$$\cos b = A. \quad (13.3)$$

Круговой косинус ($\cos b$) может изменяться в пределах от $+1$ до -1 . Поэтому крайние значения коэффициента A [являющегося функцией частоты — $A(\omega)$] в полосе прозрачности равны ± 1 . Полоса прозрачности в общем случае лежит в диапазоне частот от ω_1 до ω_2 . Значения ω_1 и ω_2 для фильтров НЧ и фильтров ВЧ (подробнее см. § 13.3) определяют путем решения уравнений

$$A(\omega) = \pm 1. \quad (13.4)$$

Для полосовых и заграждающих фильтров (см. § 13.3) ω_1 и ω_2 находят как корни уравнения $A(\omega) = -1$. Для них уравнение $A(\omega) = 1$ дает возможность определить так называемую резонансную частоту ω_0 , находящуюся в интервале между ω_1 и ω_2 .

Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют *частотой среза*.

Характер изменения угла b в функции от ω для зоны прозрачности определяют в соответствии с уравнением (13.3) следующим образом:

$$b = \arccos A(\omega). \quad (13.5)$$

Далее обсудим, как определить a и b для полосы затухания. В полосе затухания $a > 0$. Уравнение (13.1) удовлетворяется при условии

$$\sin b = 0, \quad (13.6)$$

т. е. при

$$b = 0 \quad (13.7)$$

и (или) при

$$b = \pm \pi. \quad (13.8)$$

Согласно уравнению (13.2), при $b = 0$

$$\operatorname{ch} a = A(\omega), \quad (13.9)$$

а при $b = \pm \pi$

$$\operatorname{ch} a = -A(\omega). \quad (13.10)$$

Уравнения (13.9) и (13.10) позволяют по значениям A как функции ω найти $\operatorname{ch} a$ в полосе затухания, а по $\operatorname{ch} a$ найти a и, таким образом, построить кривую $a = f(\omega)$. Из уравнений (13.7) и (13.8) следует, что в полосе затухания напряжение \dot{U}_2 на выходе фильтра находится либо в фазе (при $b = 0$), либо в противофазе (при $b = \pm \pi$) с напряжением \dot{U}_1 на входе фильтра.

В заключение необходимо отметить два важных положения.

1. С изменением частоты ω меняются коэффициенты B и C четырехполюсника, поэтому изменяется и характеристическое сопротивление $Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}}$.

Для того чтобы фильтр работал на согласованную нагрузку (только в этом случае справедлива изложенная ранее теория фильтров), при изменении частоты надо менять и величину сопротивления нагрузки.

2. В полосе прозрачности характеристическое сопротивление фильтра всегда активное, а в полосе затухания оно чисто реактивное (индуктивное или емкостное).

Если нагрузка фильтра не чисто активная или не согласована с характеристическим сопротивлением фильтра, или если требуется учесть влияние активного сопротивления индуктивных катушек на работу фильтра (что существенно для низких частот), то для построения зависимости $\frac{U_1}{U_2} = f(\omega)$ и зависимости угла сдвига фаз между \dot{U}_1 и \dot{U}_2 в функции от частоты можно воспользоваться, например, методом пропорциональных величин, известным из ч. I учебника.

Практически стремятся сопротивление генератора брать равным Z_c фильтра. Тогда отраженная волна, возникающая при несогласованной нагрузке, распространяясь от нагрузки через фильтр к генератору, не будет отражаться от входного сопротивления генератора.

§ 13.3. ФИЛЬТРЫ НЧ, ФИЛЬТРЫ ВЧ, ПОЛОСОВЫЕ И ЗАГРЯЖДАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ ТИПА k

Фильтрами НЧ (ФНЧ) называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь низкие частоты, начиная с $\omega_1 = 0$ до ω_2 . Полоса затухания их находится в интервале от ω_2 до ∞ .

Схемы двух ФНЧ приведены на рис. 13.1, *а* и *б*. Характер изменения коэффициента затухания a и коэффициента фазы b качественно иллюстрируют кривые рис. 13.1, *в*.

Под фильтрами ВЧ (ФВЧ) понимают фильтры, пропускающие в нагрузку лишь высокие частоты, начиная с ω_1 до ∞ . Полоса затухания их находится в интервале от 0 до ω_1 .

Схемы двух ФВЧ приведены на рис. 13.2, *а* и *б*. Характер изменения b и a для них иллюстрируется кривыми рис. 13.2, *в*.

Рассмотрим вопрос об изменении величины характеристического сопротивления Z_c в полосе прозрачности для Т-фильтра НЧ (см. рис. 13.1, *а*) и для Т-фильтра ВЧ (см. рис. 13.2, *а*).

С этой целью в равенство $Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}}$ подставим значения B и C в соответствии с формулами (12.59) — (12.63) и проанализируем полученные выражения.

Для Т-фильтра НЧ (см. рис. 13.1, а) $Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2}$. При $\omega = \omega_1 = 0$ $Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C}}$. С увеличением частоты Z_c уменьшается, но сначала мало отличается от значения $\sqrt{\frac{2L}{C}}$. При достижении значения $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ сопротивление $Z_c = 0$. Для П-фильтра (см. рис. 13.1, б) $Z_c = \left(\frac{2C}{L} - \omega^2 C^2\right)^{-1/2}$.

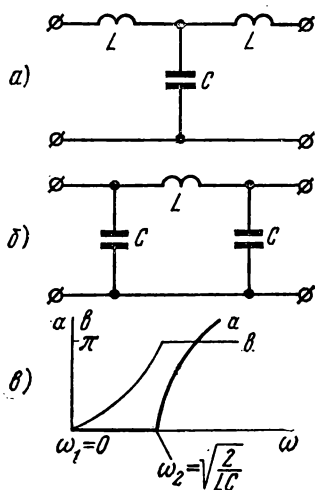


Рис. 13.1

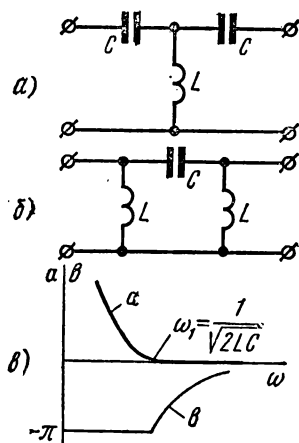


Рис. 13.2

Для Т-фильтра ВЧ (см. рис. 13.2, а) $Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}}$. Характер изменения Z_c в этом случае иной, а именно: при $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ $Z_c = 0$, затем с увеличением ω сопротивление Z_c увеличивается и при $\omega \rightarrow \infty$ Z_c становится равным $\sqrt{\frac{2L}{C}}$.

Для П-фильтра ВЧ (см. рис. 13.2, б) $Z_c = \left(\frac{2C}{L} - \frac{1}{\omega^2 L^2}\right)^{-1/2}$.

Если фильтр предназначен для работы при частотах, находящихся внутри полосы прозрачности данного фильтра и относительно далеко удаленных от значения ω , при котором $Z_c = 0$, то сопротивление нагрузки Z_n на выходе фильтров НЧ принято брать равным характеристическому сопротивлению фильтра при $\omega = \omega_1 = 0$; для Т-фильтра (см. рис. 13.1, а) оно равно $\sqrt{\frac{2L}{C}}$.

Для фильтров ВЧ нагрузку согласовывают обычно с характеристическим сопротивлением фильтра при $\omega = \infty$; для Т-фильтра (см. рис. 13.2, а) последнее также равно $\sqrt{\frac{2L}{C}}$.

В заключение отметим, что в полосе (полосах) затухания Z_c оказывается чисто мнимым.

Так как Z_c равно входному сопротивлению фильтра, то для выяснения, индуктивный или емкостный характер имеет Z_c в полосе затухания, следует определить характер входного сопротивления этого фильтра для предельного режима, а именно: для схем рис. 13.1, а и б при очень высокой частоте, а для схем рис. 13.2, а и б

при очень низкой частоте (теоретически при $\omega \rightarrow 0$), считая выходные зажимы схем замкнутыми (тот же результат будет получен, если положить их разомкнутыми). В результате найдем, что в зоне затухания:

- для Т-фильтра НЧ рис. 13.1, а Z_c индуктивное;
- для П-фильтра НЧ рис. 13.1, б Z_c емкостное;
- для Т-фильтра ВЧ рис. 13.2, а Z_c емкостное;
- для П-фильтра ВЧ рис. 13.2, б Z_c индуктивное.

Полосовые фильтры представляют собой фильтры, пропускающие в нагрузку лишь узкую полосу частот от ω_1 до ω_2 . Слева от ω_1 и справа от ω_2 находятся полосы затухания. Схема простейшего полосового k -фильтра изображена на рис.

13.3, а. Параметры ее должны удовлетворять условию $L_1 C_1 = L_2 C_2$.

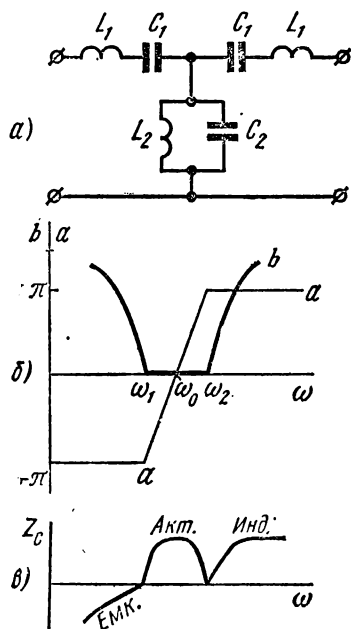


Рис. 13.3

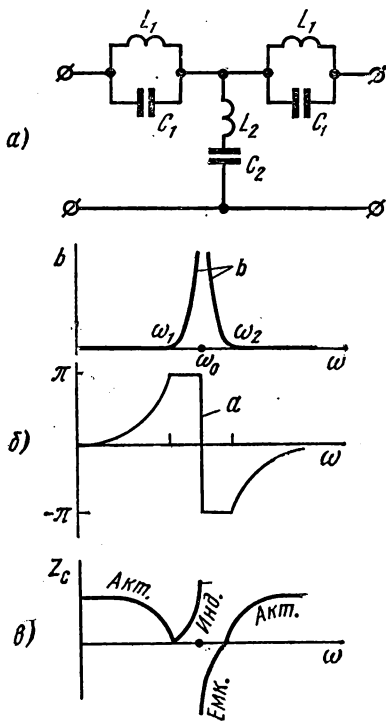


Рис. 13.4

Характер изменения α и β для полосового фильтра иллюстрируют кривые рис. 13.3, б (на рис. 13.3, б и 13.4, б α означает коэффициент фазы, β — коэффициент затухания).

Без вывода дадим формулы для определения параметров полосового фильтра рис. 13.3, а по заданным частотам f_1 и f_2 и сопротивлению нагрузки фильтра Z_c при частоте $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$:

$$\begin{aligned}
 &1) \text{ резонансная частота } f_0 = \sqrt{f_1 f_2}; \quad 2) C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_c}; \quad 3) L_1 = \\
 &= \frac{Z_c}{2\pi(f_2 - f_1)}; \quad 4) C_2 = \frac{1}{\pi Z_c(f_2 - f_1)}; \quad 5) L_2 = \frac{Z_c(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}.
 \end{aligned}$$

Под загораживающими фильтрами понимают фильтры, в которых полоса прозрачности как бы разрезана на две части полосой затухания (рис. 13.4, б). Слева от частоты ω_1 и справа от ω_2 находятся две части полосы прозрачности.

Схема простейшего загораживающего фильтра представлена на рис. 13.4, а. В ней $L_1 C_1 = L_2 C_2$.

Обозначим $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ и $k = \frac{L_1}{L_2}$ и запишем формулы для определения $\omega_{1,2}$ и Z_c у фильтров рис. 13.3, а и 13.4, а:
для рис. 13.3, а

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2k}} (\sqrt{1+2k} \mp 1); \quad Z_c = \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}} \sqrt{1 - \frac{k}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2};$$

для рис. 13.4, а

$$\omega_{1,2} = 0,25\omega_0 (\sqrt{2k+16} \mp \sqrt{2k}); \quad Z_c = \sqrt{\frac{2L_1}{C_2}} \sqrt{1 - \frac{0,5k}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}.$$

Для фильтра рис. 13.3, а в области частот от 0 до ω_1 Z_c имеет емкостный характер, а в области частот от ω_2 до ∞ — индуктивный. Для фильтра рис. 13.4, а в области частот от ω_1 до ω_0 Z_c имеет индуктивный характер, а в области от ω_0 до ω_2 — емкостный.

Характер изменения Z_c иллюстрируется кривыми рис. 13.3, в и 13.4, в.

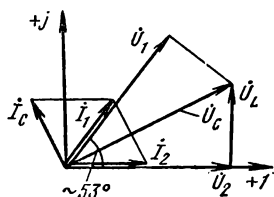


Рис. 13.5

Пример 163. В схеме рис. 13.1, а $L = 10$ мГн; $C = 10$ мкФ. Определить границы полосы прозрачности, закон изменения коэффициента b в зоне прозрачности, построить векторную диаграмму при $\omega = 2000$ рад/сек и $i_2 = 0,2$ а и определить закон изменения коэффициента a в зоне затухания.

Решение. Для Т-схемы

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + j\omega L j\omega C = 1 - \omega^2 LC.$$

Приняв $A = 1$, найдем $\omega_1 = 0$. Приняв $A = -1$, найдем $-1 = 1 - \omega^2 LC$; отсюда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}} = 4470 \text{ рад/сек.}$$

В полосе прозрачности $b = \arccos A = \arccos (1 - \omega^2 LC)$.

При частоте $\omega = 2000$ рад/сек, находящейся в полосе прозрачности,

$Z_c = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2} = 40$ ом. При нагрузке фильтра на характеристическое сопротивление напряжение на выходе $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_c = 0,2 \cdot 40 = 8$ в.

Напряжение на входе \dot{U}_1 также равно 8 в и опережает \dot{U}_2 на угол $b = \arccos 0,6 \approx 53^\circ$ (рис. 13.5).

Для определения закона изменения a в зоне затухания, в которой для данного фильтра A отрицательно, используем уравнение

$$\operatorname{ch} a = -A = \omega^2 LC - 1.$$

Найдем a , например, при $\omega = 2\omega_2 = 8940 \text{ рад/сек}$:

$$\operatorname{ch} a = (8940)^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} - 1 = 7; \quad a = 2,64 \text{ неп.}$$

Пример 164. Определить параметры полосового фильтра рис. 13.3, a исходя из того, что он должен пропускать полосу частот от $f_1 = 750$ до $f_2 = 850 \text{ гц}$ и что сопротивление нагрузки, равное характеристическому сопротивлению фильтра Z_c при резонансной частоте, составляет 800 ом .

Решение: 1) резонансная частота $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{750 \cdot 850} = 798 \text{ гц}$;

$$2) C_1 = \frac{850 - 750}{2\pi \cdot 750 \cdot 850 \cdot 800} = 0,0312 \text{ мкф};$$

$$3) L_1 = \frac{800}{2\pi (850 - 750)} = 1,273 \text{ гн};$$

$$4) C_2 = \frac{1}{\pi \cdot 800 \cdot 100} = 3,94 \text{ мкф};$$

$$5) L_2 = \frac{800 \cdot 100}{4\pi \cdot 750 \cdot 850} = 0,01 \text{ гн}.$$

§ 13.4. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЛЬТРА ТИПА k

По схеме k -фильтра без проведения подробного математического анализа можно судить о том, к какому из перечисленных типов может быть отнесен тот или иной фильтр. Заключение основывается на характере продольного сопротивления фильтра.

Характер продольного сопротивления k -фильтра, как правило, прямо противоположен характеру поперечного сопротивления. В этом можно убедиться, рассмотрев схемы рис. 13.1, a , 13.2, a и 13.3, a . Действительно, если продольное сопротивление индуктивное, то поперечное — емкостное. Если продольное образовано последовательно соединенными L и C , то поперечное — параллельно соединенными L и C , и т. д.

Если продольное сопротивление состоит только из индуктивностей, то фильтр относится к категории НЧ; если продольное сопротивление чисто емкостное, то фильтр — ВЧ.

Если продольное сопротивление состоит из *последовательно соединенных* L и C , то фильтр полосового типа. Если продольное сопротивление состоит из *параллельно соединенных* L и C , то фильтр заграждающего типа.

§ 13.5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ ТИПА m . КАСКАДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ФИЛЬТРОВ

Для увеличения крутизны характеристики $Q = f(\omega)$ в начале полосы затухания, для получения заданного значения затухания при определенной частоте или частотах и для меньшей зависимости Z_c от частоты в полосе прозрачности применяют фильтры типа m , каскадно включаемые с фильтрами типа k или друг с другом.

На рис. 13.6 в качестве примера изображены две возможные схемы каскадного включения фильтров типа m и k . На практике применяют и другие схемы, например такие, когда фильтр типа k находится между фильтрами типа m .

Рассмотрим свойства m -фильтров и их каскадных соединений.

На рис. 13,6 a m -фильтр из сопротивлений Z_7 и Z_8 (Γ -звено) каскадно соединен с Π -фильтром типа k (сопротивления Z_4, Z_5, Z_3). На рис. 13,6, б m -фильтр из сопротивлений Z_9 и Z_{10} (Γ -звено) каскадно соединен с T -фильтром типа k (сопротивления Z_1, Z_1, Z_3). Сопротивления Z_7 и Z_8 зависят от Z_4 и Z_5 , а Z_9 и Z_{10} — от Z_1 и Z_3 . Следовательно, прототипом Γ - или Π -звеньев являются каскадно с ними включенные фильтры типа k .

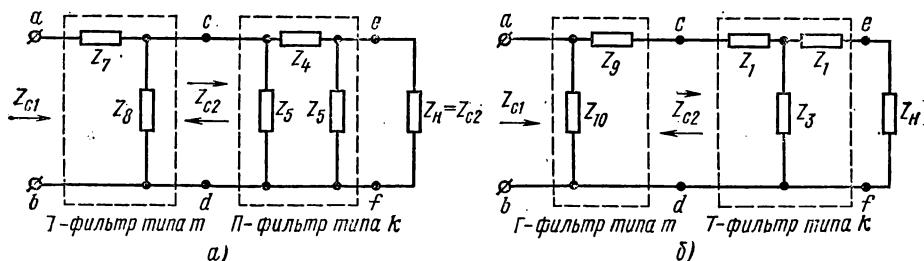


Рис. 13.6

При каскадном соединении фильтров всегда соблюдают принцип согласованности нагрузки. Входное сопротивление k -фильтров по отношению к зажимам cd (назовем его Z_{c2}) равно сопротивлению нагрузки фильтра: $Z_{c2} = Z_H$. Для m -фильтра Z_{c2} является нагрузочным сопротивлением.

Несимметричный четырехполюсник, каким является m -фильтр, характеризуется двумя характеристическими сопротивлениями Z_{c1} и Z_{c2} . Z_{c1} в Γ -фильтре рис. 13.6, а

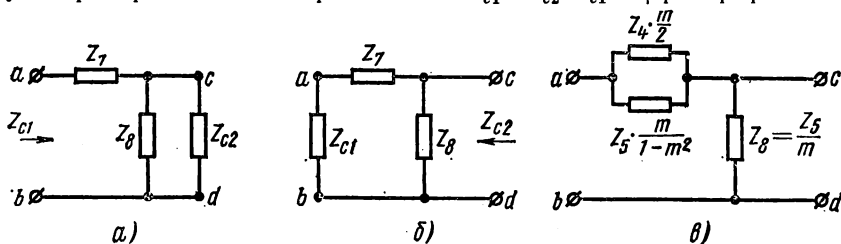


Рис. 13.7

определяется как входное сопротивление схемы рис. 13.7, а, в которой нагрузкой является Z_{c2} (входное сопротивление k -фильтра). Z_{c2} в m -фильтре определяется как входное сопротивление схемы рис. 13.7, б, в которой нагрузкой является Z_{c1} . Входное сопротивление равно частному от деления входного напряжения на входной ток. Используя коэффициенты A, B, C, D , характеризующие m -фильтр как четырехполюсник, получим

$$Z_{c1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_{c2} + B}{CZ_{c2} + D}.$$

Z_{c2} определяем при обратном питании, когда коэффициенты A и D меняются местами; поэтому

$$Z_{c2} = \frac{D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2} = \frac{DZ_{c1} + B}{CZ_{c1} + A}.$$

Разрешим уравнения относительно Z_{c1} и Z_{c2} :

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}.$$

Коэффициенты A, B, C, D фильтра типа m в виде π -звена рис. 13.6, а найдем по формулам § 6.4, полагая $Z_1 = Z_7, Z_2 = 0, Z_3 = Z_8$. Получим:

$$A = 1 + \frac{Z_7}{Z_8}; \quad B = Z_7; \quad C = \frac{1}{Z_8}; \quad D = 1.$$

Подставим найденные значения A, B, C, D в формулы для Z_{c1} и Z_{c2} :

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_7 Z_8 \left(1 + \frac{Z_7}{Z_8}\right)}; \quad (13.11)$$

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_7 Z_8}{1 + \frac{Z_7}{Z_8}}}. \quad (13.12)$$

Входное сопротивление второго каскада схемы рис. 13.6, а

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_4 Z_5}{2 + \frac{Z_4}{Z_5}}}. \quad (13.13)$$

Сопротивление Z_8 в m -фильтре (см. рис. 13.6, а) берут равным $\frac{Z_5}{m}$, где m — числовой коэффициент, находящийся в интервале от 0 до 1. Подставляя в (13.12) $\frac{Z_5}{m}$ вместо Z_8 и затем приравнявая подкоренные выражения формул (13.12) и (13.13), получаем уравнение для определения Z_7 :

$$\frac{Z_7 \frac{Z_5}{m}}{1 + \frac{Z_7}{Z_5} m} = \frac{Z_4 Z_5}{2 + \frac{Z_4}{Z_5}}, \quad \text{отсюда} \quad \frac{1}{Z_7} = \frac{1}{Z_4 \frac{m}{2}} + \frac{1}{Z_5 \frac{m}{1-m^2}}.$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что Z_7 образовано двумя параллельно соединенными сопротивлениями $Z_4 \frac{m}{2}$ и $Z_5 \frac{m}{1-m^2}$ (рис. 13.7, в). Так как Z_7 образовано параллельно соединенными сопротивлениями, которые зависят (являются производными) от Z_4 и Z_5 , m -фильтр (см. рис. 13.7, а) называют фильтром *параллельно-производного типа*.

Границы полосы прозрачности у m -фильтра определяют так же, как и у k -фильтра, т. е. полагая $A(\omega) = \pm 1$ для фильтров НЧ и ВЧ и полагая $A(\omega) = -1$ для полосовых и заграждающих фильтров.

В полосе затухания для m -фильтра $\sinh a = \pm A(\omega)$. Знак минус относится к полосе частот от ω_p до ω_c ; знак плюс — к полосе от ω_p до ∞ для фильтров НЧ и к полосе частот от ω_p до 0 для фильтров ВЧ (объясняется это тем, что сопротивление Z_7 изменяет знак при частоте ω_p).

Границы полосы прозрачности по частоте для k -фильтра и для каскадно и согласованно с ним соединенного m -фильтра совпадают. Результирующее затухание всего фильтра a равно сумме затуханий m -фильтра (a_m) и k -фильтра (a_k): $a = a_m + a_k$. Характер зависимости $a_k = f(\omega)$ для различных типов k -фильтров рассмотрен в § 13.3. Зависимости $a_m = f(\omega)$ для m -фильтров НЧ и ВЧ показаны на рис. 13.8, а и б. На них ω_c — частота среза (границная частота полосы прозрачности), ω_p на рис. 13.8, а — резонансная частота, при которой противоположного характера сопротивления $Z_4 \frac{m}{2}$ и $Z_5 \frac{m}{1-m^2}$ в схеме рис. 13.7, в вступают в резонанс, так что Z_7 при частоте ω_p равно бесконечности.

В области частот от ω_c до ω_p резко возрастает a_m , что очень существенно, так как получается большое затухание a_m в начале полосы затухания, где a_k мало. Спад a_m при $\omega > \omega_p$ компенсируется ростом a_k .

Напряжение на зажимах ab фильтра опережает напряжение на нагрузке на угол $b = b_m + b_k$, где b_m — сдвиг по фазе от m -фильтра и b_k — сдвиг по фазе от

k -фильтра. Зависимость $b_k = f(\omega)$ рассмотрена в § 13.3. Зависимость $b_m = f(\omega)$ показана на рис. 13.8, а для фильтра НЧ и на рис. 13.8, з для фильтра ВЧ.

Зависимость Z_{c1} от $\frac{\omega}{\omega_c}$ для фильтра НЧ и от $\frac{\omega_c}{\omega}$ для фильтра ВЧ показана на рис. 13.8, д при трех значениях m . При $m \approx 0,5-0,6$ сопротивление Z_{c1} остается

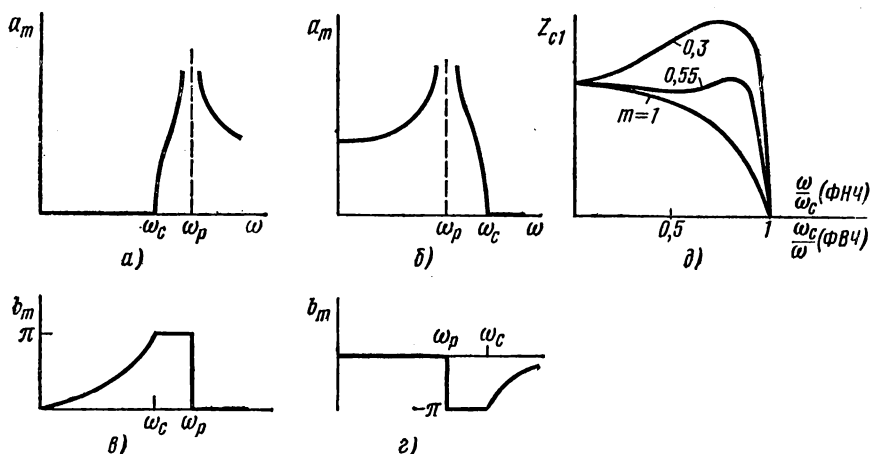


Рис. 13.8

приблизительно постоянным почти во всей полосе прозрачности, резко уменьшаясь только вблизи частоты среза. При каскадном соединении нескольких m -фильтров значения коэффициента m у них берут различными, чтобы создавать большое затухание на нескольких заданных частотах.

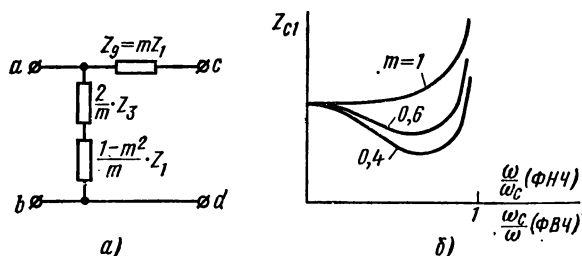


Рис. 13.9

Рассмотрим свойства Γ -фильтра типа m рис. 13.9, б, являющегося составной частью фильтра рис. 13.6, б. Опуская выкладки, запишем формулы для Z_{c1} и Z_{c2} этого фильтра:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{Z_9 Z_{10}}{1 + \frac{Z_9}{Z_{10}}}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_9 Z_{10} \left(1 + \frac{Z_9}{Z_{10}}\right)}.$$

Входное сопротивление k -фильтра рис. 13.9, б

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_1 Z_3 \left(2 + \frac{Z_1}{Z_3}\right)}.$$

Г-фильтр типа m рис. 13.9, б называют *последовательно производным*, так как его сопротивление Z_{10} состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений $\frac{2}{m} Z_3$ и $\frac{1-m^2}{m} Z_1$ (рис. 13.9, а), являющихся производными от сопротивлений Z_1 и Z_3 в Т-фильтре (см. рис. 13.6, б). Так как сопротивления Z_1 и Z_3 имеют противоположный характер, то сопротивление Z_{10} при некоторой частоте равно бесконечности (резонанс напряжений). Для полосы прозрачности зависимость Z_{c1} от $\frac{\omega}{\omega_c}$ для фильтра НЧ (и от $\frac{\omega_c}{\omega}$ для фильтра ВЧ) при трех значениях m показана на рис. 13.9, б. Зависимости $a_m = f(\omega)$ и $b_m = f(\omega)$ для m -фильтра рис. 13.6, б такие же, что и для m -фильтра рис. 13.6, а.

§ 13.6. RC-ФИЛЬТРЫ

Если сопротивление нагрузки фильтра очень велико (например, входное сопротивление лампового усилителя), то фильтр иногда выполняют из элементов R и C .

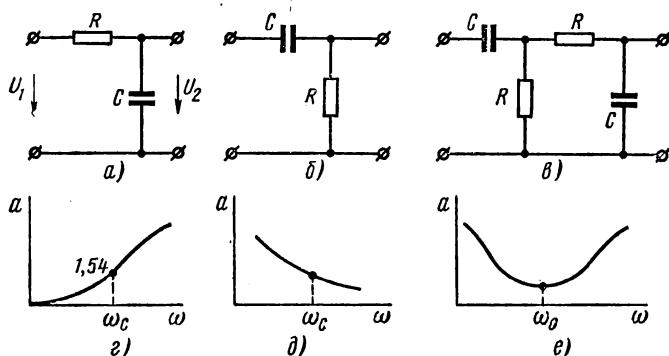


Рис. 13.10

На рис. 13.10, а, б и в изображены схемы фильтров НЧ, ВЧ и полосового RC -фильтра, а на рис. 13.10, г, д, е — соответствующие зависимости $a = \ln \frac{U_1}{U_2} = f(\omega)$. Для всех RC -фильтров в рабочей зоне $a \neq 0$. Рабочая зона фильтра НЧ простирается от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c = \frac{1}{RC}$ (принято условно), когда $a = 1,54 \text{ nep}$. Для фильтра ВЧ рабочая зона находится в диапазоне от $\omega = \omega_c = \frac{1}{RC}$, когда $a = 1,54 \text{ nep}$, до $\omega = \infty$. В полосовом фильтре минимальное затухание имеет место при $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 14.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В гл. X рассматривались переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами.

Для электроэнергетики, телефонии, телеграфии, счетно-решающей техники, радиотехники и импульсной техники существенное значение имеют также переходные процессы в электрических цепях, содержащих линии с распределенными параметрами.

В тех участках цепей, которые могут быть представлены как участки с сосредоточенными параметрами, расчет переходных процессов производят с помощью методов, изложенных в гл. X. В данной главе обсуждаются особенности переходных процессов в самих линиях с распределенными параметрами, вопросы согласования и увязки их с переходными процессами в участках цепей с сосредоточенными параметрами.

Как уже говорилось в § 12.2, основными уравнениями для линий с распределенными параметрами являются уравнения (12.1) и (12.4). Они справедливы также для установившихся и переходных процессов.

В силу того, что интегрирование двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных [уравнений (12.1) и (12.4)] в общем виде представляет собой довольно сложную в математическом отношении задачу, в курсе ТОЭ переходные процессы изучают несколько упрощенно, а именно: изучают переходные процессы в однородных линиях без потерь, т. е. при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$. Практически это тоже вполне оправдано, поскольку реальные линии с распределенными параметрами, как правило, обладают относительно малыми потерями.

Изучение переходных процессов при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ дает возможность качественно исследовать основные черты процессов. В количественном отношении неучет R_0 и G_0 для начальных стадий переходного процесса существенного влияния обычно не оказывает, однако для последующих стадий учет R_0 и G_0 желателен и даже необходим.

В энергетических, телефонных и телеграфных устройствах, содержащих линии с распределенными параметрами, переходные процессы возникают при подключении линий к источнику э. д. с., при отключении от источника э. д. с., при подключении и отключении нагрузки, а также при атмосферных (грозовых) разрядах.

В радиотехнических устройствах и устройствах, используемых в счетно-решающей технике, также происходят переходные процессы типа рассматриваемых в данной главе, например в линиях задержки и формирующих линиях.

§ 14.2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Из уравнений (12.1) и (12.4) при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ следует, что

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (14.1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (14.2)$$

Ток и напряжение являются функциями двух переменных: расстояния x от начала линии и времени t . Продифференцируем (14.1) по x и (14.2) по t :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}; \quad (14.3)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14.4)$$

В соответствии с (14.4) в правую часть (14.3) вместо $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ подставим $-C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и обозначим $L_0 C_0 = \frac{1}{v^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14.5)$$

Из предыдущего [см. § 12.10, формула (12.39)] известно, что $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ есть скорость распространения электромагнитной волны по линии. Если уравнение (14.2) продифференцировать по x , а (14.1) — по t и в продифференцированное уравнение (14.2) подставить правую часть продифференцированного уравнения (14.1), то получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (14.6)$$

Равенства (14.5) и (14.6) являются уравнениями второго порядка в частных производных. Из курса математики известно, что уравнения такого вида называют волновыми.

Решением уравнения (14.5) является сумма любых функций f_1 и f_2 ; причем аргументом функции f_1 является $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, а аргументом функции f_2 является $\left(t + \frac{x}{v}\right)$:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (14.7)$$

Для сокращения записи в дальнейшем часто будем обозначать:

$$u_n = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \quad (14.8)$$

$$u_o = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (14.9)$$

Следовательно,

$$u = u_n + u_o, \quad (14.10)$$

где индексы «о» и «п» означают отраженная и падающая (волны).

Вид функций f_1 и f_2 определяется граничными условиями в начале и в конце линии. Функции f_1 и f_2 в общем случае должны позволять дважды дифференцировать их по x и по t .

Подстановка функций $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ в (14.5) дает тождество.

Решение уравнения (14.6):

$$i = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (14.11)$$

Обозначим для сокращения записи:

$$i_n = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \quad (14.12)$$

$$i_o = \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (14.13)$$

Тогда

$$i = i_n + i_o. \quad (14.14)$$

§ 14. 3. ПАДАЮЩИЕ И ОТРАЖЕННЫЕ ВОЛНЫ НА ЛИНИЯХ

В соответствии с уравнениями (14.7) и (14.11) напряжение и ток в линии могут быть представлены в виде двух функций: функции $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ — падающие волны; функции $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ и $\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ — отраженные волны.

Падающие волны перемещаются со скоростью v по направлению от источника энергии к приемнику, т. е. в сторону увеличения координаты x ; отраженные волны — от приемника энергии к источнику, т. е. в сторону уменьшения координаты x .

Обсудим, как следует понимать, что аргументом функции f_1 является $t - \frac{x}{v}$ (аналогичные выводы можно сделать и по отношению к другим функциям).

Пусть в некоторой точке линии $x = x_1$ при $t = t_1$ значение функции $f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right)$ равно F_1 . Это значение функция f_1 будет принимать во всех точках линии, где $x > x_1$, с запозданием во времени, равным $\frac{x - x_1}{v}$ и обусловленным конечной скоростью перемещения волны по линии.

Так, в точке $x = x_2$ значение функции f_1 будет равно F_1 при

$$t = t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v}.$$

Действительно,

$$f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = F_1.$$

Таким образом, каков бы ни был закон изменения напряжения падающей волны f_1 в начале линии, по такому же закону, но с запозданием во времени изменяется напряжение падающей волны в любой точке линии.

§ 14.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ f_1 , f_2 И ФУНКЦИЯМИ φ_1 , φ_2

Найдем связь между функциями f_1 и φ_1 , а также f_2 и φ_2 .

С этой целью в (14.1) и (14.2) подставим (14.7) и (14.11) и для сокращения записи обозначим:

$$\begin{aligned}\frac{df_1\left(t-\frac{x}{v}\right)}{d\left(t-\frac{x}{v}\right)} &= f_1'; & \frac{d\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right)}{d\left(t-\frac{x}{v}\right)} &= \varphi_1'; \\ \frac{df_2\left(t+\frac{x}{v}\right)}{d\left(t+\frac{x}{v}\right)} &= f_2'; & \frac{d\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right)}{d\left(t+\frac{x}{v}\right)} &= \varphi_2'.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (14.1) дает

$$\frac{1}{v} f_1' - \frac{1}{v} f_2' = L_0 \varphi_1' + L_0 \varphi_2'. \quad (14.15)$$

Из (14.2) следует, что

$$\frac{1}{v} \varphi_1' - \frac{1}{v} \varphi_2' = C_0 f_1' + C_0 f_2'. \quad (14.16)$$

Перепишем (14.15) и (14.16):

$$f_1' - f_2' = v L_0 (\varphi_1' + \varphi_2'); \quad (14.15')$$

$$f_1' + f_2' = \frac{1}{v C_0} (\varphi_1' - \varphi_2'). \quad (14.16')$$

Но

$$\begin{aligned}v L_0 &= \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B; \\ \frac{1}{v C_0} &= \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B,\end{aligned}$$

где Z_B — волновое сопротивление однородной линии без потерь [см. формулу (12.23')].

Таким образом,

$$f_1' - f_2' = Z_B (\varphi_1' + \varphi_2'); \quad (14.15'')$$

$$f_1' + f_2' = Z_B (\varphi_1' - \varphi_2'). \quad (14.16'')$$

Следовательно,

$$\varphi_1' = \frac{f_1'}{Z_B}; \quad (14.17)$$

$$\varphi_2' = -\frac{f_2'}{Z_B}. \quad (14.18)$$

Если производные двух функций (например, φ_1' и f_1') при любых значениях x и t равны, то это значит, что сами функции (φ_1 и f_1) равны

с точностью до постоянной. Поэтому

$$\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{1}{Z_B} f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (14.19)$$

и

$$\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = -\frac{1}{Z_B} f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \quad (14.20)$$

Постоянные интегрирования опустили, так как будем полагать, что в токах и напряжениях падающей и отраженной волн отсутствуют постоянные составляющие, не зависящие от x и от t . Два последних уравнения можно переписать с учетом (14.8), (14.9), (14.12), (14.13):

$$i_n = \frac{u_n}{Z_B}; \quad (14.19')$$

$$i_0 = -\frac{u_0}{Z_B}. \quad (14.20')$$

Из (14.19') следует, что ток падающей волны для любого момента времени и для любой точки на линии равен частному от деления напряжения падающей волны для того же момента времени и для той же точки линии на волновое сопротивление Z_B .

Из (14.20') вытекает, что ток отраженной волны для любого момента времени и для любой точки линии равен взятому с обратным знаком частному от деления напряжения отраженной волны в той же точке линии и для того же момента времени на волновое сопротивление. Знак минус в (14.20') означает, что ток отраженной волны направлен встречно положительному направлению отсчета тока, показанному на рис. 12.2.

§ 14.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ПО ЛИНИИ

Пусть источник постоянного напряжения u , имеющий внутреннее сопротивление, равное нулю, подключен к незаряженной однородной линии с распределенными параметрами, у которой $R_0 = G_0 = 0$ (рис. 14.1).

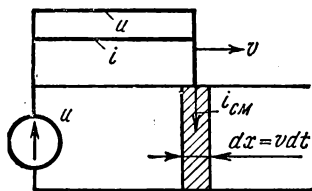


Рис. 14.1

По линии будет перемещаться падающая электромагнитная волна. Начальный участок волны, первым продвигающийся по линии, принято называть *фронтом волны*. В данном случае волна имеет прямоугольный фронт.

Двигаясь по линии, волна создает между проводами линии электрическое и магнитное поля.

Приращение магнитного потока на фронте волны за время dt равно произведению тока i на индуктивность участка линии длиной dx : $d\psi = iL_0 dx$; оно вызывает э. д. с.

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\psi}{dt} = -iL_0 \frac{dx}{dt} = -iL_0 v = -i \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = -i \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \\ &= -iZ_B = -u_n = -u. \end{aligned}$$

Таким образом, на фронте волны возникает э. д. с. самоиндукции, численно равная напряжению генератора.

На фронте волны происходит зарядка проводов линии: один провод, например верхний, присоединенный к плюсу источника э. д. с., приобретает положительный заряд, другой (нижний) — отрицательный заряд (такой же величины).

Кроме того, на фронте волны возникает ток смещения $i_{\text{см}} = \frac{dq}{dt}$, где dq — приращение заряда на одном из проводов линии за время dt :

$$dq = C_0 u dx = C_0 uv dt.$$

Проходящий по диэлектрику на фронте волны ток смещения равен току падающей волны, проходящему по проводам линии:

$$i_{\text{см}} = \frac{dq}{dt} = C_0 uv = \frac{u_{\text{п}}}{Z_{\text{в}}}.$$

Электромагнитная волна, продвигаясь по линии, каждой единице линии сообщает энергию электрического поля $\frac{C_0 u_{\text{п}}^2}{2}$ и энергию магнитного поля $\frac{L_0 i_{\text{п}}^2}{2}$. Можно показать, что эти количества энергий равны. Действительно,

$$u_{\text{п}} = i_{\text{п}} Z_{\text{в}} = i_{\text{п}} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Следовательно,

$$\frac{C_0 u_{\text{п}}^2}{2} = \frac{C_0 i_{\text{п}}^2 L_0}{2 C_0} = \frac{L_0 i_{\text{п}}^2}{2}.$$

Когда падающая волна достигает конца линии, к которому в общем случае присоединена некоторая нагрузка или другая линия (с другим волновым сопротивлением), то часть падающей волны проходит в нагрузку (или соответственно во вторую линию), а часть отражается — возникает отраженная волна.

Чтобы выяснить, какова форма волны, проходящей в нагрузку, какова форма отраженной волны и как они деформируются во времени, применяют расчетную схему, которую принято называть схемой замещения для исследования волновых процессов в линии с распределенными параметрами.

§ 14.6. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНИЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для обоснования методики составления схемы замещения обратимся к рис. 14.2, а. На нем изображена линия с распределенными параметрами, на конце которой включена некоторая нагрузка. Начиная с того момента, когда падающая волна дойдет до конца линии, по нагрузке пойдет ток $i_{\text{н}}$ и на ней будет напряжение $u_{\text{н}}$. (Для этого времени и изображены на рис. 14.2 а эпюры волн напряжения и тока на линии.)

В соответствии с формулами (14.10) и (14.14) напряжение и ток в любой точке линии можно представить в виде суммы падающих и отраженных волн. Это справедливо также в отношении напряжения и тока в конце линии. Следовательно,

$$u_n + u_o = u_n; \quad (14.21)$$

$$i_n + i_o = i_n. \quad (14.22)$$

Заменяв i_n на $\frac{u_n}{Z_B}$, а i_o на $-\frac{u_o}{Z_B}$, получим:

$$u_n + u_o = u_n;$$

$$u_n - u_o = i_n Z_B$$

или

$$2u_n = u_n + i_n Z_B. \quad (14.23)$$

Таким образом, напряжение на конце линии u_n и ток в нагрузке i_n независимо от характера нагрузки связаны с напряжением падающей волны u_n уравнением (14.23). Последнему соответствует схема с сосре-

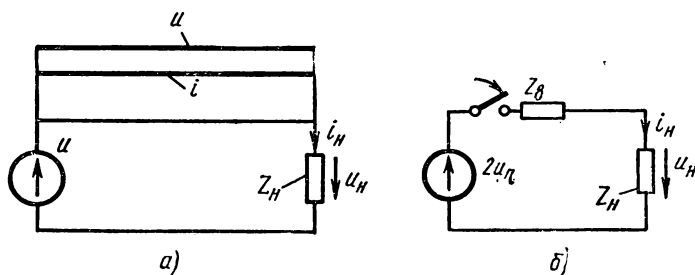


Рис. 14.2

доточенными параметрами, изображенная на рис. 14.2, б. В ней к источнику э. д. с. напряжением $2u_n$ подключают последовательно соединенные Z_B и нагрузку Z_H .

Расчет переходного процесса в схеме с сосредоточенными параметрами (см. рис. 14.2, б) производится любым из методов, рассмотренных в гл. X. Расчет дает возможность найти $i_n = f(t)$ и $u_n = f(t)$. После того как эти зависимости найдены, можно определить характер изменения во времени напряжения и тока отраженной волны: $u_o = f(t)$ и $i_o = f(t)$. Действительно, из уравнений (14.21) и (14.20') следует, что

$$\left. \begin{aligned} u_o(t) &= u_n(t) - u_n(t); \\ i_o(t) &= -\frac{u_o(t)}{Z_B}; \\ Z_B &= \sqrt{\frac{L_o}{C_o}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.21')$$

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение схемы замещения.

§ 14.7. ПОДКЛЮЧЕНИЕ РАЗОМКНУТОЙ НА КОНЦЕ ЛИНИИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПЯЖЕНИЯ

В линии без потерь, так же как и в колебательном контуре без потерь, возникают незатухающие колебания. Период колебаний состоит из четырех частей или стадий (рис. 14.3) одинаковой продолжительности l/v , где l — длина линии, v — скорость распространения волны. Для рассмотрения этих стадий воспользуемся двумя различными схемами замещения. Первая схема (рис. 14.4, а) соответствует разомкнутому концу линии ($Z_H = \infty$), когда к нему подходит падающая от начала линии волна. Вторая схема (рис. 14.4, б) соответствует моменту времени, когда отраженная волна подошла к началу линии, где включен генератор постоянного напряжения, внутреннее сопротивление которого полагаем равным нулю ($Z_H = 0$).

Рассмотрим каждую из стадий процесса в отдельности.

Первая стадия. От генератора к концу линии распространяются волна напряжения $u_{n1} = u$ и волна тока $i_{n1} = \frac{u_{n1}}{Z_B} = i$ (см. рис. 14.3, а).

Вторая стадия заключается в том, что от конца линии к началу ее движется отраженная волна u_{o1} и i_{o1} . Для определения u_{o1} и служит схема рис. 14.4, а. Она составлена в соответствии с общим методом, изложенным в § 14.6. В ней к напряжению $2u_{n1} = 2u$ подключаются волновое сопротивление линии Z_B и сопротивление нагрузки $Z_H = \infty$ (линия на конце разомкнута!).

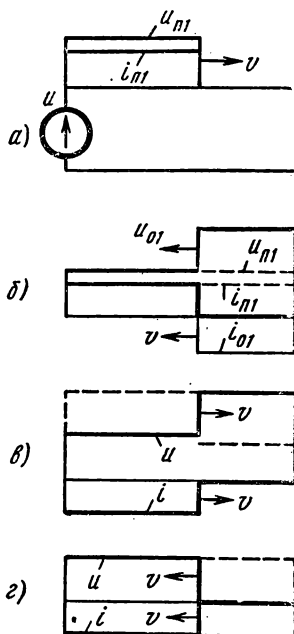


Рис. 14.3

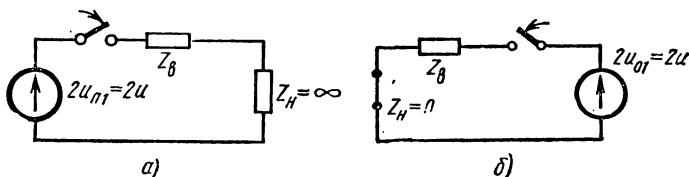


Рис. 14.4

Согласно рис. 14.4, а напряжение на нагрузке равно удвоенному напряжению падающей волны. Действительно, при $Z_H \rightarrow \infty$

$$u_{Z_H} = 2u_{n1} \frac{Z_H}{Z_H + Z_B} = 2u_{n1} = 2u.$$

В соответствии с формулой (14.21') отраженная волна напряжения

$$u_{o1} = u_n - u_{n1} = 2u_{n1} - u_{n1} = u_{n1} = u;$$

в соответствии с формулой (14.20') отраженная волна тока

$$i_{o1} = -\frac{u_{o1}}{Z_B} = -i_{n1} = -i.$$

Таким образом, в течение второй стадии процесса от конца линии к началу продвигается отраженная волна $u_{o1} = u$, $i_{o1} = -i$. Результирующее состояние на линии определяется наложением первой падающей волны (u_{n1} , i_{n1}) и первой отраженной волны (u_{o1} , i_{o1}). На рис. 14.3, б дана эпюра распределения напряжения и тока по линии для некоторого момента времени во второй стадии. (В этой стадии для участков линии, на которые прошли отраженные волны, результирующее напряжение равно $2u$, а результирующий ток равен нулю.)

Третья стадия процесса состоит в том, что волна u_{o1} , i_{o1} , дойдя до начала линии, отразится от генератора, как от короткозамкнутого конца линии (внутреннее сопротивление генератора принято равным нулю), и вызовет распространение в направлении от генератора к концу линии второй падающей волны (u_{n2} , i_{n2}), являющейся по существу отраженной волной по отношению к волне u_{o1} , i_{o1} .

Для определения характера отражения волн от начала линии используем схему рис. 14.4, б. В ней $Z_n = 0$, напряжение $2u_{o1} = 2u$. Так как нагрузка $Z_n = 0$, то и напряжение на ней равно нулю. Но напряжение на нагрузке в соответствии с (14.21) равно сумме падающей волны (в данном случае $u_{o1} = u$) и напряжения отраженной от начала линии волны, распространяющейся от генератора к концу линии и потому названной второй падающей волной. Следовательно,

$$0 = u + u_{n2}.$$

Отсюда

$$u_{n2} = -u, \quad i_{n2} = \frac{u_{n2}}{Z_B} = -i.$$

Результирующее состояние на линии во время третьей стадии процесса изображено на рис. 14.3, в. Оно получено в результате наложения трех волн: первой падающей волны u_{n1} , i_{n1} , первой отраженной от конца волны u_{o1} , i_{o1} и второй падающей волны u_{n2} , i_{n2} .

Четвертая стадия процесса заключается в том, что на три предыдущие волны накладывается четвертая волна, представляющая собой отражение от разомкнутого конца линии второй падающей волны.

Отражение второй падающей волны от конца линии произойдет в соответствии со схемой замещения рис. 14.4, а, только вместо $2u_{n1} = 2u$ в схеме будет напряжение

$$2u_{n2} = -2u.$$

Вторая отраженная волна будет иметь $u_{o2} = -u$, $i_{o2} = i$. Результирующее состояние на линии во время четвертой стадии (рис. 14.3, г)

есть результат наложения четырех волн:

$$u_{n1} + u_{o1} + u_{n2} + u_{o2} = u + u - u - u = 0;$$

$$i_{n1} + i_{o1} + i_{n2} + i_{o2} = i - i - i + i = 0.$$

Таким образом, к концу четвертой стадии напряжение и ток вдоль всей линии равны нулю — линия приобретает такое же состояние, какое у нее было к началу первой стадии. Затем процесс повторяется до бесконечности, так как R_0 и G_0 были приняты равными нулю. В действительности благодаря наличию сопротивления R_0 и утечки G_0 колебательный процесс постепенно затухает и вдоль линии устанавливается режим, соответствующий установившемуся процессу в линии при постоянном напряжении.

В рассмотренном примере линия на конце была разомкнута, поэтому отраженные волны имели такую же прямоугольную форму, как и падающие.

Отраженные волны будут иметь форму, в общем случае не похожую на форму падающей волны, если в состав нагрузки на конце линии входят емкости и (или) индуктивности, а также в том случае, если в месте перехода с одной линии на другую есть сосредоточенные индуктивности и (или) емкости.

§ 14.8. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС ПРИ ПОДКЛЮЧЕНИИ ИСТОЧНИКА ПОСТОЯННОГО НАПЯЖЕНИЯ К ДВУМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫМ ЛИНИЯМ ПРИ НАЛИЧИИ ЕМКОСТИ В МЕСТЕ СТЫКА ЛИНИЙ

Пусть первая линия имеет длину l_1 и волновое сопротивление $Z_{в1}$, вторая линия — длину l_2 и $Z_{в2} \neq Z_{в1}$. Напряжение источника э. д. с. равно u (рис. 14.5, а). В месте стыка линий есть сосредоточенная емкость C .

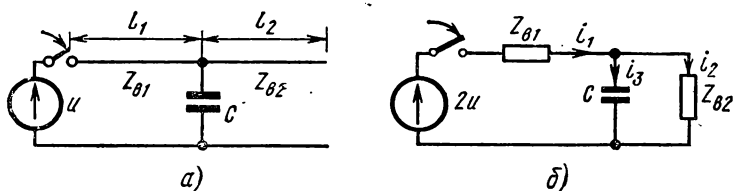


Рис. 14.5

Требуется определить форму волны, проникающей во вторую линию, характер изменения тока через сосредоточенную емкость, а также результирующее распределение напряжений и тока вдоль первой линии при движении по ней отраженной от стыка линий волны.

Переходный процесс начинается с того, что от генератора по первой линии распространяется падающая волна с прямоугольным фронтом

$$u_{n1} = u \text{ и } i_{n1} = \frac{u}{Z_{в1}}.$$

Для определения характера изменения токов и напряжений, когда падающая волна дойдет до стыка линий, обратимся к схеме замещения с сосредоточенными параметрами (рис. 14.5, б). В этой схеме нагрузка образована двумя параллельными ветвями — емкостью C и волновым сопротивлением второй линии Z_{B2} .

Две параллельные ветви появились в схеме замещения потому, что в исходной схеме рис. 14.5, а падающая волна, дойдя до места стыка линий, встречает два пути для своего дальнейшего распространения: первый путь — через емкость C , второй путь — по второй линии с волновым сопротивлением Z_{B2} .

Расчет переходного процесса в схеме рис. 14.5, б дает:

$$i_2 = \frac{2u}{Z_{B1} + Z_{B2}} (1 - e^{pt}); \quad (14.24)$$

$$i_3 = \frac{2u}{Z_{B1}} e^{pt}; \quad (14.25)$$

$$i_1 = \frac{2u}{Z_{B1} + Z_{B2}} \left(1 + \frac{Z_{B2}}{Z_{B1}} e^{pt} \right); \quad (14.26)$$

$$u_C = u_{Z_{B2}} = \frac{2u Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}} (1 - e^{pt}); \quad (14.27)$$

$$p = - \frac{Z_{B1} + Z_{B2}}{Z_{B1} Z_{B2} C}. \quad (14.28)$$

Характер изменения i_2 , i_3 , i_1 и u_C в функции от времени изображен на рис. 14.6. В первый момент после подхода волны к месту стыка линий напряжение падает до нуля, так как незаряженная емкость в первый момент представляет собой как бы короткое замыкание.

Начальное значение тока через емкость равно $\frac{2u}{Z_{B1}}$. Затем емкость

заряжается, напряжение на ней растет, а ток через нее уменьшается. Ток i_2 в схеме замещения представляет собой ток электромагнитной волны, распространяющейся по второй линии; напряжение волны, распространяющейся по второй линии, равно $i_2 Z_{B2}$.

Для получения отраженной волны напряжения, распространяющейся по первой линии в направлении от стыка линий к генератору, из ординат кривой рис. 14.6, г надо вычесть напряжение падающей волны u и затем перенести полученную кривую на линию, зная скорость отраженной волны.

На рис. 14.7, а и б изображены соответственно отраженная волна напряжения и отраженная волна тока.

Эпюра распределения напряжения и тока вдоль первой и второй линий для момента времени, когда отраженная от стыка волна дошла

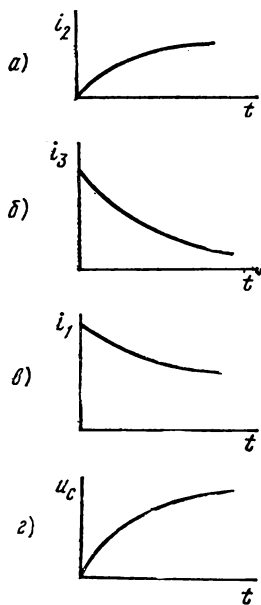


Рис. 14.6

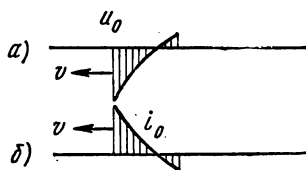


Рис. 14.7

до середины первой линии, представлена соответственно на рис. 14.8, а и б.

Перепад тока ef в кривой рис. 14.8, б равен току через емкость для данного момента времени. По второй линии волна продвинулась на расстояние, вдвое большее, чем прошла отраженная волна по первой линии. Это объясняется тем, что первая линия кабельная, а вторая — воздушная. Скорость продвижения волны по воздушной линии 300 000 км/сек, а по кабельной — около 150 000 км/сек *.

Пример 165. В схеме рис. 14.5, а: $Z_{в1} = 50 \text{ ом}$, $Z_{в2} = 400 \text{ ом}$; $l_2 = 100 \text{ км}$; $C = 5,62 \text{ мкф}$; $l_1 = 60 \text{ км}$; $u = 10 \text{ кв}$; первая линия кабельная, вторая воздушная. Построить эпюру распределения волн напряжения и тока вдоль линий для момента времени, когда распространяющаяся по второй линии волна дойдет до конца второй линии.

Решение. По формуле (14.28),

$$p = -\frac{50 + 400}{50 \cdot 400 \cdot 5,62 \cdot 10^{-6}} = -4000 \text{ сек}^{-1}.$$

Ток падающей волны по первой линии

$$i_n = \frac{u}{Z_{в1}} = \frac{10^4}{50} = 200 \text{ а}.$$

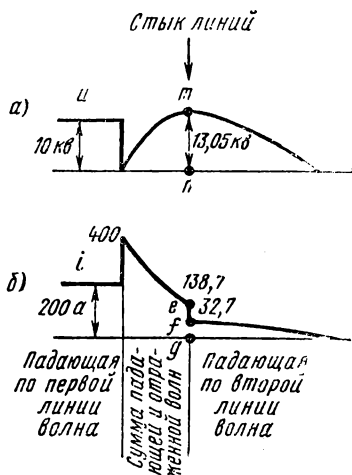


Рис. 14.8

По формуле (14.24), $i_2 = 44,5 (1 - e^{-4000t}) \text{ а}$. График $i_2 = f(t)$ изображен на рис. 14.6, а.

По формуле (14.25), $i_3 = 400 e^{-4000t} \text{ а}$. График $i_3 = f(t)$ представлен на рис. 14.6, б.

По формуле (14.26), $i_1 = 44,5 (1 + 8e^{-4000t}) \text{ а}$. График тока i_1 изображен на рис. 14.6, в.

По формуле (14.27) $u_c = u_{зв2} = 17750 (1 - e^{-4000t}) \text{ в}$. Кривая u_c изображена на рис. 14.6, г.

По условию, падающая по второй (воздушной) линии волна должна дойти до конца второй линии. Расстояние l_2 , равное 100 км, она пройдет за время

$$t = \frac{l_2}{v} = \frac{100}{300\,000} = \frac{1}{3000} \text{ сек}.$$

За это время отраженная от стыка волна пройдет по первой (кабельной) линии расстояние, в 2 раза меньшее.

* Формула для скорости v движения волны по линии приведена на стр. 439, а входящие в нее L_0 и C_0 определены на стр. 427.

Графики распределения u и i вдоль линии изображены на рис. 14.8, a и $б$.

Перепад ef на рис. 14.8, $б$ равен току i_3 при $t = \frac{1}{3000}$ сек:

$$i_3 = 400e^{-4/3} = 106 \text{ а.}$$

Отрезок fg равен току i_2 при $t = \frac{1}{3000}$ сек:

$$i_2 = 44,5(1 - e^{-4/3}) = 32,7 \text{ а.}$$

Отрезок mn на рис. 14.8, a равен напряжению u_c при $t = \frac{1}{3000}$ сек:

$$u_c = 13,05 \text{ кв.}$$

Пример 166. Воздушная линия длиной 100 км с волновым сопротивлением 500 ом имеет на конце нагрузку, состоящую из параллельно соединенных активного сопротивления $R_n = R = 700$ ом и индуктивности $L = 0,1$ гн (рис. 14.9, a). Линия подключается к напряжению

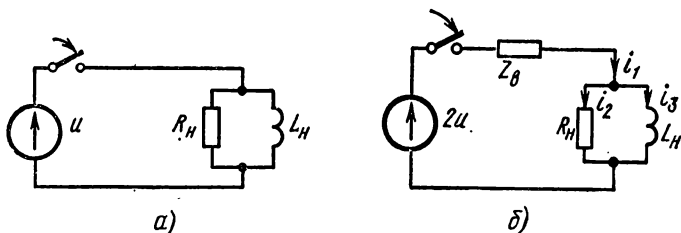


Рис. 14.9

$u = 30$ кв. Построить эпюры распределения напряжения и тока вдоль линии для момента времени, когда отраженная от конца линии волна дойдет до середины линии.

Решение. Сначала определим ток падающей волны:

$$i_n = \frac{u}{Z_b} = \frac{30 \cdot 10^3}{500} = 60 \text{ а.}$$

Затем составим схему замещения (рис. 14.9, $б$). Из нее следует, что

$$Z_b + \frac{RpL}{R + pL} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p &= -\frac{RZ_b}{(R + Z_b)L} = -\frac{700 \cdot 500}{1200 \cdot 0,1} = -2910 \text{ сек}^{-1}; \\ i_1 &= \frac{2u}{Z_b} \left(1 - \frac{R}{R + Z_b} e^{pt}\right) = 120(1 - 0,583e^{-2910t}) \text{ а}; \\ i_3 &= \frac{2u}{Z_b} (1 - e^{pt}) = 120(1 - e^{-2910t}) \text{ а}; \\ u_L = u_n &= L \frac{di_3}{dt} = 2u \frac{R}{R + Z_b} e^{pt} = 35 \cdot 10^3 e^{-2910t} \text{ в.} \end{aligned}$$

Кривые $u_n = f(t)$ и $i_1 = f(t)$ приведены на рис. 14.10.

Эпюры распределения напряжения и тока для заданного момента времени изображены на рис. 14.11, a и $б$.

В рассмотренных примерах электрическая цепь, содержащая линию с распределенными параметрами, подключалась к источнику постоянного напряжения.

Часто встречаются цепи, в которых э. д. с. источника изменяется по синусоидальному закону во времени. Если длина линии с распределенными параметрами и частота синусоидальной э. д. с. таковы, что время пробега волны по линии ($t = \frac{l}{v}$) много меньше периода переменного тока T , например составляет величину порядка

$\left(\frac{1}{30} \div \frac{1}{50}\right) T$, то при исследовании первых стадий переходного процесса в первом грубом приближении можно принять, что линия подключается к источнику постоянной э. д. с., которая равна амплитуде синусоидальной э. д. с. (расчет на наиболее тяжелый случай). Если же время пробега волны по линии составляет большую, чем

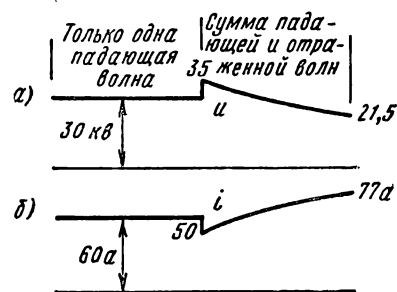


Рис. 14.11

включая в размыкаемую ветвь источник тока, который дает ток, равный и противоположно направленный току в размыкаемой ветви (см. § 10.59).

§ 14.9. ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ

Под линией задержки, применяемой в импульсной технике, понимают устройство, которое включают между источником сигнала и нагрузкой, служащее для задержки поступления сигнала в нагрузку на некоторое заданное время t_3 . В простейшем случае линию задержки выполняют в виде куска коаксиального кабеля длиной l . Он создает задержку $t_3 = \frac{l}{v_\phi}$.

Задержку осуществляют также цепочкой из n каскадно соединенных одинаковых фильтров низкой частоты (см. рис. 13.1, а), выбирая параметры L и C фильтров так, чтобы полоса частот сигнала $0 - \omega_c$ находилась в полосе прозрачности фильтра и чтобы $\omega_c \approx 0,5 \omega_2$, где ω_2 — частота среза фильтра, равная $\sqrt{\frac{2}{LC}}$. Параметры фильтра

согласуют с нагрузкой $R_n = \sqrt{\frac{2L}{C}}$. Время задержки

$$t_3 \approx n \left(\frac{d\epsilon}{d\omega} \right)_{\omega=0} = n \sqrt{2LC}.$$

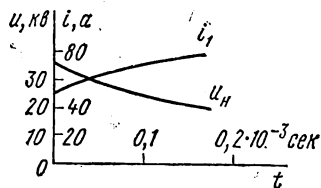


Рис. 14.10

При отключении нагрузки в линиях также возникают переходные процессы. Расчет их производят на основании принципа наложения, учитывая изменение э. д. с. источника при перемещении падающей волны по линии.

При отключении нагрузки в линиях также возникают переходные процессы. Расчет их производят на основании принципа наложения,

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧАСТИ II

Приложение Е

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ

§ Е.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПЕЙ

Электрические цепи с переменными во времени параметрами представляют собой такие электрические цепи, в состав которых входят активные сопротивления, индуктивности, емкости и взаимные индуктивности, изменяющиеся во времени (если в состав цепи входит хотя бы одно изменяющееся во времени сопротивление, она принадлежит к рассматриваемому классу цепей).

Угольный микрофон — простейшее изменяющееся активное сопротивление (рис. Е.1, *а*). Сопротивление его является функцией звукового давления, оказываемого мембраной на порошок графита.

Индуктивная катушка с незамкнутым ферромагнитным сердечником, который выдвигается из катушки и вдвигается в нее (рис. Е.1, *б*), — пример переменной во времени индуктивности.

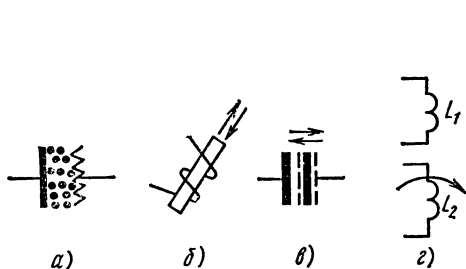


Рис. Е.1

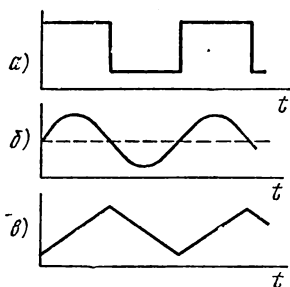


Рис. Е.2

Конденсатор, пластины которого раздвигаются и сдвигаются, не соприкасаясь (рис. Е.1, *в*), — пример емкости, изменяющейся во времени.

Две индуктивные катушки L_1 и L_2 (рис. Е.1, *г*), взаимное расположение которых меняется во времени (например, если одна из них вращается вокруг оси, перпендикулярной рисунку), — пример взаимной индукции, меняющейся во времени.

Изменение параметров цепи во времени может происходить под действием внешней механической силы или чисто электрическим путем.

Параметр цепи может изменяться во времени периодически и непериодически. Рис. Е.2, *а* — *в* иллюстрирует несколько различных периодических законов изменения параметров.

§ Е.2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Несмотря на то что цепи с переменными во времени параметрами являются линейными цепями (т. е. описываются линейными дифференциальными уравнениями), они обладают свойствами, сближающими их с нелинейными цепями.

Переменные во времени сопротивления, подобно нелинейным сопротивлениям, являются генераторами высших гармоник тока и напряжения. В силу этого в цепях с переменными параметрами протекают токи не только тех частот, которые имеют источник э. д. с. и переменную составляющую сопротивления, но и токи множества других частот.

Благодаря этому в цепях с переменными параметрами при наличии в составе их индуктивностей и емкостей могут возникать резонансные явления на высших и низших гармониках при отсутствии гармоник данной кратности у источника э. д. с.

Обратим внимание на то, что амплитуды отдельных гармоник тока в цепях с переменными параметрами линейно зависят от амплитуд остальных гармоник (в нелинейных цепях аналогичная зависимость нелинейна).

Наряду с этим цепи с переменными во времени параметрами обладают линейным свойством, принципиально отличающим их от нелинейных цепей. Так, в цепях с переменными во времени параметрами амплитуды гармоник тока и напряжения пропорциональны амплитуде э. д. с. источника. Другими словами, если э. д. с. источника увеличить вдвое, то и амплитуды токов и напряжений увеличатся вдвое. В цепях с нелинейными сопротивлениями, где имеет место насыщение, такой пропорциональности, как известно, нет.

Ранее говорилось, что переменное сопротивление является генератором высших гармоник тока. Убедимся в этом на простейшем примере. На рис. Е.3 изображена схема, состоящая из источника постоянной э. д. с. E и активного сопротивления, изменяющегося во времени в соответствии с кривой рис. Е.2, б;

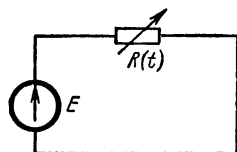


Рис. Е.3

$$R(t) = R_0(1 - k \sin \omega t), \quad k < 1 \quad (\text{Е.1})$$

По закону Ома, ток в цепи равен

$$i = \frac{E}{R(t)} = \frac{E}{R_0} \cdot \frac{1}{1 - k \sin \omega t}. \quad (\text{Е.1}')$$

Известно, что функция $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$ может быть разложена в степенной ряд:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n. \quad (\text{Е.2})$$

Роль, которую играет x в формуле (Е.2), в формуле (Е.1') выполняет $k \sin \omega t$. Поэтому при $k < 1$

$$\frac{i}{E/R_0} = 1 + k \sin \omega t + k^2 \sin^2 \omega t + k^3 \sin^3 \omega t + \dots \quad (\text{Е.3})$$

Воспользуемся известными из тригонометрии формулами:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^3 \alpha = -\frac{1}{4} \sin 3\alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha;$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha$$

и объединим слагаемые правой части ряда (Е.3) с аргументами одинаковой кратности. Получим

$$\begin{aligned} \frac{i}{E/R_0} = & \left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{3k^4}{8} + \dots\right) + \left(k + \frac{k^3}{4} + \dots\right) \sin \omega t - \\ & - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2} + \dots\right) \cos 2\omega t - \left(\frac{k^3}{4} + \dots\right) \sin 3\omega t + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, несмотря на то что в цепи рис. Е.3 включена постоянная э. д. с., а переменная составляющая сопротивления изменяется по закону синуса с частотой ω , ток имеет и высшие гармоники (частоты 2ω , 3ω). Постоянная составляющая и амплитуды гармоник тока нелинейно зависят от коэффициента k , но линейно зависят от э. д. с. E .

Обратим внимание также на то, что при $k \neq 0$ постоянная составляющая тока в цепи рис. Е.3 не равна E/R_0 , т. е. в схеме наблюдается своеобразный выпрямительный эффект.

Энергия, выделяющаяся в виде теплоты в цепи с переменными во времени параметрами, доставляется не только источниками э. д. с. (или тока), имеющимися в цепи, но и теми внешними источниками (например, механическими двигателями), которые совершают работу при изменении параметра (или параметров) цепи.

Какую долю энергии доставляет источник э. д. с., какую дает внешний источник, совершающий работу при изменении параметра, — это для каждой цепи с переменными параметрами следует рассматривать применительно к конкретным условиям. Доля энергии, доставляемая внешним источником, может составлять в одном предельном случае нуль, в другом — 100%.

§ Е.3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Если переменный параметр изменяется во времени периодически, претерпевая резкие скачкообразные изменения (см. рис. Е.2, а), то расчет цепей целесообразно проводить с помощью классического метода расчета переходных процессов. В этом случае постоянные интегрирования определяют исходя из законов коммутации и периодичности процесса. (Метод рассмотрен в примере 167.)

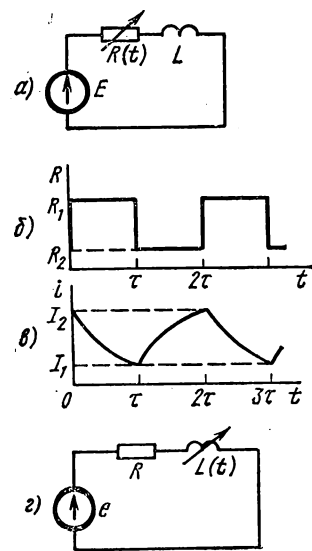


Рис. Е.4

Если же переменный параметр изменяется так, что его можно представить в виде постоянной составляющей в одной или нескольких синусоидальных составляющих, то расчет производят, применяя метод гармонического баланса.

Метод гармонического баланса применительно к нелинейным цепям был рассмотрен в § 9.49. Основные черты его и здесь те же. Последовательность расчета следующая: искомый ток (или какая-либо другая величина) изображается в виде ряда Фурье, например в виде

$$I_0 + I_{11} \sin \omega t + I_{12} \cos \omega t + \\ + I_{21} \sin 2\omega t + I_{22} \cos 2\omega t + \dots$$

Затем этот ток подставляют в дифференциальное уравнение цепи и выделяют из него уравнение, выражающее собой равенство постоянных составляющих левой и правой части его, уравнение, выражающее собой равенство синусных составляющих левой и правой частей, и т. д. Каждое из этих уравнений в общем случае содержит несколько неизвестных (I_0 , I_{11} , I_{12} , I_{21} , I_{22}), но является линейным уравнением относительно этих неизвестных (в этом отличие от нелинейных цепей). Далее решают систему линейных уравнений относительно I_0 , I_{11} , I_{12} , I_{21} , I_{22} . Метод гармонического баланса можно применять к расчету цепей, содержащих несколько переменных во времени параметров (например, изменяющихся во времени активное сопротивление и изменяющаяся во времени индуктивность), а э. д. с. может изменяться по любому периодическому закону. (Метод иллюстрируется на примере 168.)

Пример 167. В схеме рис. Е.4, а э. д. с. E и индуктивность L постоянны, а сопротивление R меняется в соответствии с рис. Е. 4, б. Определить закон изменения тока в цепи в установившемся режиме.

Р е ш е н и е. Так как сопротивление изменяется периодически, то и ток будет изменяться периодически. Обозначим значение тока в момент $t = 0$ через I_2 . В этот момент сопротивление цепи скачком возрастает со значения R_2 до R_1 и ток в цепи начинает уменьшаться. В момент $t = \tau$ ток принимает значение I_1 и сопротивление скачком уменьшается со значения R_1 до R_2 . Последнее приводит к тому, что ток начинает увеличиваться.

В интервале времени от $t = 0$ до $t = \tau$ ток можно представить в виде суммы при нулевого тока E/R_1 и свободного тока $C_1 e^{p_1 t}$. Причем p_1 есть корень характеристического уравнения цепи $p_1 L + R_1 = 0$; $p_1 = -\frac{R_1}{L}$; C_1 — постоянная интегрирования.

Во втором интервале времени $i = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 (t-\tau)}$, $p_2 = -\frac{R_2}{L}$. Задача сводится к определению двух постоянных: C_1 и C_2 .

При $t = 0$ $i = I_2$; следовательно,

$$I_2 = \frac{E}{R_1} + C_1. \quad (\text{E.4})$$

При $t = \tau$ $i = I_1$; поэтому

$$I_1 = \frac{E}{R_1} + C_1 e^{p_1 \tau}. \quad (\text{E.5})$$

Начальное значение тока для второго интервала времени (I_1) можно найти и иначе:

$$I_1 = \frac{E}{R_2} + C_2. \quad (\text{E.6})$$

К концу второго интервала времени, когда $t = 2\tau$, $i = I_2$,

$$I_2 = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 \tau}. \quad (\text{E.7})$$

Приравнивая правые части уравнений (E.4) и (E.7), получаем

$$\frac{E}{R_1} + C_1 = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 \tau}.$$

Аналогично, из уравнений (E.5) и (E.6) следует, что

$$\frac{E}{R_2} + C_2 = \frac{E}{R_1} + C_1 e^{p_1 \tau}.$$

Совместное решение двух последних уравнений дает:

$$C_1 = \frac{a(1 - e^{p_2 \tau})}{1 - e^{p_1 \tau + p_2 \tau}}; \quad (\text{E.8})$$

$$C_2 = -a + C_1 e^{p_1 \tau}, \quad (\text{E.9})$$

где $a = \frac{E}{R_2} - \frac{E}{R_1}$.

В первом интервале времени $i = \frac{E}{R_1} + C_1 e^{p_1 t}$, во втором $i = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 (t-\tau)}$.

Кривую $i = f(t)$ см. на рис. E.4, а.

Пример 168. В схеме рис. E.4, э. э. д. с. $e = E + E_m \sin(\omega t + \psi)$; $L = L_0(1 + k \sin \omega t)$; активное сопротивление R не является функцией времени. Определить постоянную составляющую, а также первую и вторую гармоники тока ($k < 1$).

Р е ш е н и е. В дифференциальное уравнение

$$Ri + \frac{d}{dt}(Li) = E + E_m \sin(\omega t + \psi) \quad (\text{E.10})$$

подставляем ток

$$i = I_0 + I_{11} \sin \omega t + I_{12} \cos \omega t + I_{21} \sin 2\omega t + I_{22} \cos 2\omega t. \quad (\text{E.11})$$

Выделив постоянную составляющую, получим уравнение

$$RI_0 = E. \quad (\text{E.12})$$

Равенство коэффициентов при $\sin \omega t$ в обеих частях уравнения (E.10) после подстановки в него (E.11) и деления на R дает

$$I_{11} - aI_{12} - \frac{ka}{2} I_{21} = \frac{E_m}{R} \cos \psi; \quad (\text{E.13})$$

Равенство коэффициентов при $\cos \omega t$ (после деления на R) дает

$$aI_{11} + I_{12} - \frac{ak}{2} I_{22} = -akI_0 + \frac{E_m}{R} \sin \psi; \quad (\text{E.14})$$

при $\sin 2\omega t$ —

$$akI_{11} + I_{21} - 2aI_{22} = 0; \quad (\text{E.15})$$

при $\cos 2\omega t$ —

$$akI_{12} + 2aI_{21} + I_{22} = 0; \quad (\text{E.16})$$

$$a = \frac{\omega L_0}{R}. \quad (\text{E.17})$$

Из уравнения (E.12) следует, что в схеме рис. E.4, z постоянная составляющая тока I_0 не зависит от переменной составляющей индуктивности и от переменной составляющей э. д. с. Однако постоянная составляющая потокоцепления, равная $L_0 I_0 + \frac{kL_0 I_{11}}{2}$, зависит от амплитуды переменной составляющей индуктивности (kL_0) и от амплитуды первой гармоники переменного тока.

Это свойство в известном смысле напоминает первое из свойств нелинейных симметричных сопротивлений, описанное в § 9.17.

Запишем решение уравнений (E.13)—(E.16):

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha^2 + \beta^2}; & I_{12} &= \frac{N - \beta I_{11}}{\alpha}; \\ I_{21} &= \gamma I_{11} - \nu I_{12}; & I_{22} &= \nu I_{11} - \gamma I_{12}; \\ M &= \frac{E_m}{R} \cdot \cos \psi; & N &= \frac{E_m}{R} \sin \psi - akI_0; \\ \alpha &= \frac{1 + 4a^2 - 0,5a^2 k^2}{1 + 4a^2}; & \gamma &= \frac{ak}{1 + 4a^2}; \\ \beta &= \frac{a(1 + 4a^2 - a^2 k^2)}{1 + 4a^2}; & \nu &= \frac{2a^2 k}{1 + 4a^2}. \end{aligned}$$

Изменяя величину постоянной э. д. с. E в схеме рис. E.4, z , можно управлять величиной переменного тока.

§ E.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Возникающие в электрических цепях без источников э. д. с. и источников тока незатухающие колебания, обусловленные периодическим изменением индуктивности или емкости системы, называют *параметрическими*. Колебания поддерживают либо за счет работы механической силы при периодическом изменении параметра, либо за счет энергии, вносимой в цепь при периодическом изменении параметра электрическим путем.

Частота первой гармоники параметрических колебаний оказывается в два раза меньше частоты изменения параметра.

На рис. E.5, a изображена простейшая цепь, в которой при определенных условиях возникают колебания рассматриваемого типа. Цепь состоит из линейной индуктивности L , нелинейного активного сопротивления, ограничивающего амплитуду

колебаний $R(i) = R_0 + ki^2$, и изменяющейся во времени емкости $C = C_0 - \Delta C \cos 2\omega t$ ($\frac{\Delta C}{C_0} \ll 1^*$). Сначала рассмотрим случай, когда емкость изменяется механическим путем.

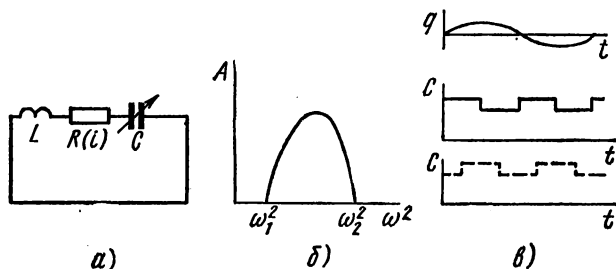


Рис. Е.5

Внешняя сила, совершающая работу при изменении величины емкости, доставляет в цепь энергию. Эта энергия равна потерям в активном сопротивлении. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + R(i) i + \frac{\int idt}{C_0 \left(1 - \frac{\Delta C}{C_0} \cos 2\omega t\right)} = 0.$$

В соответствии с формулой (Е.2) последнее слагаемое представим так:

$$\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos 2\omega t\right) \int idt.$$

Подставим в уравнение $i = a \sin \omega t - b \cos \omega t$, разобьем его на синусные и косинусные составляющие частоты ω (высшими гармониками пренебрежем) и решим относительно квадрата амплитуды тока $a^2 + b^2 = A^2$:

$$A^2 = \frac{2L}{3k\omega} \sqrt{\left(\frac{1}{LC_0}\right)^2 \left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2 - 4 \left(\omega^2 - \frac{1}{LC_0}\right)^2} - \frac{4R_0}{3k}.$$

При $A^2 > 0$ существуют колебания. $A^2 > 0$ при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ (рис. Е.5, б). $\omega_{1,2}$ определяют как корни уравнения $A^2 = 0$. При $\omega^2 = \frac{1}{LC_0}$

$$A^2 = A_{\max}^2 = \frac{2}{3k} \left(\sqrt{\frac{L}{C_0}} \frac{\Delta C}{C_0} - 2R_0 \right).$$

Условием возникновения колебаний в этом случае является

$$\frac{\Delta C}{C_0} > \frac{2R_0}{\sqrt{\frac{L}{C_0}}}.$$

Качественно поясним сущность процесса поступления энергии в цепь при изменении емкости во времени. Энергия, запасенная в электрическом поле емкости C

* Предположение, что $\frac{\Delta C}{C_0} \ll 1$, принято только для облегчения решения.

с зарядом $\pm q$ на пластинах, равна $W_э = \frac{q^2}{2C}$. Если при неизменном q емкость изменить на ΔC ($\frac{\Delta C}{C} \ll 1$), то энергия станет равна $\frac{q^2}{2(C + \Delta C)} \approx \frac{q^2}{2C} \left(1 - \frac{\Delta C}{C}\right)$.

Приращение энергии $\Delta W_э = -\frac{q^2}{2C} \cdot \frac{\Delta C}{C}$. Верхняя кривая рис. Е.5, *в* изображает по синусоидальному закону во времени изменяющийся заряд q . Средняя кривая иллюстрирует характер изменения емкости во времени (для простоты рассуждений он принят не синусоидальным, а прямоугольным). Когда заряд q проходит через максимум, емкость почти скачком уменьшается ($\Delta C < 0$); когда через нуль, емкость почти скачком возрастает ($\Delta C > 0$). Уменьшение емкости соответствует раздвиганию пластин конденсатора, а увеличение емкости — их сближению. Поэтому, чтобы при $q = q_m$ емкость почти скачком уменьшить, надо быстро раздвинуть пластины. Но пластины заряженного конденсатора притягиваются друг к другу. Следовательно, для того чтобы раздвинуть пластины, внешний источник энергии должен затратить работу на преодоление сил притяжения пластин. Эта работа переходит в энергию электрического поля конденсатора. За период изменения q энергия конденсатора дважды возрастает на величину $\Delta W_э = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \frac{|\Delta C|}{C}$.

Сближение пластин (увеличение C) происходит при $q = 0$, когда силы, действующие на пластины (силы поля), равны нулю. Поэтому при сближении пластин внешняя сила не совершает работы.

Поступление энергии в параметрическую цепь при изменении параметра цепи называют *накачкой энергии*. Рис. Е.5, *в* качественно поясняет также, почему частота колебания в схеме рис. Е.5, *а* в два раза меньше частоты изменения параметра (емкости). Если емкость стала бы изменяться во времени в соответствии с пунктирной кривой рис. Е.5, *в*, то энергия в цепь в этом случае не доставлялась бы (не накачивалась), ибо сколько энергии доставит в цепь внешний источник при уменьшении емкости, столько же цепь отдаст ему обратно при увеличении емкости. Накачка энергии в цепь может происходить не только при изменении емкости, но и при изменении во времени индуктивности.

§ Е.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

В параметрическом генераторе (ПГ) и параметрическом усилителе (ПУ) емкость варьируют не механическим, а чисто электрическим путем — изменяя емкость диода, находящегося в запортом состоянии. Схема показана на рис. Е.6, *а*, причем в ПГ

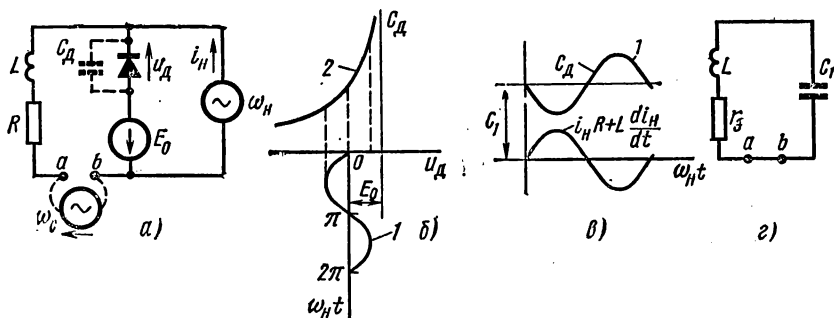


Рис. Е.6

зажимы *a b* замкнуты, а в ПУ к зажимам *a b* подключают источник сигнала частотой ω_c (показан пунктиром). Источник постоянной э. д. с. E_0 запирает диод. Накачка энергии осуществляется от источника синусоидального тока i_H частотой ω_H с амплитудой I_{Hm} . Этот ток проходит через R и L и совместно с E_0 образует падение напряже-

ния на диоде $u_d = -E_0 - Ri_n - L \frac{di_n}{dt}$ (кривая 1 рис. Е.6, б). Чтобы диод был заперт, это напряжение должно быть отрицательным. Диод будет заперт, если

$$I_{nm} < \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_n L)^2}}.$$

Зависимость емкости p - n -перехода C_d от напряжения на диоде u_d иллюстрируется кривой 2 рис. Е.6, б, а изменение емкости C_d во времени — кривой 1 рис. Е.6, в. Среднее за период значение емкости C_d обозначим C_1 .

Схема замещения параметрического генератора для частоты параметрических колебаний $\omega_p = \frac{\omega_n}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$ изображена на рис. Е.6, г. Вносимая генератором накачки (источником синусоидального тока) на частоте ω_n энергия компенсирует потери в активном сопротивлении R на частоте ω_p . Этот процесс можно трактовать как уменьшение активного сопротивления колебательного контура r_θ до нуля [сравните с ламповым генератором (см. § 9.55), в котором $r_\theta = R - \frac{MS}{C} = 0$]. Амплитуда установившихся колебаний определится энергетическим балансом.

При работе схемы рис. Е.6, а в качестве параметрического усилителя генератор накачки настраивают на такой режим, при котором вносимая им энергия уменьшает эквивалентное активное сопротивление контура r_θ не до нуля (как это было в случае ПГ), а до величины $r_\theta \ll R$. Параметры L и C_1 подбирают так, чтобы $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$.

При этом источник сигнала (источник э. д. с. E_c частотой ω_c) вызовет ток $I_c = \frac{E_c}{r_\theta}$,

а отношение выходного напряжения (на индуктивности) к входному $\frac{u_{\text{вых}}}{E_c} =$

$= \omega_c \frac{L}{r_\theta} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C_1}}}{r_\theta}$ будет достаточно велико — схема будет работать в качестве усилителя.

Приложение Ж

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ Ж.1. РЯД ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Как известно из предыдущего (см. § 8 2), в ряд Фурье можно разложить любую периодическую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям Дирихле.

Обозначим период функции через T и основную частоту через $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Ряд Фурье можно записать двояко.

Первая форма записи:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \psi_k). \quad (\text{Ж.1а})$$

Вторая форма записи:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k \sin k\omega_0 t + A''_k \cos k\omega_0 t), \quad (\text{Ж.1б})$$

где A_0 — постоянная составляющая ряда;
 A_k — амплитуда k -гармоник ряда;
 ψ_k — начальная фаза k -гармоники;

$$A'_k = A_k \cos \psi_k; \quad A''_k = A_k \sin \psi_k;$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt; \quad (\text{Ж.2})$$

$$A'_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt; \quad (\text{Ж.3})$$

$$A''_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt. \quad (\text{Ж.4})$$

Из курса математики известно, что

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

Следовательно,

$$\sin(k\omega_0 t + \psi_k) = \frac{1}{2j} [e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)}]. \quad (\text{Ж.5})$$

Подставив правую часть формулы (Ж.5) в формулу (Ж.1), получим

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=1}^{\infty} A_k [e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)}]. \quad (\text{Ж.5a})$$

Обозначим:

$$A_k = A_k e^{j\psi_k}. \quad (\text{Ж.6})$$

$$A_{-k} = -A_k e^{-j\psi_k}. \quad (\text{Ж.7})$$

Тогда ряд (Ж.5a) можно записать так:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (\text{Ж.8})$$

Формула (Ж.8) представляет собой комплексную формулу записи ряда Фурье. Текущий индекс k может принимать все целые числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$, но не может равняться нулю, так как постоянная составляющая ряда выделена в виде отдельного слагаемого.

Пример 169. Представить функцию $f(t) = 2 + 3 \sin(\omega_0 t + 30^\circ) + 2 \sin(2\omega_0 t - 45^\circ)$ в комплексной форме записи.

Решение.

$$A_0 = 2; \quad \dot{A}_1 = 3e^{j30^\circ}; \quad \dot{A}_{-1} = -3e^{-j30^\circ}; \\ \dot{A}_2 = 2e^{-j45^\circ}; \quad \dot{A}_{-2} = -2e^{j45^\circ}, \quad f(t) = 2 + \frac{1}{2j} [3e^{j(\omega_0 t + 30^\circ)} - \\ - 3e^{-j(\omega_0 t + 30^\circ)} + 2e^{j(2\omega_0 t - 45^\circ)} - 2e^{-j(2\omega_0 t - 45^\circ)}].$$

Составим выражение для комплексной амплитуды \dot{A}_k . По определению [см. формулу (Ж.6)]

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k} = A_k \cos \psi_k + j A_k \sin \psi_k = A'_k + j A''_k. \quad (\text{Ж.9})$$

Величина A'_k определяется формулой (Ж.3), A''_k — формулой (Ж.4).

Подставим правые части формул (Ж.3) и (Ж.4) в формулу (Ж.9):

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\sin k\omega_0 t + j \cos k\omega_0 t) dt = \frac{2j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t) dt,$$

или

$$A_k = \frac{2j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (\text{Ж.10})$$

Подставим правую часть формулы (Ж.10) в формулу (Ж.8). Будем иметь

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{jk\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (\text{Ж.11})$$

§ Ж.2. СПЕКТР ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Ряд Фурье — это тригонометрический ряд, представляющий собой изображение периодической функции суммой синусов, амплитуды которых конечны, а аргументы кратны основной частоте ω_0 .

Под интегралом Фурье понимают тригонометрический ряд, представляющий непериодическую функцию суммой бесконечно большого числа синусов, амплитуды которых бесконечно малы, а аргументы соседних синусов отличаются на бесконечно малую величину.

Формулу для интеграла Фурье получают из формулы для ряда Фурье [из формулы (Ж. 11)] предельным переходом при стремлении периода T к бесконечности.

На функцию $f(t)$ при представлении ее интегралом Фурье накладывают ограничение, а именно: полагают, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ есть величина конечная (не бесконечно большая). Это серьезное ограничение. Ряд функций этому условию не удовлетворяет*.

* Среди функций $f(t)$, для которых интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ расходится, наиболее важной для практики является функция $f(t) = A$, где A — постоянное число. Для того чтобы эту функцию представить интегралом Фурье, пользуются следующим приемом. Находят интеграл Фурье для функции $f(t) = Ae^{-\beta t}$, где $\beta > 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$. Для этой функции $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ сходится, поэтому она может быть представлена интегралом Фурье. Далее в полученном выражении устремляют β к нулю.

Так как, по определению [см. формулу (Ж.2)],

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt,$$

а при $T \rightarrow \infty$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ есть величина конечная, то $A_0 = 0$. Преобразуем величину

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt,$$

стоящую под знаком суммы в формуле (Ж.11). С этой целью произведение $k\omega_0$ заменим на ω и под ω будем понимать изменяющуюся (текущую) частоту. В ряде Фурье разность двух смежных частот $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Следовательно,

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

При $T \rightarrow \infty$, заменив $\Delta\omega$ дифференциалом $d\omega$, получим

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Обозначим

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{Ж.12})$$

Формула (Ж.12) дает возможность преобразовать функцию времени $f(t)$ в функцию частоты $S(j\omega)$; преобразование (Ж.12) называют *прямым преобразованием Фурье*; $S(j\omega)$ называют спектром функции $f(t)$. Это комплексная величина, зависящая от вида функции $f(t)$. В соответствии с формулой (Ж.12) в формуле (Ж.11) заменим $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$ на $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) d\omega$ и учтем, что при изменении k от $-\infty$ до $+\infty$ $\omega = k\omega_0$ также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} e^{i\omega t} S(j\omega) d\omega.$$

Заменив сумму интегралом, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{Ж.13})$$

Формула (Ж.13) представляет собой запись *интеграла Фурье (формулу обратного преобразования Фурье)*. Она выражает непериодическую функцию $f(t)$ в виде бесконечно большого числа синусоидальных колебаний с бесконечно близкими частотами и бесконечно малыми амплитудами $S(j\omega) d\omega$ [$S(j\omega)$ конечно, но произведение $S(j\omega) d\omega$ бесконечно мало, так как бесконечно мала величина $d\omega$].

В соответствии с формулой (Ж.13) для нахождения реакции системы на любое воздействие следует его представить в виде бесконечно большого числа гармонических воздействий, символическим методом найти реакцию системы на каждое из воздействий и затем просуммировать реакции на все воздействия.

Преобразования (Ж.12) и (Ж.13) являются взаимно обратными преобразованиями.

Отметим, что представление функции $f(t)$ в комплексной форме в виде интеграла Фурье [формулы (Ж.13)] привело к необходимости формально ввести отрицательную угловую частоту.

Сопоставим формулу (Ж.12) с формулой преобразования по Лапласу:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (\text{Ж.14})$$

при условии, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Если учесть, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ и заменить p на $j\omega$, то формула (Ж.14) переходит в формулу (Ж.12). Следовательно, формулы для спектра функции $S(j\omega)$ могут быть получены из соответствующих формул для изображений по Лапласу, если в последних p заменить на $j\omega$.

Пример 170. Пользуясь таблицей (см. стр. 362), найти спектр $S(j\omega)$ функции $f(t) = e^{-\alpha t}$, полагая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Решение. Изображение по Лапласу $\frac{1}{\alpha + p}$. Заменяем p на $j\omega$ и получим спектр $S(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$; $S(j\omega)$ есть комплексная величина, равная $S(\omega) e^{j\varphi}$. Модуль ее равен $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$; аргумент $\varphi_G = \text{arctg} \frac{-\omega}{\alpha}$.

График $S(\omega)$ для экспоненциального импульса изображен на рис. Ж.1, а.

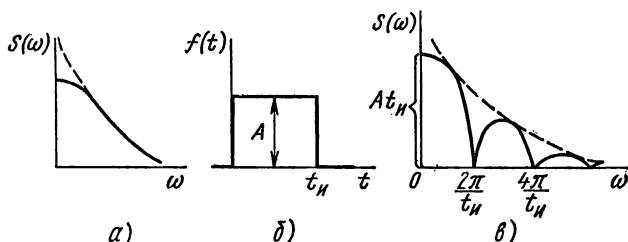


Рис. Ж.1

Пример 171. Найти $S(\omega)$ для прямоугольного импульса (рис. Ж.1, б) амплитудой A и длительностью t_n .

Решение. По формуле (Ж.12) находим спектр

$$S(j\omega) = A \int_0^{t_n} e^{-j\omega t} dt = A \frac{1 - e^{-j\omega t_n}}{j\omega}.$$

Модуль

$$S(\omega) = \frac{2A}{\omega} \left| \frac{\sin \omega t_n}{2} \right|.$$

График этой функции приведен на рис. Ж.1, в. Пунктиром показана огибающая.

§ Ж. 3. ТЕОРЕМА РЕЙЛИ

Теорему Рейли записывают следующим образом:

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (\text{Ж.15})$$

Функция $f(t)$ равна нулю при $t < 0$. $S(\omega)$ представляет собой модуль спектра $S(j\omega)$ функции $f(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{Ж.16})$$

Если принять, что $f(t)$ есть напряжение, приложенное к активному сопротивлению в 1 ом, то левая часть в (Ж.15) представляет собой энергию, выделяющуюся в этом сопротивлении.

Таким образом, *площадь квадрата модуля спектра $S(\omega)$ является энергией, рассеиваемой в активном сопротивлении, на которое воздействует $f(t)$.*

В качестве основы при выводе теоремы Рейли служит обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части последнего равенства на $f(t)$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

В правой части изменим порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega.$$

В соответствии с формулой (Ж.16)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = S(-j\omega);$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) S(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(\omega) d\omega.$$

Для перехода к формуле (Ж.15) учтем, что при $t < 0$ функция $f(t) = 0$. Это дает возможность заменить в левой части нижний предел с $-\infty$ на 0. Приняв во внимание,

что квадрат модуля $S^2(\omega)$ есть четная функция частоты, заменим $\int_{-\infty}^{+\infty}$ в правой части

последнего уравнения на $2 \int_0^{+\infty}$. В результате получим формулу (Ж.15).

§ Ж.4. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА В РАДИОТЕХНИКЕ И В ИМПУЛЬСНОЙ ТЕХНИКЕ

Спектральный (частотный) метод исследования процессов в электрических цепях основан на использовании понятий спектров воздействующих импульсов и частотных свойств цепей. Особенно широко его применяют в радиотехнике при рассмотрении вопросов прохождения модулированных колебаний через усилители, фильтры и другие устройства, в импульсной технике при рассмотрении вопросов прохождения через четырехполюсники коротких импульсов длительностью порядка нескольких микросекунд, а в некоторых случаях даже нескольких наносекунд. Допускается, чтобы модулированное колебание или соответственно импульс, пройдя через четырехполюсник, изменился по амплитуде, на некоторое время t_0 запоздал во времени, но недопустимо,

чтобы существенно изменилась форма импульса (колебания) на выходе по сравнению с формой импульса (колебания) на входе. Недопустимость изменения формы импульса (колебания) следует из того, что именно в форме импульса (колебания) заключена информация, которую он несет.

Положим, что на вход некоторого четырехполюсника с передаточной функцией $K(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ при нулевых начальных условиях воздействует сигнал $f_1(t)$, имеющий спектр $S_{\text{вх}}(j\omega)$. На выходе четырехполюсника появится сигнал $f_2(t)$, спектр которого

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = K(j\omega) S_{\text{вх}}(j\omega). \quad (\text{Ж.17})$$

Здесь

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как сигнал $f_2(t)$ может отличаться от сигнала $f_1(t)$ по величине (по амплитуде), положим, в a раз, может запаздывать на некоторое время t_0 , но по форме должен быть таким же, как и $f_1(t)$, то можно записать, что $f_2(t) = af_1(t - t_0)$.

Если к функции $f_2(t)$ применить преобразование Фурье, то окажется, что спектр функции $f_2(t)$ будет равен

$$aS_{\text{вх}}(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (\text{Ж.18})$$

Действительно,

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = a \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Введем новую переменную $t_1 = t - t_0$. Тогда

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = a e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 = a e^{-j\omega t_0} S_{\text{вх}}(j\omega).$$

Сравнивая (Ж.17) и (Ж.18), замечаем, что

$$K(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = a e^{-j\omega t_0}.$$

Следовательно, для прохождения импульса или модулированного колебания через четырехполюсник без искажения формы необходимо, чтобы модуль передаточной функции четырехполюсника был постоянен (не зависел от частоты), а аргумент $\varphi(\omega) = -\omega t_0$ линейно изменялся в функции частоты (рис. Ж.2, а).

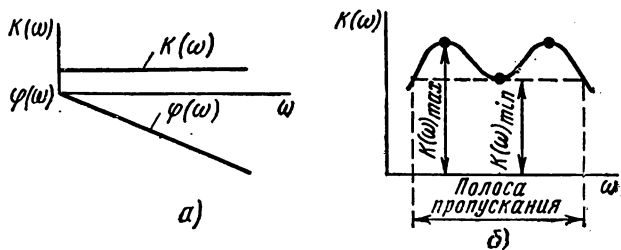


Рис. Ж.2

В реальных четырехполюсниках эти условия могут быть выполнены лишь приближенно в некоторой полосе частот, которую называют *полосой пропускания*. Полоса пропускания ограничена значениями ω , при которых отношение максимального зна-

чения $K(\omega)$ к минимальному равно $\sqrt{2}$ — см. в качестве примера рис. Ж.2, б (такой характеристикой обладает, например, схема рис. 5.42, а). Для этой полосы приближенно полагают, что $K(\omega) = \text{const}$ и $\varphi(\omega) = -\omega t_0$.

Для того чтобы сигнал при прохождении через четырехполосник не изменил или почти не изменил своей формы, необходимо, чтобы важнейшие гармонические составляющие частотного спектра сигнала находились внутри полосы пропускания четырехполосника. Для импульсных сигналов треугольной, трапециевидной, прямоугольной, колоколообразной и некоторых других форм принимают, что они занимают полосу частот, грубо говоря, от $\omega = 0$ до $\omega = \frac{2\pi}{t_n}$, где t_n — длительность импульса.

Так как в полосе пропускания идеальные условия для прохождения импульса все же не выполняются, то, проходя через четырехполосник, импульс в какой-то степени искажается. Определить степень искажения можно двумя способами, основанными на частотных представлениях.

Первый способ состоит в непосредственном применении прямого и обратного преобразований Фурье.

Основные этапы этого способа таковы: 1) нахождение спектра $U_1(j\omega)$ входного сигнала $u_1(t)$; 2) определение передаточной функции четырехполосника $K(j\omega)$; 3) получение спектра выходного сигнала $U_2(j\omega) = K(j\omega)U_1(j\omega)$; 4) определение $u_2(t)$ по $U_2(j\omega)$.

Последнюю операцию можно осуществить с помощью формулы (Ж.13), но практически ее удобнее выполнить, используя таблицу изображений по Лапласу, заменив $j\omega$ на p в $U_2(j\omega)$.

Такой путь решения мало чем отличается от решения той же задачи операторным методом и для сложных схем оказывается малоприменимым, поскольку решение достаточно громоздко, и, пользуясь им, трудно сделать вывод о том, как тот или иной конкретный элемент схемы при неизменных остальных влияет на фронт импульса и на его вершину. Пользуясь этим методом, трудно также судить о том, какие элементы схемы в наибольшей степени влияют на деформацию фронта, какие — на деформацию вершины импульса.

В литературе по импульсной технике получил распространение второй способ решения, также основанный на спектральных представлениях. В основу его положено то обстоятельство, что искажение формы фронта выходного импульса по сравнению с формой фронта входного импульса зависит от свойств передаточной функции четырехполосника на высоких, теоретически на бесконечно больших частотах, а искажение вершины импульса определяется свойствами передаточной функции на низких частотах, теоретически на частотах, близких к нулю.

Для того чтобы в этом убедиться, сделаем некоторые выкладки. Взяв в качестве исходной формулу (10.63') и заменив в ней входное напряжение $u(t)$ на $u_1(t)$, ток $i(t)$ на выходное напряжение четырехполосника, переходную проводимость $g(t)$ на переходную функцию четырехполосника $h(t)$, будем иметь

$$u_2(t) = u_1(t) h(0) + \int_0^t u_1(t - \tau) h'(\tau) d\tau. \quad (\text{Ж.19})$$

Положим, что напряжение $u_1(t)$, подводимое в момент $t = 0$ к цепи с нулевыми начальными условиями, является синусоидальным и по амплитуде равно 1:

$$u_1(t) = \text{Im} [1 \cdot e^{j\omega t}], \quad (\text{a})$$

где 1 представляет собой комплексную амплитуду входного напряжения, т. е. $\dot{U}_1 = 1$. Учтем, что

$$u_1(t - \tau) = \text{Im} [1 \cdot e^{j\omega t} e^{-j\omega \tau}]. \quad (\text{б})$$

После подстановки (а) и (б) в формулу (Ж.19) получим

$$u_2(t) = \text{Im} \left\{ \left[h(0) + \int_0^t h'(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} \right\}.$$

Комплексную амплитуду напряжения $u_2(t)$ в установившемся синусоидальном режиме частоты ω получим, если в квадратной скобке положим $t \rightarrow \infty$:

$$\dot{U}_2(\omega) = h(0) + \int_0^{\infty} h'(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Передаточная функция четырехполюсника

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1} = h(0) + \int_0^{\infty} h'(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

При $\omega = \infty$

$$K(j\infty) = h(0). \quad (\text{Ж.20})$$

При $\omega = 0$

$$K(0) = h(\infty). \quad (\text{Ж.21})$$

Из формулы (Ж.20) следует, что свойства переходной функции четырехполюсника в начальный момент, т. е. $h(0)$, определяются свойствами передаточной функции на бесконечно большой частоте $K(j\infty)$. В свою очередь формула (Ж.21) свидетельствует о том, что свойства переходной функции при относительно больших моментах времени определяются свойствами передаточной функции при нулевой частоте.

Таким образом, чтобы не исказился фронт импульса, надо обеспечить условия неискаженной передачи на высоких частотах, а для сохранения формы вершины импульса надо обеспечить условия неискаженной передачи на низких частотах.

Для того чтобы выяснить влияние отдельных элементов схемы на искажение формы импульса, прежде всего составляют полную схему замещения четырехполюсника, учитывая в ней все факторы, влияющие на частотные свойства [паразитные емкости ламп, импульсных трансформаторов, индуктивности рассеяния трансформаторов, емкостные свойства p - n -переходов транзисторов, зависимость коэффициентов усиления транзисторов от скорости процесса (от частоты ω)]. Затем из полной схемы замещения образуют две расчетных схемы.

Первая схема представляет собой расчетную схему для высоких частот и служит для выяснения степени искажения фронта импульса. Эту схему получают из полной схемы замещения путем закорачивания последовательно включенных емкостей по пути следования сигнала (относительно больших по сравнению с паразитными) и разрыва индуктивностей, включенных параллельно активным сопротивлениям схемы.

Вторая схема представляет собой расчетную схему для низких частот и служит для выяснения степени деформирования вершины импульса. Эту схему получают из полной схемы замещения, оставляя в ней последовательно включенные емкости по пути следования сигнала, оставляя в ней индуктивности, включенные параллельно активным сопротивлениям, и закорачивая последовательные индуктивности по пути следования сигнала. Паразитные емкости в низкочастотной схеме не учитывают.

В каждой из этих расчетных схем с учетом упрощений, о которых шла речь в § 10.16, число остающихся индуктивностей и емкостей оказывается значительно меньше, чем в полной схеме замещения.

Для каждой из схем характеристическое уравнение оказывается часто первой или второй, сравнительно редко третьей степени, и потому влияние каждого из элементов схемы на искажение фронта и вершины импульса может быть выявлено относительно легко. Расчет переходного процесса в высокочастотной и в низкочастотной схемах производят обычно операторным методом.

Окончательный результат (кривую всего переходного процесса) получают, сопоставляя решения для этих двух схем. Вопрос об искажении заднего фронта импульса принципиально решается так же, как и вопрос об искажении переднего фронта импульса.

Проиллюстрируем сказанное на примере. На рис. Ж.3, а изображена схема лампового усилителя на сопротивлениях, где R_n — нагрузочное сопротивление; C_p — относительно большая разделительная емкость (через нее проходит только переменная составляющая выходной величины); C_2 — относительно малая емкость нагрузки и (или) емкость второго каскада усиления. Пунктиром показаны источник анодного

напряжения E_a и весьма малые по сравнению с C_p (по несколько пикофард) межэлектродные емкости C_{ca} , C_{ck} и C_1 (емкость анод-катод и емкость монтажа). В дальнейшем емкости C_{ca} и C_{ck} не учитываем, как оказывающие малое влияние на работу схемы.

Схема замещения для расчета переходного процесса относительно малых по амплитуде переменных составляющих представлена на рис. Ж.3, б. Она является

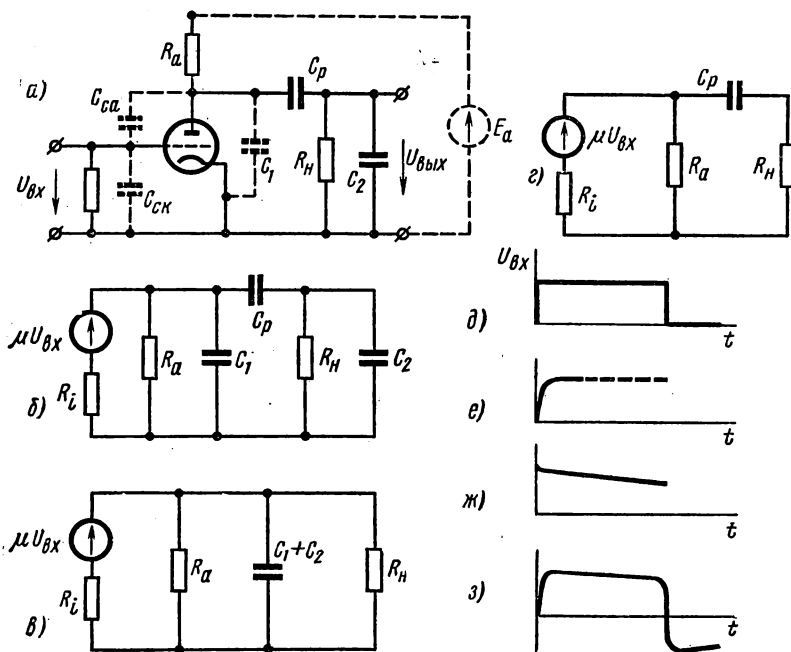


Рис. Ж.3

схемой третьего порядка. Укороченные схемы для формирования фронта (рис. Ж.3, в) и для формирования вершины импульса (рис. Ж.3, г) являются схемами первого порядка.

Для схемы рис. Ж.3, в

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{\mu}{R_i} \cdot \frac{U_{\text{вх}}(p)}{g_{\text{э1}} + p(C_1 + C_2)},$$

$$\text{где } g_{\text{э1}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_n}.$$

Для схемы рис. Ж.3, г

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{\mu R_n}{R_i g_{\text{э2}}} \cdot \frac{p C_p \cdot U_{\text{вх}}(p)}{1 + \frac{g_{\text{э1}}}{g_{\text{э2}}} R_n p C_p}; \quad g_{\text{э2}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_a}.$$

Если входное напряжение представляет собой прямоугольный импульс рис. Ж.3, д, то фронт выходного напряжения будет в виде нарастающей экспоненты рис. Ж.3, е, а вершина — в виде спадающей экспоненты рис. Ж.3, ж. Результирующая кривая $U_{\text{вых}}$ изображена на рис. Ж.3, з. Подбор параметров усилителя осуществляют исходя из допустимой деформации фронта и вершины выходного импульса по сравнению с входным импульсом.

§ Ж.5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Положим, что есть несколько однотипных систем, находящихся в одинаковых условиях, и в них происходят в принципе одинаковые процессы. В силу влияния на процесс различных случайных факторов, имеющих вероятностный характер, процессы в системах могут несколько отличаться друг от друга. В результате наблюдения можно установить, какая величина x при фиксированном моменте времени t является наиболее вероятной.

Плотность вероятности случайного процесса обозначают $W(x, t)$. Она выражает собой вероятность того, что в момент времени t значение величины x находится в интервале от x до $x + dx$. Функцией распределения $F(x)$ называют вероятность наступления события, при котором значение величины x , характеризующей это событие, находится в интервале от $-\infty$ до x .

Случайные процессы могут быть разделены на стационарные и нестационарные. *Стационарными* называют случайные процессы, для которых все функции распределения не зависят от изменения начала счета времени. Для *нестационарных* случайных процессов функции распределения зависят от времени.

В качестве примера на рис. Ж.4, а и б изображены кривые некоторого стационарного случайного процесса. Для этих кривых характерно, что вероятность возникновения колебания с некоторой амплитудой остается той же, если сдвинуть начало счета времени. Иная картина имеет место на рис. Ж.4, в и г. На них изображены кривые $x(t)$ для некоторого нестационарного случайного процесса. На рис. Ж.4, в, начиная с некоторого момента времени, $x(t)$ неограниченно возрастает, а на рис. Ж.4, г — стремится к нулю. Ясно, что для этих кривых сдвиг начала счета времени изменяет вероятностные зависимости.

Для стационарных случайных процессов среднее по множеству — обозначается \bar{x} — равно среднему по времени — обозначается $\langle x \rangle$, т. е. $\bar{x} = \langle x \rangle$.

Это положение называют *эргодической теоремой* (гипотезой). Эргодическая теорема служит основанием для того, чтобы, обрабатывая всего одну из временных зависимостей $x(t)$, полученную экспериментально, судить о статистических свойствах всех зависимостей $x(t)$ при стационарном случайном процессе в изучаемой системе. Для характеристики стационарных случайных процессов $x(t)$ вводят автокорреляционную и взаимную корреляционную функции.

Автокорреляционная функция $R(\tau)$ является мерой взаимной связи функции $x(t)$ и функции $x(t + \tau)$, смещенной по отношению к $x(t)$ на время τ :

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt. \quad (\text{Ж.22})$$

Свойства $R(\tau)$:

1) $R(\tau)$ — функция четная, т. е. $R(-\tau) = R(\tau)$. В этом можно убедиться, введя в (Ж.22) новую переменную $t_1 = t + \tau$;

2) если $x(t)$ — функция периодическая, то $R(\tau)$ для нее может быть представлена в виде суммы автокорреляционных функций от постоянной и от синусоидально изменяющихся составляющих;

3) если в $x(t)$ имеются гармонические составляющие, то $R(\tau)$ не содержит информации о начальных фазах гармонических составляющих;

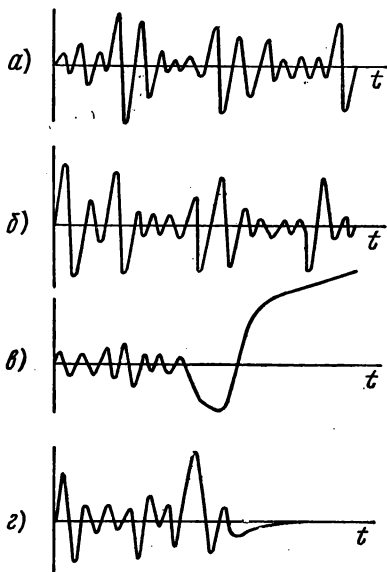


Рис. Ж.4

4) для $x(t)$ без постоянной и гармонических составляющих $R(\tau)$ максимальна при $\tau = 0$;

5) для случайных функций времени без постоянной и гармонических составляющих $R(\tau)$ уменьшается с увеличением τ и уже при сравнительно небольших τ стремится к нулю. Объясняется это тем, что для чисто случайного процесса значение $x(t + \tau)$ уже при относительно небольшом τ не зависит от того значения, которое имела функция $x(t)$ в момент времени t .

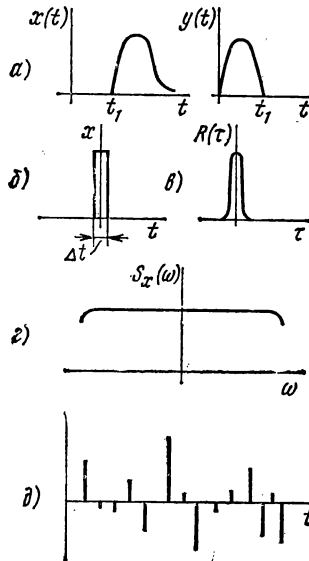


Рис. Ж.5

3. Для случайных функций времени $x(t)$ и $y(t)$, не содержащих постоянной и гармонических составляющих одинаковой частоты (для некоррелированных функций), $R_{xy}(\tau) = 0$.

§ Ж.6. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

К случайным функциям времени и к их корреляционным функциям применяют преобразование Фурье. Так как в общем случае случайная функция времени $x(t)$ или ее корреляционная функция может и не стремиться к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, то, для того чтобы к ним можно было применить преобразование Фурье, поступают следующим образом: преобразование Фурье применяют к функции $x_1(t)$, которая не равна нулю, в интервале от $-T$ и $+T$ и равна нулю вне этого интервала. Если затем $T \rightarrow \infty$, то $x_1(t)$ будет стремиться к $x(t)$, а Фурье-изображение функции $x_1(t)$ будет стремиться к Фурье-изображению функции $x(t)$.

Подобное же рассуждение может быть проведено по отношению к Фурье-изображению корреляционной функции.

Фурье-изображением автокорреляционной функции $R_x(\tau)$ называют

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{Ж.24})$$

Но

$$R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} = R_x(\tau) (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau).$$

Если учесть четность $R_x(\tau)$ и $\cos \omega\tau$ и нечетность $\sin \omega\tau$, то

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (\text{Ж.25})$$

$S_x(\omega)$ — это спектральная плотность автокорреляционной функции, которая обладает следующими свойствами:

- 1) действительна и положительна при всех частотах;
- 2) является функцией четной;
- 3) так же, как и $R_x(\tau)$, она не содержит информации о фазе гармоник, если таковые содержатся в $x(t)$.

По $S_x(\omega)$ может быть найдена автокорреляционная функция:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (\text{Ж.26})$$

Если на четырехполюсник с передаточной функцией $K(j\omega)$, модуль которой $K(\omega)$, воздействует случайная функция спектральной плотностью $S_{x_{вх}}(\omega)$, то (вывод опускаем) спектральная плотность величины на выходе четырехполюсника

$$S_{x_{вых}}(\omega) = K^2(\omega) S_{x_{вх}}(\omega). \quad (\text{Ж.27})$$

§ Ж.7. БЕЛЫЙ ШУМ И ЕГО СВОЙСТВА

Представим себе прямоугольный импульс весьма малой, в пределе бесконечно малой длительности Δt (рис. Ж.5, б). Нетрудно убедиться в том, что $R_x(\tau)$ для него будет не равна нулю только при $\tau < \left| \pm \frac{\Delta t}{2} \right|$. Вне этого интервала $R_x(\tau) = 0$. Из предыдущего ясно, что если $R_x(\tau)$ не равна нулю только при очень малых τ , то процесс, которому соответствует эта функция, является случайным.

Положим теперь, что $R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, где α очень велико, т. е. положим, что $R_x(\tau)$ очень быстро спадает в функции τ по закону экспоненты (рис. Ж.5, в). Найдем $S_x(\omega)$ для этого случая. По определению,

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

На рис. Ж.5, г качественно построен график $S_x(\omega)$, полагая, что α очень велико. Если α очень велико, то влияние ω^2 на величину знаменателя $S_x(\omega)$ будет сказываться только при очень больших ω , соизмеримых с α , т. е. спектральная плотность $S_x(\omega)$ кратковременного игольчатого импульса постоянна в очень широком диапазоне частот.

На основании изложенного можно сказать, что чем уже импульс, чем он короче во времени, тем шире его частотный спектр.

Белый шум представляет собой совокупность множества беспорядочно и без всякой связи следующих друг за другом игольчатых импульсов (см., например, рис. Ж.5, д), амплитуды которых имеют случайный характер и подчиняются нормальному закону распределения, при котором плотность распределения вероятности

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ — некоторые коэффициенты; коэффициент a — математическое ожидание; σ — дисперсия.

Так как спектральная плотность каждого импульса постоянна в достаточно широком диапазоне частот, то и для белого шума $S_x(\omega) = \text{const}$.

§ Ж.8. ИСТОЧНИКИ ВНУТРЕННИХ ШУМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Активные сопротивления, электронные лампы, транзисторы, магнитные усилители и многие другие элементы схем являются источниками внутренних шумов. Величины э. д. с., которыми можно в расчетном смысле эквивалентировать эти шумы,

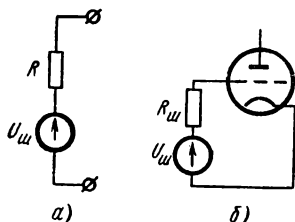


Рис. Ж.6

обычно очень малы и составляют часто несколько микровольт. Но если шумящие элементы схем включены на вход усилителя, имеющего очень большой коэффициент усиления, то шумы ограничивают порог чувствительности схемы и с ними приходится считаться.

Активное сопротивление как источник шума

Вследствие хаотического теплового движения электронов в некоторый момент времени на одном конце сопротивления образуется избыток электронов, а на другом конце — недостаток. В смежный момент времени может возникнуть обратная картина. На концах активного сопротивления как бы возникает сторонняя э. д. с.

Шум, возникающий в активном сопротивлении, является белым шумом и имеет спектральную плотность

$$S_{\text{ш}}(\omega) = 2kTR,$$

где k — постоянная Больцмана, равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град;

T — абсолютная температура сопротивления;

R — величина сопротивления, ом.

Шумящее сопротивление в расчетном смысле эквивалентировать схемой рис. Ж.6, а. В ней последовательно соединены шумящее сопротивление и источник э. д. с. Квадрат напряжения этого источника

$$U_{\text{ш}}^2 = \frac{S_{\text{ш}}(\omega) \Delta \omega}{\pi} = 4kTR\Delta f.$$

Через $\Delta \omega$ обозначена полоса пропускания усилителя, на вход которого включено шумящее сопротивление ($\Delta \omega = 2\pi\Delta f$).

Дробовой эффект в электронной лампе

Эффект испускания электронов нитью накала лампы носит случайный характер. В некоторый момент времени из нити накала вылетает больше электронов, в смежный с ним момент времени — меньше. В результате анодный ток при отсутствии сигнала на сетке лампы непостоянен и имеет некоторую переменную составляющую, которая колеблется около среднего значения анодного тока.

Эффект называют *дробовым*, так как он напоминает шум дробинok при их ударе о мишень. Шум, вызванный дробовым эффектом, также является белым шумом, спектральная плотность которого не зависит от частоты. В расчетном смысле дробовой эффект учитывают, включив в сеточную цепь лампы (рис. Ж.6, б) некоторое сопротивление $R = R_{\text{ш}}$ и источник э. д. с. напряжением $U_{\text{ш}}$:

$$U_{\text{ш}}^2 = 4kTR\Delta f.$$

Для маломощных триодов пользуются формулой $R_{\text{ш}} = \frac{2 \div 3}{S}$ ком. Здесь S крутизна в *ма/в*. Для многосеточных ламп $R_{\text{ш}}$ значительно больше, чем для триодов.

Приложение 3

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

§ 3.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть квалифицированы следующим образом:

1) по виду основных операций, которые необходимо выполнять для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, — на графические (графо-аналитические) и аналитические;

2) по характеру величины, для которой производится расчет, — на расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Под графическими (графо-аналитическими) методами расчета понимают такие методы, в которых основными операциями при определении зависимости от времени искомых токов и напряжений являются графические построения, нередко сопровождаемые и некоторыми вспомогательными числовыми подсчетами.

В графических (графо-аналитических) методах расчета характеристики нелинейных сопротивлений обычно не требуется выражать аналитически.

В данной главе рассмотрены следующие графические методы:

1) метод, основанный на графическом подсчете определенного интеграла (в § 3.2);

2) метод Вольткина — метод, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой (см. § 3.5). Аналитическими методами называют такие методы расчета, в которых основной операцией при определении зависимостей искомых токов и напряжений от времени является точное или приближенное аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи, в которые подставляются аналитические выражения характеристик нелинейных сопротивлений.

Далее рассмотрены следующие аналитические методы:

1) метод интегрируемой нелинейной аппроксимации (см. § 3.3);

2) метод кусочно-линейной аппроксимации (см. § 3.4);

3) метод медленно меняющихся амплитуд (см. § 3.7).

Графические методы имеют следующие преимущества перед аналитическими: 1) в них не требуется, как правило, выражать характеристики нелинейных сопротивлений аналитически и поэтому они свободны от погрешностей, связанных с аналитическим представлением характеристик нелинейных сопротивлений;

2) они довольно просто позволяют учесть гистерезис и другие сложные нелинейные зависимости.

В свою очередь аналитические методы также имеют перед графическими преимущества. Из них основным является то, что они дают возможность получить решение в общем виде, а не для какого-то одного конкретного сочетания параметров. Получить решение в общем виде является желательным потому, что анализ его позволяет выяснить все особенности процесса при изменении всех параметров.

Как уже упоминалось, все методы расчета могут быть подразделены на две подгруппы: на расчет по мгновенным значениям токов и напряжений и на расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений.

Расчет по огибающим важен, потому что он дает возможность, не вдаваясь в мелкие детали процесса внутри каждого периода действующей в схеме периодической э. д. с. или внутри каждого периода автоколебаний в автоколебательной системе, судить о макроструктуре процесса. Расчет по огибающим возможен не только для нелинейных цепей; он представляет существенный интерес и для линейных цепей.

Точность расчета по огибающим уступает точности расчета по мгновенным значениям. Однако относительная быстрота проведения расчета по огибающим и возможность судить о макроструктуре процесса часто являются решающими факторами.

Там, где это необходимо, целесообразно дополнять расчет по огибающим расчетом по мгновенным значениям. Метод расчета по огибающим представлен методом

медленно меняющихся амплитуд (см. § 3.7). Все остальные методы относятся к подгруппе расчета по мгновенным значениям.

Довольно часто электрические цепи содержат несколько нелинейных сопротивлений. Переходные процессы в таких цепях можно рассчитывать путем применения метода Вольткина (см. § 3.5).

Теория переходных процессов в электрических цепях с управляемыми нелинейными индуктивными, емкостными и активными сопротивлениями выходит за рамки курса. Интересующиеся этим вопросом могут ознакомиться с ним, например, по [34].

§ 3.2. МЕТОД РАСЧЕТА, ОСНОВАННЫЙ НА ГРАФИЧЕСКОМ ПОДСЧЕТЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла, применим к нелинейным электрическим цепям, описываемым дифференциальными уравнениями первого порядка, допускающими разделение переменных. Последняя оговорка очень существенна. Она свидетельствует о том, что метод применим к цепям постоянного тока и, как правило, не применим к цепям переменного тока.

Основные этапы и последовательность расчета проиллюстрируем на конкретном примере.

Пример 171. Нелинейный конденсатор через сопротивление R подключен к источнику напряжения U (рис. 3.1, а). Кулонвольтная характеристика конденсатора

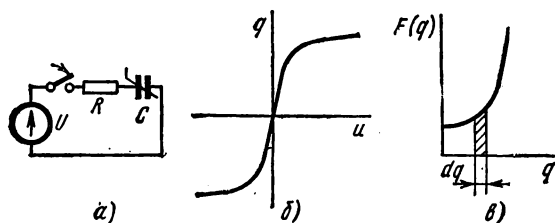


Рис. 3.1

задана графически (рис. 3.1, в). Полагая, что в схеме нулевые начальные условия, построить кривые изменения заряда q , напряжения на емкости u_C и тока i в функции времени.

Решение. Составим дифференциальное уравнение:

$$u_C(q) + R \frac{dq}{dt} = U. \quad (3.1)$$

Разделим переменные:

$$dt = R \frac{dq}{U - u_C(q)} \quad \text{или} \quad dt = RF(q) dq, \quad (3.1a)$$

где

$$F(q) = \frac{1}{U - u_C(q)}. \quad (3.2)$$

Для построения кривой (рис. 3.1, в) используем кулонвольтную характеристику. С этой целью задаемся произвольным значением q , по кулонвольтной характеристике находим соответствующее ему u_C и по формуле (3.2) подсчитываем $F(q)$. При $q = 0$ $u_C = 0$ и $F(q) = \frac{1}{U}$; при $u_C = U$ $F(q) = \infty$. Левую часть уравнения (3.1a) интегрируем по t от 0 до текущего значения t , а правую — по q от $q = 0$ до текущего

значения q . Получаем

$$t = R \int_0^q F(q) dq. \quad (3.3)$$

Подынтегральное выражение $F(q) dq$ представляет собой заштрихованную площадь рис. 3.1, а.

Согласно уравнению (3.3), для определения времени t , соответствующего какому-то конкретному значению q , надо подсчитать площадь, выраженную определенным интегралом $\int_0^q F(q) dq$, и умножить ее на сопротивление R .

Кривая 1 рис. 3.2, а качественно представляет собой зависимость q от t . С помощью кривой $q = f(t)$ и кулонвольтовой характеристики нелинейной емкости строят зависимость $u_C = f(t)$ — кривая 2 рис. 3.2, а.

Величина тока в цепи для произвольного момента времени определяется по формуле $i = \frac{U - u_C}{R}$ (кривая 3).

§ 3.3. РАСЧЕТ МЕТОДОМ ИНТЕГРИРУЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Метод интегрируемой нелинейной аппроксимации основан на аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления такой нелинейной функцией, которая, во-первых, достаточно точно отображает характеристику нелинейного сопротивления в предполагаемом интервале перемещения изображающей точки по ней и, во-вторых (и это главное), дает возможность точно проинтегрировать уравнение в известных функциях.

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования получают зависимость исследуемой величины от времени и от всех параметров схемы.

Метод применим к дифференциальным уравнениям первого порядка, а также к уравнениям, сводящимся к уравнениям первого порядка путем замены переменных.

Пример 172. Определить закон нарастания во времени тока i при включении рубильника в схеме рис. 3.2, б. Принять, что зависимость тока i от потокосцепления ψ нелинейной индуктивности может быть выражена формулой $i = k\psi^4$. В схеме нулевые начальные условия.

Решение. Из дифференциального уравнения цепи

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = U$$

следует, что $dt = \frac{d\psi}{U - Ri}$.

Вынесем из знаменателя множитель R и заменим i на $k\psi^4$:

$$dt = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{I_y - k\psi^4}, \text{ где } I_y = \frac{U}{R}.$$

Обозначим $I_y = a^2$ и заменим $k\psi^4$ на ψ_1^4 ; $d\psi$ на $\frac{d\psi_1}{\sqrt[4]{k}}$. Получим:

$$dt = \frac{1}{R\sqrt[4]{k}} \frac{d\psi_1}{a^2 - \psi_1^4}; \frac{1}{a^2 - \psi_1^4} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a - \psi_1^2} + \frac{1}{a + \psi_1^2} \right);$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt[4]{k} R k^{\frac{1}{4}}} \left(0,5 \ln \frac{1 + \sqrt[4]{\frac{i}{I_y}}}{1 - \sqrt[4]{\frac{i}{I_y}}} + \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{i}{I_y}} \right). \quad (3.4)$$

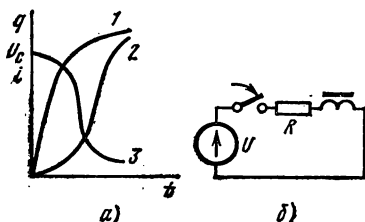


Рис. 3.2

С помощью формулы (3.4) можно определить значение времени, которое необходимо, чтобы отношение $\frac{i}{I_y}$ достигло заданной величины.

§ 3.4. РАСЧЕТ МЕТОДОМ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации — в нем осуществляется замена характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых линий — дает возможность перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным уравнениям, отличающимся друг от друга лишь значениями коэффициентов.

Каждое из линейных уравнений справедливо для того интервала времени, в течение которого рабочая точка перемещается по соответствующему линеаризованному участку. Метод применим к цепям, содержащим источники постоянной и (или) синусоидальной э. д. с., к цепям первого и более высоких порядков.

Для сложных нелинейных цепей с источником (источниками) синусоидальной э. д. с. основная трудность расчета данным методом заключается в определении постоянных интегрирования и времени работы на каждом линейном участке исходя из законов коммутации. В сложных цепях неизвестные определяют обычно из трансцендентных уравнений. Для решения трансцендентных уравнений часто применяют ЭВМ.

Впервые идея метода была высказана русским физиком Н. Д. Папалекси в 1912 г.

Рассмотрим основные этапы расчета на простейшем примере.

Пример 173. Конденсатор заряжается через нелинейное сопротивление от источника постоянного напряжения U (рис. 3.3, а). Определить закон изменения тока в цепи при зарядке.

Решение. Вольтамперную характеристику нелинейного сопротивления заменим двумя отрезками прямых линий (рис. 3.3, б). Пусть на участке от $i = 0$ до $i = i_1$

$$u_{HC} = k_2 i,$$

где u_{HC} — напряжение на нелинейном сопротивлении.

На участке $i > i_1$

$$u_{HC} = U_0 + k_1 i.$$

Размерность коэффициентов k_1 и k_2 равна размерности сопротивления.

В уравнение цепи

$$u_C + u_{HC} = U$$

вместо u_C подставим $\frac{1}{C} \int idt$ и для первого участка заменим u_{HC} на $U_0 + k_1 i$, а для второго — на $k_2 i$.

При зарядке конденсатора ток будет постепенно уменьшаться от максимального значения до нуля. Поэтому изображающая точка будет перемещаться сначала по первому участку, а затем по второму. Для первого участка

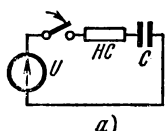
$$\frac{1}{C} \int idt + U_0 + k_1 i = U$$

для второго участка

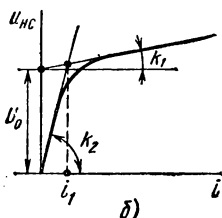
$$\frac{1}{C} \int idt + k_2 i = U.$$

Решение для первого участка:

$$i = i_{np} + i_{ca} = 0 + A_1 e^{-\frac{t}{k_1 C}}.$$



а)



б)

Рис. 3.3

Постоянную интегрирования найдем из начального условия: при $t = 0$ напряжение $u_C = 0$; поэтому

$$\begin{aligned} U_0 + k_1 i_1(0_+) &= U; \\ i_1(0_+) &= \frac{U - U_0}{k_1} = A_1. \end{aligned}$$

Следовательно, при работе на первом участке

$$i = \frac{U - U_0}{k_1} e^{-\frac{t}{k_1 C}}. \quad (3.5)$$

Пусть при $t = t_1$ ток i станет равным i_1 . Подставим в (3.5) i_1 вместо i и t_1 вместо t и решим полученное уравнение относительно t_1 :

$$t_1 = k_1 C \ln \frac{U - U_0}{k_1 i_1}. \quad (3.6)$$

Дальнейшая работа происходит по второму участку, на нем $t = A_2 e^{-\frac{(t-t_1)}{k_2 C}}$, причём $A_2 = i_1$.

* * *

Практически важной является задача о переходном процессе при подключении ненагруженного трансформатора (с разомкнутой вторичной обмоткой) или нелинейной индуктивности к источнику синусоидальной э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \varphi)$ (рис. 3.4, а). Рассмотрим эту задачу качественно.

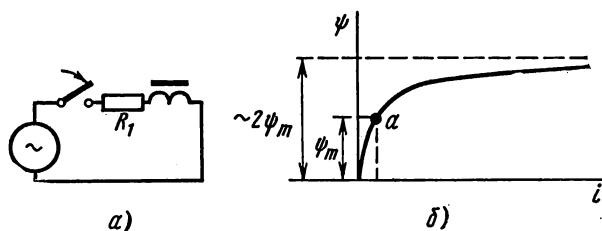


Рис. 3.4

Если активное сопротивление первичной обмотки трансформатора R_1 мало, а амплитуда установившегося значения потокоцепления $\psi_m = \frac{E_m}{\omega}$ соответствует окрестности точки a (рис. 3.4, б), то при включении рубильника в момент, когда э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \varphi)$ проходит через нулевое значение, в цепи возникают очень большие кратковременные броски тока. Последние могут превышать амплитуду тока холостого хода трансформатора в 20—50 и даже более раз.

Физически они возникают вследствие того, что к концу первого полупериода $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ после включения потокоцепление достигает величины, очень близкой к $2\psi_m$.

Из кривой рис. 3.4, б видно, что если $\varphi \approx 2\psi_m$, то в цепи будет очень большой ток, во много раз превышающий ток при $\varphi = \psi_m$.

Хотя броски тока и очень кратковременны, но все же в системах с мощными трансформаторами они нежелательны, так как требуют принятия специальных мер для устранения вредных последствий.

§ 3.5. МЕТОД РАСЧЕТА, ОСНОВАННЫЙ НА ЗАМЕНЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПРИБЛИЖЕННОЙ СУММОЙ

В 1916 г. Волынским был разработан графо-аналитический метод расчета переходных процессов в нелинейных цепях, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой по формуле трапеций.

Из курса математики известно, что если интервал интегрирования $(b - a)$ в определенном интеграле $\int_a^b f(x) dx$ разбить на n равных частей и через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ обозначить значение функции $f(x)$ соответственно при $x = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h$ и т. д., где $h = \frac{b-a}{n}$, то

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (3.7)$$

Рассмотрим метод на примере цепи рис. 3.5, а. Цепь состоит из нелинейной индуктивности и сопротивлений R_1 и R_2 . Зависимость ψ от i для нелинейной индуктивности задана кривой рис. 3.5, в. Пусть э. д. с. $e_1(t)$ имеет формулу, изображенную на рис. 3.5, б.

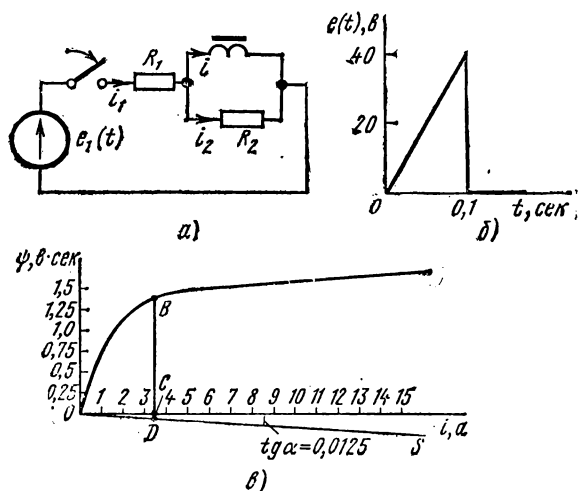


Рис. 3.5

Обозначим токи в ветвях в соответствии с рис. 3.5, а. Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i + i_2; \quad i_2 = \frac{1}{R_2} \frac{d\psi}{dt}; \quad i_1 R_1 + \frac{d\psi}{dt} = e_1(t).$$

Отсюда

$$\frac{d\psi}{dt} + iR = e(t); \quad (3.8)$$

$$R = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}; \quad e(t) = \frac{e_1(t)}{1 + \frac{R_1}{R_2}}. \quad (3.9)$$

Разобьем время t на равные промежутки τ ($t = n\tau$); тогда вместо $\frac{b-a}{2n}$ будем иметь $\frac{n\tau - 0}{2n} = \frac{\tau}{2}$.

Последовательно проинтегрируем (3.9) от $t = 0$ до $t = \tau$, затем от $t = 0$ до $t = 2\tau$ и т. д. и каждый раз используем формулу трапеций,

Получим для первого интервала

$$\psi_1 - \psi_0 + R \int_0^{\tau} i dt = \int_0^{\tau} e(t) dt.$$

Но по формуле (3.7) имеем $\int_0^{\tau} i dt = \frac{\tau}{2} i_1$.

Следовательно,

$$\psi_1 + \frac{R\tau}{2} i_1 = \psi_0 + \int_0^{\tau} e(t) dt, \quad (3.10)$$

где ψ_0 — остаточное потокоцепление, в дальнейшем примем его равным нулю.
Для $t = 2\tau$

$$\psi_2 + R \int_0^{2\tau} i dt = \int_0^{2\tau} e(t) dt.$$

Но по формуле (3.7),

$$\int_0^{2\tau} i dt = \frac{\tau}{2} (2i_1 + i_2).$$

Поэтому для $t = 2\tau$ (не смешивать с током i_2 на рис. 3.5, а)

$$\psi_2 + \frac{R\tau}{2} i_2 = \int_0^{2\tau} e(t) dt - R\tau i_1. \quad (3.11)$$

При $t = n\tau$

$$\psi_n + \frac{R\tau}{2} i_n = \int_0^{n\tau} e(t) dt - R\tau \sum_{k=1}^{n-1} i_k. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) позволяет последовательно определять i_1, i_2, i_3 и т. д. В левой части его находятся неизвестный ток i_n и соответствующее ему потокоцепление ψ_n , а величина $\sum i_k$ в правой части известна по результатам подсчета за предыдущие интервалы времени.

Последовательность расчета следующая:

1. По заданной $e(t)$ строим кривую $\int_0^{n\tau} e(t) dt$ (рис. 3.6).
2. На рис. 3.5, в, где изображена кривая $\psi = f(i)$, проводим прямую OS под углом α к оси абсцисс, тангенс которого равен $\frac{R\tau}{2}$.
3. Значение i_1 находим из уравнения (3.10). С этой целью на рис. 3.6 берем значение $\int_0^{\tau} e(t) dt$. Пусть оно будет равно отрезку $11'$. Переносим этот отрезок на рис. 3.5, в и перемещаем его параллельно оси ординат до тех пор, пока один конец его не окажется на кривой $\psi(i)$ — точка B , а другой — на прямой OS — точка D . При этом отрезок BC равен ψ_1 , отрезок CD равен $\frac{R\tau}{2} i_1$. Ток i_1 равен отрезку OC .
4. Значение тока i_2 находят аналогично, только в соответствии с уравнением (3.11) из $\int_0^{2\tau} e(t) dt$, равного отрезку $22'$, надо предварительно вычесть $R\tau i_1$, а затем уже перемещать полученный отрезок параллельно оси ординат.

5. Для определения i_3 из $\int_0^{3\tau} e(t) dt$ надо вычесть $R\tau(i_1 + i_2)$ и т. д.

Если $e(t)$ — функция периодическая с периодом T , то рекомендуется брать

$$\tau = \left(\frac{1}{18} \div \frac{1}{36} \right) T.$$

Если $e(t)$ — функция непериодическая, то величину τ выбирают после предварительных пробных подсчетов.

Пример 174. В схеме рис. 3.5, а $R_1 = R_2 = 2$ ом. Зависимость $\psi = f(i)$ изображена в виде кривой рис. 3.5, я.

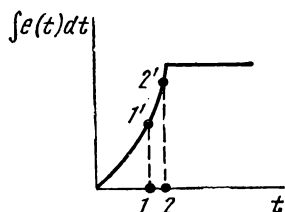


Рис. 3.6

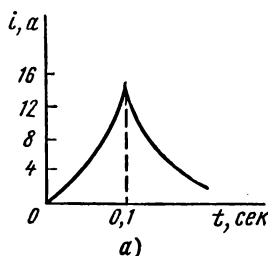
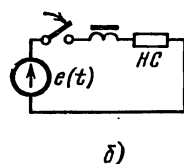


Рис. 3.7



В интервале от $t = 0$ до $t = 0,1$ сек $e(t) = 400t$, далее $e(t) = 0$. Построить кривую $i = f(t)$, полагая начальные условия нулевыми и остаточное потокосцепление $\psi_0 = 0$.

Решение. Принимаем интервал времени $\tau = 0,025$ сек. Находим $\frac{R\tau}{2} = 0,0125$. Результаты подсчетов сводим в табл. 3.1.

Таблица 3.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n\tau$	0,025	0,05	0,075	0,10	0,125	0,15	0,175	0,2
$\int_0^{n\tau} e(t) dt$	0,125	0,5	1,13	2	2	2	2	2
$\frac{R_1\tau}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \sum_{k=1}^{n-1} i_k$	0	0,004	0,01	0,057	0,45	0,565	0,645	0,715
$\int_0^{n\tau} e(t) dt - \frac{R_1\tau}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \sum_{k=1}^{n-1} i_k$	0,125	0,496	1,12	1,943	1,55	1,435	1,355	1,285
i_n	0,16	0,24	1,85	15,7	4,6	3,2	2,76	2,36

По данным табл. 3.1 на рис. 3.6 построен график $\int e(t) dt = f(t)$, а на рис. 3.7, а построен график $i = f(t)$.

§ 3.6. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СХЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

Метод Волынкина может быть применен и к цепям с несколькими нелинейными сопротивлениями, а также к цепям, описываемым уравнениями второго, третьего и более высоких порядков.

В качестве примера рассмотрим вопрос о переходном процессе в простейшей цепи с двумя нелинейностями.

В схеме рис. 3.7, б к источнику э. д. с. $e(t)$ подключены последовательно соединенные нелинейная индуктивность (зависимость ψ от i задана) и нелинейное активное сопротивление с заданной вольтамперной характеристикой $u_R = f(i)$. Проинтегрируем уравнение цепи

$$\frac{d\psi}{dt} + u_R(i) = e(t)$$

по t от 0 до $t = n\tau$.

Учтем, что

$$\int_0^{n\tau} u_R(i) dt = \frac{\tau}{2} [2u_R(i_1) + 2u_R(i_2) + \dots + 2u_R(i_{n-1}) + u_R(i_n)].$$

Получим формулу, аналогичную (3.12):

$$\psi_n + \frac{\tau}{2} u_R(i_n) = \int_0^{n\tau} e(t) dt - \tau \sum_{k=1}^{n-1} u_R(i_k). \quad (3.13)$$

Последовательность расчета по формуле (3.13) такая же, как и по формуле (3.12).

Разница лишь в том, что вместо прямой $\frac{\tau Ri}{2}$ (прямой OS) на рис. 3.5, в надо нанести кривую $\frac{\tau}{2} u_R(i)$.

§ 3.7. МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД

В электротехнике и радиотехнике для расчета переходных процессов широко применяют метод медленно меняющихся амплитуд.

Этот метод был предложен в 1921 г. голландским физиком Ван-дер-Полем.

Рассмотрим основы этого метода на примере нелинейной цепи второго порядка, находящейся под воздействием периодической возмущающей силы.

Пусть уравнение этой цепи записано следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t. \quad (3.14)$$

Под действием периодической силы с частотой ω в цепи устанавливается вынужденное колебание с частотой ω , а высшие гармоники выражены слабо.

Примем, что искомая функция $x(t)$ может быть представлена так:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (3.15)$$

где a и b — медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения a и b во времени определяется тем, что производные от них по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с производными ωa и ωb , т. е.

$$\frac{da}{dt} \ll \omega a \quad \text{и} \quad \frac{db}{dt} \ll \omega b. \quad (3.16)$$

Если это учесть, то вместо того, чтобы взять

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t + \sin \omega t \frac{da}{dt} + \cos \omega t \frac{db}{dt}, \quad (3.17)$$

можно в первом приближении принять

$$\frac{dx}{dt} \approx a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t. \quad (3.18)$$

Аналогично, вместо того чтобы вторую производную брать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \approx & -\omega^2 a \sin \omega t - \omega^2 b \cos \omega t + \omega \cos \omega t \frac{da}{dt} - \omega \sin \omega t \frac{db}{dt} + \\ & + \frac{d^2a}{dt^2} \sin \omega t + \frac{d^2b}{dt^2} \cos \omega t + \omega \cos \omega t \frac{da}{dt} - \omega \sin \omega t \frac{db}{dt}, \end{aligned}$$

пренебрежем в ней слагаемыми второго порядка малости и оставим слагаемые первого порядка малости. Получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\left(\omega^2 a + 2\omega \frac{db}{dt}\right) \sin \omega t + \left(-\omega^2 b + 2\omega \frac{da}{dt}\right) \cos \omega t. \quad (3.19)$$

Обратим внимание на то, что слагаемые первого порядка малости оставлены в выражении для $\frac{d^2x}{dt^2}$ и ими пренебрежено в выражении для $\frac{dx}{dt}$. Объясняется это тем, что исследуемая цепь обладает малыми потерями, поэтому амплитуда второго слагаемого левой части уравнения (3.14) относительно мала по сравнению с амплитудами первого и третьего слагаемых левой части уравнения (3.14).

Далее, в функцию $f(x)$ вместо x подставим (3.15) и разложим $f(x)$ в ряд Фурье. Затем умножим ряд Фурье, которым выразилось $f(x)$, на $\frac{dx}{dt}$ [на правую часть формулы (3.18)]. Получим

$$\begin{aligned} f(x) \frac{dx}{dt} = & F_0(a, b) + F_1(a, b) \sin \omega t + F_2(a, b) \cos \omega t + \\ & + F_3(a, b) \sin 2\omega t + F_4(a, b) \cos 2\omega t + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Так как расчет ведется по первой гармонике, то постоянной составляющей $F_0(a, b)$ и высшими гармониками ряда Фурье [т. е. $F_3(a, b)$, $F_4(a, b)$] в дальнейшем пренебрежем.

В уравнение (3.14) подставим вместо $\frac{d^2x}{dt^2}$ правую часть (3.19), вместо $f(x) \frac{dx}{dt}$ подставим $F_1(a, b) \sin \omega t + F_2(a, b) \cos \omega t$ и вместо $\omega_0^2 x$ подставим $\omega_0^2 (a \sin \omega t + b \cos \omega t)$.

Тогда уравнение (3.14) разобьется на два уравнения. Одно из них [уравнение (3.21)] будет выражать собой равенство коэффициентов при $\sin \omega t$ в левой и правой частях уравнения (3.14), другое [уравнение (3.22)] — равенство коэффициентов при $\cos \omega t$ в левой и правой частях уравнения (3.14):

$$-2\omega \frac{db}{dt} + F_1(a, b) + a(\omega_0^2 - \omega^2) = A; \quad (3.21)$$

$$2\omega \frac{da}{dt} + F_2(a, b) + b(\omega_0^2 - \omega^2) = 0. \quad (3.22)$$

Система уравнений (3.21) и (3.22) представляет собой два совместных дифференциальных уравнения, составленных относительно мгновенных значений медленно меняющихся амплитуд a и b .

В общем случае решение системы (3.21) — (3.22) может производиться методом малого параметра или методами числового интегрирования, или при помощи метода Волюнкина. В частном случае, когда внешняя периодическая сила равна нулю

($A = 0$) и функция $F_1(a, b) = 0$, система сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{F_2(a)}{2\omega} \quad (b=0). \quad (3.23)$$

Ранее были рассмотрены основные этапы перехода от дифференциального уравнения для мгновенных значений [уравнение (3.14)] к дифференциальным уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. Метод применим и к другим, более сложным уравнениям.

В заключение необходимо отметить, что если максимальное значение слагаемого $f(x) \frac{dx}{dt}$ в уравнении (3.14) (и подобных ему), выражающее собой падение напряжения в активном сопротивлении контура (или контуров), соизмеримо с максимальными значениями остальных слагаемых уравнения (3.14), то в выражении $\frac{dx}{dt}$ должны быть сохранены слагаемые первого порядка малости, которыми ранее пренебрегли. Огибающая колебаний определяется уравнением $f(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$.

Пример 175. Определить закон нарастания амплитуд колебаний напряжения на сетке лампового генератора § 9.55.

Решение. Уравнение лампового генератора было выведено ранее [см. уравнение (9.56)]:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c - M \frac{di_a}{dt} = 0.$$

В свою очередь анодный ток i_a выразим через сеточное напряжение u_c следующим образом:

$$i_a = i_{a0} + a' u_c - b u_c^3$$

[ср. с уравнением (9.46), см. пунктирную кривую рис. 9.27].

Производная от анодного тока по времени

$$\frac{di_a}{dt} = (a' - 3b u_c^2) \frac{du_c}{dt}.$$

Подставив ее в уравнение (9.56), получим

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (RC - a'M + 3bMu_c^2) \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

Поделим последнее уравнение на $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, где ω_0 — угловая частота автоколебаний [см. формулу (9.61)], и обозначим:

$$k_1 = \frac{Ma' - RC}{LC}; \quad k_2 = \frac{3bM}{Ma' - RC}. \quad (3.24)$$

Тогда

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} - k_1 (1 - k_2 u_c^2) \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (3.25)$$

Примем:

$$x = u_c \sqrt{k_2}; \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - k_1 (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.26)$$

Множитель $-k_1 (1 - x^2)$ и представляет собой функцию $f(x)$ уравнения (3.14).

Так как на систему не действует внешняя периодическая сила и частота автоколебаний равна ω_0 , а не ω , то примем, что

$$x = a \sin \omega_0 t.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} \approx a\omega_0 \cos \omega_0 t; \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx 2\omega_0 \frac{da}{dt} \cos \omega_0 t - \omega_0^2 a \sin \omega_0 t. \quad (3.28)$$

Подставим (3.27) и (3.28) в (3.26). Учтем, что

$$\sin^2 \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{4} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t).$$

Получим

$$2\omega_0 \cos \omega_0 t \frac{da}{dt} - a\omega_0^2 \sin \omega_0 t + a\omega_0^2 \sin \omega_0 t - k_1 a\omega_0 \cos \omega_0 t + \\ + \frac{k_1 \omega_0 a^3}{4} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) = 0.$$

Так как расчет ведем по медленно меняющейся первой гармонике, то слагаемое $\cos 3\omega_0 t$ не учитываем. Получаем

$$2 \frac{da}{dt} = ak_1 (1 - 0,25 a^2). \quad (3.29)$$

Введем новую переменную: $y = 0,25 a^2$.

Вместо (3.29) будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y (1 - y). \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными:

$$k_1 t = \int \frac{dy}{y(1-y)}; \quad k_1 t = -\ln C_0 + \ln \frac{y}{1-y};$$

Здесь через $-\ln C_0$ обозначена постоянная интегрирования:

$$\frac{y}{1-y} = C_0 e^{k_1 t}; \quad y = \frac{C_0 e^{k_1 t}}{1 + C_0 e^{k_1 t}} = \frac{1}{1 + C_1 e^{-k_1 t}};$$

$$C_1 = \frac{1}{C_0}; \quad a = 2\sqrt{y} = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}};$$

$$x = a \sin \omega_0 t = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}} \sin \omega_0 t.$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе изменяется во времени следующим образом:

$$U_C = \frac{a}{\sqrt{k_2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}} \sqrt{\frac{a'M - RC}{3bM}}. \quad (3.31)$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем по начальному значению амплитуды напряжения U_C . Так, если при $t = 0$

$$U_C = U_C(0_-),$$

то

$$C_1 = \frac{4}{U_C^2(0_-)} \frac{a'M - RC}{3bM} - 1.$$

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе

$$u_C = U_C \sin \omega_0 t = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}} \sqrt{\frac{a'M - RC}{3bM}} \sin \omega_0 t. \quad (3.32)$$

§ 3.8. ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЕ ФЕРРИТОВЫХ СЕРДЕЧНИКОВ ИМПУЛЬСАМИ ТОКА

В устройствах счетно-решающей техники в качестве запоминающих элементов применяют миниатюрные ферритовые сердечники различной формы, в частности кольцевые с внешним диаметром порядка 1,5—3 мм из материала с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ). Через отверстия в них пропускают проводники, являющиеся одновитковыми обмотками (на рис. 3.8, а показан только один проводник). При записи информации по одному из проводников пропускают обычно прямоугольный или почти прямоугольный импульс тока (рис. 3.8, б) длительностью всего в несколько десятков наносекунд или несколько микросекунд. Под действием этого импульса сердечник перемагничивается. Хотя в ферритовом сердечнике и отсутствуют макроскопические вихревые токи (в нем нет замкнутых токопроводящих контуров, играющих роль вторичных обмоток трансформатора), но перемагничивается он все же не мгновенно.

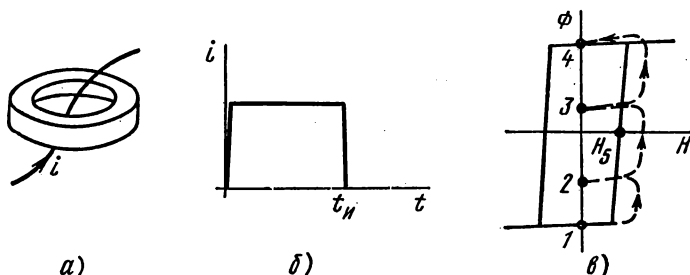


Рис. 3.8

На длительность процесса перемагничивания сердечника при высоких скоростях перемагничивания решающее влияние оказывает *магнитная вязкость*. Она как бы создает внутреннее поле трения, которое влияет на процесс перемагничивания. Это влияние зависит от величины и скорости изменения намагниченности и от превышения воздействующей H над коэрцитивной силой.

При математическом описании тормозящего действия магнитной вязкости исходят из уравнения

$$H_0 = H_{\text{вн}} - a \frac{dJ}{dt}, \quad (3.33)$$

где H_0 — напряженность поля, при котором происходит перемагничивание феррита с ППГ. H_0 несколько больше коэрцитивной силы H_s по статической петле гистерезиса. Величину H_0 находят опытным путем для каждого типа феррита.

Напряженность внешнего поля, вызванная током i , $H_{\text{вн}} = \frac{i\omega}{l}$, где ω — число витков.

Член $a \frac{dJ}{dt}$ учитывает тормозящее действие вязкости. Множитель $a = \frac{1}{k \left(1 - \frac{J^2}{J_s^2}\right)}$,

где k — некоторый коэффициент; J — текущее значение намагниченности; J_s — намагниченность насыщения.

Разрешим уравнение (3.33) относительно $\frac{dJ}{dt}$, заменим J на индукцию B , а J_s на индукцию насыщения B_s . Получим уравнение относительно B :

$$\frac{dB}{dt} = k \left(1 - \frac{B^2}{B_s^2}\right) (H_{\text{вн}} - H_0). \quad (3.34)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Из (3.33) следует, что для перехода из точки 1 в точку 4 (рис. 3.8, в) под действием импульса тока i длительностью t_i надо выполнить соотношение

$$\int_0^{t_i} (H_{вн} - H_0) dt \geq \int_{-B_s}^{B_s} \frac{dB}{k(1 - B_s^2)} = M.$$

Если же $\int_0^{t_i} (H_{вн} - H_0) dt$ будет меньше M , то изображающая точка из положения 1 после прекращения действия импульса перейдет в точку 2 или 3 или им подобную [конечное состояние зависит от величины $\int_0^{t_i} (H_{вн} - H_0) dt$ и от амплитуды импульса тока].

Из состояния 1 в состояние 4 сердечник может быть переведен (в принципе) и иным путем — путем воздействия на него несколькими следующими друг за другом импульсами одинаковой полярности, для каждого из которых $\int_0^{t_i} (H_{вн} - H_0) dt < M$. После первого импульса рабочая точка перейдет из положения 1, скажем, в положение 2, после второго из 2 — в 3 и затем из 3 — в 4.

Приложение И

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЖИМОВ РАБОТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

§ И. 1. УСТОЙЧИВОСТЬ «В МАЛОМ» И УСТОЙЧИВОСТЬ «В БОЛЬШОМ». УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Режим работы электрической цепи, содержащей нелинейные сопротивления, может быть либо устойчивым, либо неустойчивым. Как правило, режим работы большинства электрических цепей является устойчивым и в довольно редких случаях — неустойчивым.

Различают устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом».

Под устойчивым режимом работы «в малом» понимают такой, при котором достаточно малое отклонение режима работы от исходного (установившегося) — независимо от того, какими причинами оно вызвано, — с течением времени уменьшается и система возвращается к исходному состоянию.

При неустойчивом режиме работы «в малом» достаточно малое отклонение с течением времени увеличивается и система не возвращается в исходное состояние.

Устойчивым режимом работы «в большом» называют такой режим работы, при котором система, получив достаточно большое начальное отклонение, возвращается к исходному состоянию после прекращения действия возмущения.

Если при достаточно большом отклонении от исходного состояния по прекращении действия возмущения система не возвращается к исходному состоянию, то ее называют системой, неустойчивой «в большом».

Различие между устойчивостью «в малом» и устойчивостью «в большом» наглядно можно проиллюстрировать с помощью рис. И.1, а. На этом рисунке изображен желоб с помещенным в нем шариком. Если шарик толкнуть так, что он придет в положение 2, а затем предоставить его самому себе, то под действием силы тяжести шарик возвратится в исходное положение 1 (положение равновесия). Если же шарик толкнуть с большей силой, то он пройдет через положение 3 и выскочит из желоба. Таким образом система рис. И.1, а устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

В литературе можно встретить также термин устойчивость по Ляпунову. Системой, устойчивой по Ляпунову, называют систему, для которой можно указать область допустимых отклонений [область $\delta(\epsilon)$ на рис. И.1, б] от состояния равновесия (точки 0) и для которой ни одно из движений, начинающихся внутри области δ , никогда не достигнет границ некоторой заданной области ϵ .

Величина области δ зависит от величины области ϵ .

В нелинейных электрических цепях в общем случае возможны следующие режимы (типы движения): 1) состояние равновесия; 2) периодическое движение при отсутствии в системе источников периодической э. д. с. или тока — автоколебания; 3) периодическое движение с частотой источника периодической э. д. с. (или тока) — вынужденные колебания; 4) резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках; 5) квазипериодические (как бы непериодические) процессы по типу автомодуляции, а также ряд других, более сложных типов движений. Каждый из этих режимов (типов движений) может быть исследован на устойчивость*.

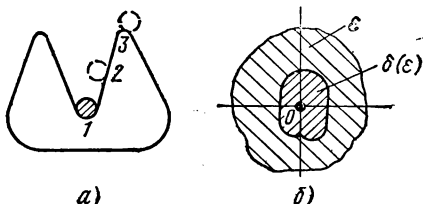


Рис. И.1

В большинстве практических задач производят исследование устойчивости «в малом». (Этот вопрос освещен в последующих параграфах.) Исследование устойчивости «в большом» производят путем анализа хода интегральных кривых на фазовой плоскости или путем использования «второй методы Ляпунова» [24]; здесь не рассматривается.

§ И.2. ОБЩИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ «В МАЛОМ»

Общие основы исследования устойчивости «в малом» применимы ко всем или почти ко всем известным в настоящее время типам движения. В каждом конкретном случае возможны некоторые особенности в применении общих принципов.

Для исследования устойчивости исследуемой величине x (или величинам) дают малое приращение Δx , развертывают уравнение, описывающее процесс, в ряд по степеням малого приращения Δx и ввиду малости Δx отбрасывают все члены ряда, содержащие Δx в степенях выше первой.

В полученном уравнении (уравнениях) выделяют слагаемые, содержащие Δx и производные от Δx по времени, и образуют из них дифференциальное уравнение (уравнения) относительно Δx . Уравнение относительно Δx алгебраизируют, получают характеристическое уравнение и определяют его корни.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения будет положительным или будет положительной действительная часть комплексно сопряженных корней, то это явится свидетельством того, что возникшее приращение Δx будет не убывать, а возрастать по времени, т. е. исследуемое движение будет неустойчивым.

Если же все действительные корни характеристического уравнения будут отрицательными, а все комплексно сопряженные корни имеют отрицательную действительную часть, то исследуемое движение будет устойчивым.

Характеристическое уравнение, составленное относительно приращения Δx , для системы второго порядка имеет вид

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0;$$

для системы третьего порядка —

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

* Основы теории устойчивости были заложены крупнейшим русским математиком А. М. Ляпуновым в 1892 г., выпустившим книгу «Общая задача об устойчивости движения».

Для суждения о характере корней характеристического уравнения разработано несколько математических критериев. Воспользуемся критерием Гурвица.

Критерий (теорема) Гурвица состоит в следующем: для того чтобы действительные части корней характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n = 0$$

были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры ($\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$) определителя Гурвица (Δ_n) были больше нуля.

Определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Следовательно, условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения выражают следующим образом:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

Сам определитель Гурвица Δ_n составляют так:

1) по главной диагонали определителя в порядке возрастания индексов выписывают коэффициенты от a_1 до a_n ;

2) в ту часть каждого столбца, которая расположена выше главной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке возрастания индексов;

3) в ту часть каждого столбца, которая расположена ниже главной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке уменьшения индексов (до a_0 включительно).

Следствием теоремы Гурвица является лемма: все коэффициенты характеристического уравнения ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$) устойчивой системы положительны.

Из изложенного вытекает, что для системы с характеристическим уравнением второго порядка положительные вещественные корни (или комплексно сопряженные с положительной действительной частью) будут в том случае, если какой-либо из коэффициентов уравнения (a_0, a_1, a_2) окажется отрицательным. Для системы с характеристическим уравнением третьего порядка положительные вещественные корни (или комплексно сопряженные с положительной действительной частью) будут в том случае: 1) если какой-либо из коэффициентов (a_0, a_2, a_3) окажется отрицательным или 2) если $a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0$.

Аналогичные заключения могут быть сделаны и для систем с характеристическими уравнениями более высоких порядков.

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ могут оказаться отрицательными в следующих основных случаях:

1) когда в состав исследуемой на устойчивость системы входят нелинейные активные сопротивления, обладающие падающим участком характеристики, и когда точка равновесия оказывается на падающем участке характеристики;

2) в схемах с чрезмерно большим воздействием выходной цепи на входную цепь — в схемах с чрезмерно большой положительной обратной связью. В этом случае поступление энергии из выходной цепи во входную превышает потребление энергии во входной цепи и приращение Δx возрастает;

3) в схемах с управляемыми нелинейными индуктивностями и управляемыми нелинейными емкостями при наличии неявно (а в некоторых случаях и явно) действующих обратных связей. В таких схемах обратные связи при определенных условиях приводят к появлению на характеристиках нелинейных индуктивностей или нелинейных емкостей падающих участков. Режим работы системы может оказаться неустойчивым, если изображающая точка окажется на падающем участке управляемой нелинейной индуктивности или управляемой нелинейной емкости.

§ И.3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМАХ С ПОСТОЯННОЙ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Когда рабочая точка по постоянному току окажется на падающем участке в. а. х., то состояние равновесия в системе при определенных условиях может оказаться неустойчивым.

При исследовании устойчивости нелинейное сопротивление заменяют расчетной схемой — схемой замещения. Она должна учитывать свойства НС как при медленных (при $\omega \rightarrow 0$), так и при весьма быстрых (при $\omega \rightarrow \infty$) малых приращениях тока и напряжения на НС.

Свойства НС при $\omega \rightarrow 0$ определяются самой в. а. х. НС, снятой при постоянном токе, на падающем участке которой $R_d < 0$.

Если к НС подвести некоторое постоянное напряжение или через него пропустить некоторый постоянный ток такой величины, чтобы рабочая точка оказалась на падающем участке в. а. х., и затем воздействовать на НС синусоидальным напряжением или

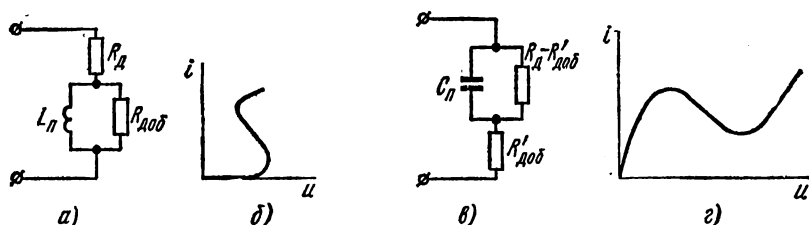


Рис. И.2

током малой амплитуды, то сопротивление $Z(j\omega)$, оказываемое НС синусоидальной составляющей малой амплитуды, оказывается комплексным числом. Опыт показывает, что при достаточно большой ω действительная часть этого сопротивления оказывается положительной, т. е. $\text{Re} Z(j\omega) > 0$. Объясняется это тем, что физические процессы в самом НС являются процессами инерционными и что инерционность проявляется с ростом частоты.

В одних НС инерционность вызвана тепловыми процессами, в других — процессами накопления энергии в электрическом и (или) магнитном полях, в третьих — процессами ионизации и деионизации (которые также протекают не мгновенно), в четвертых — инерционностью процессов диффузии носителей тока и емкостью, обусловленной объемными зарядами. Но чаще всего инерционность есть следствие нескольких взаимно связанных друг с другом процессов.

Таким образом, схема замещения НС при работе его на падающем участке по отношению к малым приращениям должна быть такой, чтобы при $\omega \rightarrow 0$ $\text{Re} Z(j\omega) = R_d < 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$ $\text{Re} Z(j\omega) > 0$.

На рис. И.2, а изображена одна из возможных схем замещения для НС с S-образной в. а. х. (рис. И.2, б), удовлетворяющая перечисленным условиям. В этой схеме L_n — некоторая малая индуктивность, которую часто называют «паразитной», и $R_{доб} > |R_d| > 0$ — некоторое добавочное активное сопротивление.

На рис. И.2, в изображена одна из возможных схем замещения для НС с N-образной в. а. х. (рис. И.2, г). В ней C_n — некоторая малая емкость, называемая часто «паразитной», и $R'_{доб} > 0$ — некоторое добавочное активное сопротивление. Параметры L_n и $R_{доб}$, а также C_n и $R'_{доб}$ зависят от физических процессов в НС и при переходе из одной точки на падающем участке в. а. х. в другую они изменяются. Эти параметры можно найти опытным путем.

В § И.5 дан пример на исследование устойчивости состояния равновесия в релаксационной автоколебательной системе с НС, имеющим S-образную в. а. х.

В § И.6 дан пример на исследование устойчивости состояния равновесия в автоколебательной системе с явно выраженной обратной связью.

§ И.4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПО ПЕРВОЙ ГАРМОНИКЕ

В качестве исходных уравнений при исследовании устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний обычно служат уравнения, получаемые по методу медленно меняющихся амплитуд (см. § 3.7).

Если через a и b обозначить медленно меняющиеся амплитуды синусной и косинусной составляющих исследуемого колебания, то из исходных уравнений системы можно получить два уравнения для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{da}{dt} = A(a, b); \quad (\text{И.1})$$

$$\frac{db}{dt} = B(a, b). \quad (\text{И.2})$$

Здесь A и B являются функциями амплитуд a и b , а также функциями всех параметров схемы, угловой частоты колебаний ω и амплитуды вынуждающей силы. Обозначим значения a и b в установившемся режиме (когда амплитуды не изменяются во времени) через a_0 и b_0 . Для определения a_0 и b_0 в уравнениях (И.1) и (И.2) следует положить $\frac{da}{dt} = 0$ и $\frac{db}{dt} = 0$ и решить систему уравнений:

$$A(a_0, b_0) = 0; \quad (\text{И.3})$$

$$B(a_0, b_0) = 0. \quad (\text{И.4})$$

Пусть в результате возмущения колебания получили малые приращения Δa и Δb и стали равными:

$$a = a_0 + \Delta a \quad \text{и} \quad b = b_0 + \Delta b.$$

Подставим эти значения a и b в уравнения (И.1) и (И.2), развернем $A(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b)$ и $B(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b)$ в ряд Тейлора по малым приращениям Δa и Δb и в силу малости приращений ограничимся слагаемыми ряда с первыми степенями Δa и Δb . Получим:

$$A(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b) = A(a_0, b_0) + \Delta a A_1 + \Delta b B_1; \quad (\text{И.5})$$

$$B(a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b) = B(a_0, b_0) + \Delta a A_2 + \Delta b B_2. \quad (\text{И.6})$$

Здесь для сокращения записи обозначено:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{\partial A(a, b)}{\partial a} \right]_y; \\ B_1 &= \left[\frac{\partial A(a, b)}{\partial b} \right]_y; \end{aligned} \right\} \quad (\text{И.7})$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \left[\frac{\partial B(a, b)}{\partial a} \right]_y; \\ B_2 &= \left[\frac{\partial B(a, b)}{\partial b} \right]_y. \end{aligned} \right\} \quad (\text{И.8})$$

Индекс y свидетельствует о том, что в частные производные должны быть подставлены значения a и b установившегося режима, т. е. a_0 и b_0 .

Коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 являются функциями a_0 и b_0 , но не являются функциями приращения Δa и Δb . Подставим правые части уравнений (И.5) и (И.6) в уравнения (И.1) и (И.2), учтем уравнения (И.3) и (И.4), а также то, что

$$\frac{d(a_0 + \Delta a)}{dt} = \frac{d(\Delta a)}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d(b_0 + \Delta b)}{dt} = \frac{d(\Delta b)}{dt}.$$

Получим два уравнения:

$$\frac{d(\Delta a)}{dt} = A_1 \Delta a + B_1 \Delta b; \quad (\text{И.9})$$

$$\frac{d(\Delta b)}{dt} = A_2 \Delta a + B_2 \Delta b. \quad (\text{И.10})$$

Алгебраизируем их:

$$p \Delta a = A_1 \Delta a + B_1 \Delta b; \quad (\text{И.9}')$$

$$p \Delta b = A_2 \Delta a + B_2 \Delta b. \quad (\text{И.10}')$$

Составим характеристическое уравнение:

$$p^2 + mp + q = 0, \quad (\text{И.11})$$

где

$$m = -(A_1 + B_2); \quad (\text{И.12})$$

$$q = A_1 B_2 - B_1 A_2. \quad (\text{И.13})$$

В соответствии с критерием Гурвица для затухания приращений Δa и Δb необходимо, чтобы

$$\left. \begin{array}{l} m > 0; \\ q > 0. \end{array} \right\} \quad (\text{И.14})$$

В автоколебательных системах периодические вынуждающие силы, как правило, отсутствуют, поэтому обычно можно взять $b = 0$, т. е. взять колебание в виде $a(t) \sin \omega t$ (см., например, автоколебания лампового генератора, пример 175). В этом случае вместо двух уравнений (И.1) и (И.2) будет одно уравнение $\frac{da}{dt} = A(a)$. Точно так же вместо двух уравнений (И.9) и (И.10) будет одно уравнение

$$\frac{d(\Delta a)}{dt} = A_1 \Delta a, \quad (\text{И.15})$$

где

$$A_1 = \left[\frac{dA(a)}{da} \right]_{a=a_0}. \quad (\text{И.16})$$

Для устойчивости автоколебаний в этом случае необходимо выполнение условия $A_1 < 0$.

Пример на исследование устойчивости автоколебаний по формуле (И.15) см. в § И.6.

Исследование устойчивости вынужденных колебаний на высших гармониках и субгармониках, процессов в цепях с переменными во времени параметрами, а также исследование устойчивости процессов автомодуляции даны, например, в [34].

§ И.5. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Релаксационные колебания представляют собой автоколебания, при определенных условиях возникающие в нелинейных электрических цепях с одним накопителем энергии, например в цепи с одной емкостью (без индуктивности) или в цепи с одной индуктивностью (без емкости).

На рис. И.3, а изображена принципиальная схема генератора релаксационных колебаний. Она состоит из источника постоянной э. д. с. E , линейного сопротивления R , емкости C и параллельно соединенного с ней нелинейного сопротивления НС, имеющего в. а. х. S-образной формы.

В качестве НС с такой в. а. х. могут быть взяты неоновая лампа или тиратрон. На рис. И.3, б дана схема генератора с неоновой лампой.

Кривая 1 рис. И.3, в представляет собой в. а. х. неоновой лампы, прямая 2 того же рисунка — в. а. х. линейного сопротивления R .

Если бы не было релаксационных колебаний, то режим работы определился бы точкой m пересечения кривой 1 и прямой 2.

Для этой точки сумма падений напряжений на НС и на сопротивлении R равна в соответствии со вторым законом Кирхгофа э. д. с. E .

Точку m будем называть точкой равновесия. Она определяет режим работы схемы при протекании по сопротивлению R и по неоновой лампе постоянного тока.

Убедимся в том, что режим работы, определяемый точкой m , является неустойчивым режимом: достаточно ничтожно малого отклонения от состояния равновесия чтобы изображающая точка «ушла» из точки m и не возвратилась в нее. В схеме начнутся релаксационные колебания.

Для того чтобы убедиться в неустойчивости состояния равновесия, составим линейную схему замещения релаксационного генератора.

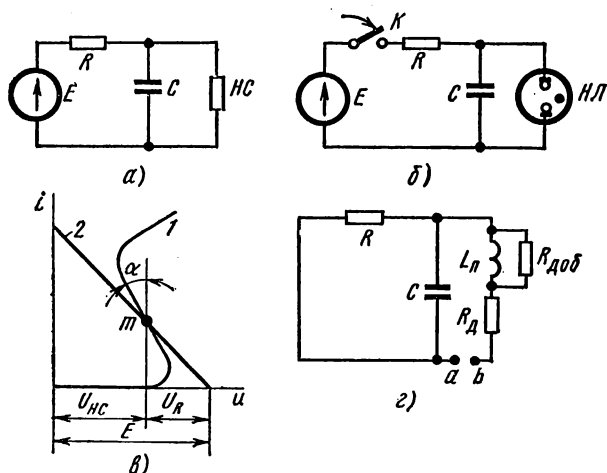


Рис. И.3

Так как НС имеет S-образную в. а. х., то в схеме для исследования устойчивости оно имитировано (в соответствии с § И.3) дифференциальным сопротивлением R_d и последовательно с ним включенной малой паразитной индуктивностью L_n , зашунтированной активным сопротивлением $R_{доб}$.

Дифференциальное сопротивление R_d в точке m пропорционально тангенсу угла α на рис. И.3, в и является отрицательной величиной.

Источник э. д. с. в схеме замещения (рис. И.3, г) не включен, так как исследуется поведение схемы в режиме приращений по отношению к режиму, определяемому точкой m .

Найдем входное сопротивление схемы в операторной форме относительно точек a и b :

$$Z_{ab}(p) = R_d + \frac{R_{доб} p L_n}{R_{доб} + p L_n} + \frac{R \frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}}.$$

Характеристическое уравнение цепи

$$p^2 L_n C R (R_{доб} + R_d) + p [L_n (R + R_{доб} + R_d) + C R R_{доб} R_d] + R_{доб} (R + R_d) = 0.$$

Так как рабочая точка находится на падающем участке в. а. х. НС, то $R > R_d$ и потому свободный член положителен. Из условия $\text{Re } Z(j\omega) > 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ сле-

дует, что $R_{\text{доб}} > |R_d|$, поэтому коэффициент при p^2 тоже положителен. Состояние равновесия будет неустойчивым, если коэффициент при p окажется отрицательным, т. е. при выполнении условия

$$L_{\text{п}}(R + R_{\text{доб}} + R_d) + CRR_{\text{доб}}R_d < 0.$$

Рассмотрим последовательность смены состояний при релаксационных колебаниях.

Пусть в схеме рис. И.3, б при нулевых начальных условиях замыкается ключ К. Конденсатор С начнет заряжаться, и напряжение на нем будет расти (рис. И.4, а). Так как конденсатор и неоновая лампа НЛ включены параллельно, то в любом режиме работы напряжения на них одинаковы.

Как только напряжение на конденсаторе возрастет до величины, равной напряжению зажигания u_z неоновой лампы, последняя зажжется, и ток в ней скачком возрастет с нуля до величины i_4 (рис. И.4, б).

Конденсатор быстро разрядится через НЛ, внутреннее сопротивление которой мало по сравнению с сопротивлением R . При этом изображающая точка на в. а. х. НЛ переместится из точки 4 в точку 1. В точке 1 напряжение на НЛ равно напряжению гашения u_r , поэтому неоновая лампа гаснет и ток в ней становится равным нулю (точка 2).

Далее, конденсатор вновь заряжается до напряжения u_z , неоновая лампа снова зажигается, и процесс повторяется.

Траектория движения изображающей точки на рис. И.4, б образует замкнутую петлю 1234.

Важно подчеркнуть, что если условия возбуждения колебаний в схеме выполнены, то размах колебаний напряжения на емкости не зависит от величины нагрузки R и величины э. д. с. E и определяется напряжениями зажигания u_z и гашения u_r НЛ. Период колебаний равен сумме времени зарядки конденсатора и времени разрядки конденсатора. Он зависит от величины э. д. с. E , емкости C , сопротивления R и внутреннего сопротивления НЛ. Обратная связь в схеме находит свое выражение в том, что конденсатор управляет режимом работы неоновой лампы.

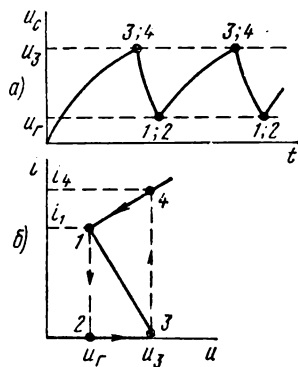


Рис. И.4

§ И.6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ЛАМПОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим вопрос об исследовании устойчивости синусоидальных колебаний в ламповом генераторе (см. рис. 9.40). С этой целью воспользуемся формулами (3.29) и (3.24).

В соответствии с уравнением (3.29) производная от амплитуды колебаний

$$A(a) = \frac{da}{dt} = 0,5 ak_1 (1 - 0,25 a^2).$$

В установившемся режиме работы амплитуду колебаний обозначим через a_0 . Для определения a_0 приравняем $\frac{da}{dt}$ нулю и решим уравнение $1 - 0,25 a_0^2 = 0$. Отсюда $a_0 = 2$.

В соответствии с § И.4 для исследования устойчивости периодического движения $a \sin \omega t$ в автоколебательной системе, на которую не действует внешняя периодическая сила частоты ω , достаточно найти знак производной $\frac{dA(a)}{da}$ при $a = a_0$. Если

при этом $\frac{dA(a)}{da}$ будет отрицательна, то процесс устойчив. В нашем случае

$$\frac{dA(a)}{da_{a=a_0=2}} = 0,5k_1(1 - 0,75a_0^2) = -k_1.$$

Ранее [см. уравнение (3.32)] было выяснено, что $a'M > RC$ и что $k_1 > 0$, так как только в этом случае амплитуда колебания представляет собой вещественную величину.

Следовательно, $\frac{dA(a)}{da_{a=a_0}} < 0$. Процесс устойчив.

Приложение К ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

§ К.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЛАСТЕЙ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Качественное исследование различных процессов в электрических цепях, описываемых дифференциальными уравнениями первого и в особенности второго порядка, производят в ряде случаев с помощью фазовой плоскости.

Фазовой плоскостью называют плоскость, по оси абсцисс которой откладывают исследуемую величину (назовем ее x), а по оси ординат — производную от исследуемой величины $\frac{dx}{dt}$ (последнюю принято обозначать через y) *.

В каждой конкретной задаче под x понимают либо ток, либо напряжение, либо заряд, либо индукцию. Любому сочетанию значений x и y исследуемой цепи соответствует вполне определенная точка фазовой плоскости.

Для качественного исследования процессов в электрических цепях, описываемых уравнениями третьего порядка, применяют трехмерное фазовое пространство. На одной оси декартовой системы этого пространства откладывают значение функции x , на другой $\frac{dx}{dt}$, на третьей $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Качественное исследование — это выявление общих свойств исследуемой цепи без интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. Под общими свойствами понимают обычно зависимость характера переходного процесса от начальных условий, возможность возникновения в схеме автоколебаний, резонансных явлений, автомодуляции, а также устойчивость перечисленных режимов и режимов равновесия.

Все эти вопросы в ряде случаев можно решить и иным путем, без привлечения фазовой плоскости. Применение последней делает исследование более наглядным и оправдано в тех случаях, когда объем работы соизмерим или меньше объема работы при решении тех же задач иными методами.

Обычно фазовую плоскость применяют для исследования процессов в электрических цепях, содержащих источники постоянной э. д. с. и не содержащих источники периодической э. д. с. Однако ее можно использовать и для исследования процессов в цепях, содержащих источники синусоидальной (и постоянной) э. д. с., если предварительно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений, к уравнениям для медленно меняющихся составляющих (величин).

* В литературе можно встретить и другие виды фазовых плоскостей: 1) когда по оси абсцисс откладывается какая-либо одна величина (например, ток первой ветви), а по оси ординат — другая величина (например, напряжение на емкости во второй ветви); 2) когда по оси абсцисс откладывается амплитуда синусоидальной составляющей колебания, а по оси ординат — амплитуда косинусной составляющей колебания и т. д.

§ К. 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ФАЗОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Зависимость $y = f(x)$, получаемая из решения дифференциального уравнения системы, представляет собой семейство кривых на фазовой плоскости, соответствующих различным значениям постоянных интегрирования. Кривые $y = f(x)$, соответствующие различным начальным условиям, называют *интегральными кривыми*.

Начальное положение изображающей точки на фазовой плоскости определяется значениями x и $\frac{dx}{dt} = y$ при $t = 0$.

Интегральную кривую, проходящую через точку фазовой плоскости с заданными начальными условиями, называют *фазовой траекторией*.

Вид фазовой траектории зависит от конфигурации схемы, от характера нелинейности и от соотношения между параметрами.

Если процесс в цепи является периодическим, то через интервалы времени, равные периоду процесса, соответствующие друг другу значения x и $\frac{dx}{dy} = y$ повторяются и фазовая траектория в этом случае является замкнутой кривой. Замкнутую фазовую траекторию называют *предельным циклом*.

Если же процесс неперiodический, то фазовая траектория представляет собой незамкнутую кривую.

Фазовую траекторию можно наблюдать на экране электроннолучевого осциллографа. С этой целью на одну пару отклоняющих пластин его подают исследуемую величину x , а на другую пару — производную от x .

§ К. 3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ПРОЦЕССОВ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим несколько простейших примеров на описание процессов в линейных цепях.

Требуется изобразить на фазовой плоскости переходный процесс в схеме рис. К.1, а, вызываемый при нулевых начальных условиях замыканием ключа. Обозначим: i — ток в цепи, u_C — напряжение на конденсаторе. В уравнение цепи

$$Ri + u_C = E$$

вместо i подставим $C \frac{du_C}{dt}$, получим

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Положим

$$u_C = x; \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{dx}{dt} = y.$$

Тогда

$$y = \frac{E - x}{RC}.$$

Последнее уравнение описывает прямую ab рис. К.1, б, которая является фазовой траекторией рассматриваемого процесса. Точка b — это точка равновесия.

В качестве второго примера рассмотрим изображение синусоидального колебания $i = I_m \sin \omega t$ (рис. К.2, а). Обозначим $i = x$, тогда

$$y = \frac{dx}{dt} = \omega I_m \cos \omega t,$$

т. е.

$$x = I_m \sin \omega t; \quad y = \omega I_m \cos \omega t.$$

Разделив первое уравнение на I_m , второе — на ωI_m , возведя в квадрат полученные выражения и сложив их, получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{x}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega I_m}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, изображением синусоидального процесса (фазовой траекторией) на фазовой плоскости будет эллипс (рис. К.2, б).

На рис. К.2, а изображено несколько эллипсов, соответствующих синусоидальным колебаниям с различными начальными условиями.

Направление движения изображающей точки показано стрелкой. В верхней полуплоскости $y = \frac{dx}{dt} > 0$; следовательно, изображающая точка движется в сторону увеличения координаты x . В нижней полуплоскости

$y = \frac{dx}{dt} < 0$, поэтому изображающая точка движется в сторону уменьшения координаты x . Можно считать, что в целом перемещение изображающей точки на фазовой плоскости происходит всегда по часовой стрелке.

Важно обратить внимание на то, что хотя x и y являются функциями времени, но на фазовой плоскости время в явном виде никак не отображено.

Изображением затухающего синусоидального процесса является свертывающаяся спираль.

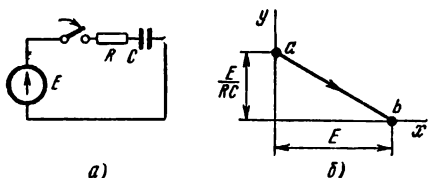
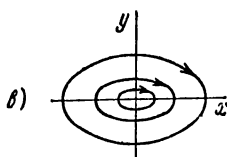
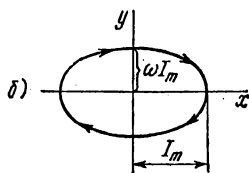
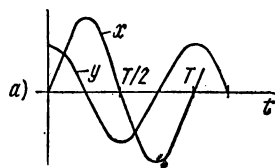


Рис. К.1

Рис. К.2

Изображением нарастающего синусоидального колебания является раскручивающаяся спираль.

Наиболее полно вопросы, связанные с фазовой плоскостью и ее применением к теории колебаний, рассмотрены в [30].

Приложение Л

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Нелинейное дифференциальное уравнение иногда решают путем последовательных приближений, представляя искомую величину x в виде ряда по степеням некоторого коэффициента μ , который называют малым параметром:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots,$$

где x_0 — решение уравнения нулевого приближения; последнее получают из исходного, полагая, что все нелинейные члены в исходном уравнении отсутствуют;

x_1 — решение уравнения первой поправки; эта поправка учитывает влияние нелинейных членов в первом приближении;

x_2 — решение уравнения второй поправки и т. д.

Если исходное уравнение является уравнением второго или более высокого порядка, то установившееся решение представляет собой колебательный процесс, квадрат угловой частоты первой гармоники которого ω^2 или первую степень ω также разлагают в ряд по малому параметру:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots,$$

где ω_0^2 — квадрат угловой частоты в нулевом приближении, когда всеми нелинейными членами пренебрежено;

μf_1 — поправка первого приближения, вызванная нелинейными членами;

$\mu^2 f_2$ — поправка второго приближения и т. д.

Последовательность решения рассмотрим на двух примерах.

1. Решить уравнение при условии $x(0) = 0$:

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 1. \quad (\text{Л.1})$$

К такому уравнению, например, сводится задача о переходном процессе в цепи, состоящей из нелинейной индуктивности и активного сопротивления, при подключении ее к постоянному напряжению и при квадратичной аппроксимации зависимости потокосцепления от тока.

Все линейные члены переносим в левую часть, а нелинейные, умножив на некоторый малый параметр μ , — в правую (в примере $\mu = 1$):

$$\frac{dx}{dt} - 1 = -\mu x^2. \quad (\text{Л.1a})$$

Представим решение (Л.1) в виде ряда по степеням μ :

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \quad (\text{Л.1б})$$

Подставим (Л.1б) в (Л.1a):

$$\frac{dx_0}{dt} + \mu \frac{dx_1}{dt} + \mu^2 \frac{dx_2}{dt} - 1 = -\mu x_0^2 - \mu^2 2x_0 x_1 - \mu^3 (x_1^2 + 2x_0 x_2) - \dots \quad (\text{Л.2})$$

Из равенства (Л.2) образуем систему уравнений, приравняв члены левой и правой частей при одинаковых степенях μ :

$$\text{уравнение нулевого приближения } \frac{dx_0}{dt} - 1 = 0; \quad (\text{Л.3})$$

$$\text{уравнение для первой поправки } \frac{dx_1}{dt} = -x_0^2; \quad (\text{Л.4})$$

$$\text{уравнение для второй поправки } \frac{dx_2}{dt} = -2x_0 x_1. \quad (\text{Л.5})$$

Интегрируем (Л.3): $x_0 = t + C_0$. Постоянную $C_0 = 0$ определили из начальных условий. Подставляем $x_0 = t$ в уравнение (Л.4) и интегрируем его: $x_1 = -\frac{t^3}{3} + C_1$. Для первой поправки начальные условия также нулевые. Поэтому $C_1 = 0$ и $x_1 = -\frac{t^3}{3}$.

Подставим x_0 и x_1 в (Л.5):

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2t^4}{3}; \quad x_2 = \frac{2t^5}{15} + C_2; \quad C_2 = 0.$$

В соответствии с (Л.1б)

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots = t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15}. \quad (\text{Л.6})$$

Аналогичным путем можно было бы получить и последующие члены ряда (Л.1б). Так как уравнение (Л.1) имеет точное решение $x = \tanh t$, то, взяв в разложении $\tanh t$

три первых члена ряда, можно убедиться, что они оказываются совпадающими с правой частью (Л.6).

2. Решить уравнение для лампового генератора (вывод уравнения см. в примере 175) при начальных условиях $x(0) = A_0$ и $x'(0) = 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k_1(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0. \quad (\text{Л.7})$$

Коэффициент k_1 при нелинейном члене в дальнейшем будем считать малым параметром и обозначим μ . В соответствии с предыдущим

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots; \quad (\text{Л.8})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$$

В уравнение (Л.7) вместо x подставим правую часть (Л.8) и $(\omega^2 - \mu f_1 - \mu^2 f_2)$ вместо ω_0^2 :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x_0}{dt^2} + \mu \frac{d^2x_1}{dt^2} + \mu^2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - \mu [1 - (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots)^2] \times \\ & \times \left(\frac{dx_0}{dt} + \mu \frac{dx_1}{dt} + \mu^2 \frac{dx_2}{dt} + \dots \right) + (\omega^2 - \mu f_1 - \mu^2 f_2) (x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Л.9})$$

Образует из уравнения (Л.9) три уравнения, соответствующие μ в нулевой, первой и второй степенях:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0; \quad (\text{Л.10})$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = (1 - x_0^2) \frac{dx_0}{dt} + x_0 f_1; \quad (\text{Л.11})$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = (1 - x_0^2) \frac{dx_1}{dt} - 2x_0 x_1 \frac{dx_0}{dt} + f_1 x_1 + f_2 x_0. \quad (\text{Л.12})$$

Интегрируем (Л.10): $x_0 = A_0 \cos \omega t$.

Подставим x_0 в (Л.11) и учтем, что

$$\sin \alpha \cos^2 \alpha = 0,25 \sin \alpha + 0,25 \sin 3\alpha.$$

Получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -\omega A_0 (1 - 0,25 A_0^2) \sin \omega t + A_0 f_1 \cos \omega t + 0,25 \omega A_0^3 \sin 3\omega t. \quad (\text{Л.13})$$

Уравнение (Л.13) можно трактовать следующим образом: на колебательный контур L, C без потерь [левая часть уравнения (Л.13)] воздействует вынуждающая сила с угловой частотой ω , равной собственной частоте колебательного контура, и сила с угловой частотой, в три раза большей.

Но известно, что если подключить колебательный контур L, C , имеющий активное сопротивление $R \rightarrow 0$, к источнику синусоидальной э. д. с. $E_m \sin \omega t$ при оговоренных условиях, то амплитуда тока i в цепи будет нарастать до бесконечности. Действительно,

$$i = i_{np} + i_{св} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t - \frac{E}{R} e^{-\delta t} \sin (\omega t + \nu).$$

При $R \rightarrow 0$ $\nu \rightarrow 0$ и $\delta = \frac{R}{2L} \rightarrow 0$.

Разложим $e^{-\delta t}$ в ряд и, учитывая малость δ , возьмем два первых члена ряда.

Получим $i \approx \frac{E}{2L} t \sin \omega t$. Такие члены в решении дифференциальных уравнений, амплитуды которых нарастают теоретически до бесконечности при увеличении времени t , называют *вековыми членами*. При дальнейшем решении уравнения (Л.13)

необходимо помнить о том, что амплитуды вековых членов должны оказаться равными нулю при любом $t > 0$.

Решение уравнения (Л.13) запишем следующим образом:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + (C_1 \sin \omega t + D_1 \cos \omega t) t + E_1 \sin 3\omega t + F_1 \cos 3\omega t. \quad (\text{Л.14})$$

Первое и второе слагаемые представляют собой полное решение однородного уравнения; третье, четвертое и пятое — частное решение неоднородного уравнения. Третье слагаемое представляет собой вековой член. Его можно было бы не вводить в дальнейшие выкладки по определению коэффициентов A, B, E, F ; однако введем его, чтобы показать, что его присутствие выкладкам не мешает.

Дважды продифференцируем (Л.14) по времени:

$$\begin{aligned} x_1' &= -A_1 \omega^2 \sin \omega t - B_1 \omega^2 \cos \omega t + C_1 \omega \cos \omega t - D_1 \omega \sin \omega t + \\ &+ \omega (C_1 \cos \omega t - D_1 \sin \omega t) - t \omega^2 (C_1 \sin \omega t + D_1 \cos \omega t) - \\ &- 9\omega^2 E_1 \sin 3\omega t - 9\omega^2 F_1 \cos 3\omega t. \end{aligned} \quad (\text{Л.15})$$

Подставим (Л.15) и (Л.14) в (Л.13) и выделим из левой и правой частей (Л.13) слагаемые соответственно с $\sin \omega t$ [формула (Л.16)], с $\cos \omega t$ [формула (Л.17)], с $\sin 3\omega t$ [формула (Л.18)], с $\cos 3\omega t$ [формула (Л.19)]:

$$D_1 = 0,5 A_0 (1 - 0,25 A_0^2); \quad (\text{Л.16})$$

$$2\omega C_1 = A_0 f_1; \quad (\text{Л.17})$$

$$-8\omega^2 E_1 = 0,25 \omega A_0^3; \quad (\text{Л.18})$$

$$8\omega^2 F_1 = 0. \quad (\text{Л.19})$$

Слагаемые уравнения (Л.13) с вековыми членами дают нуль:

$$t (C_1 \sin \omega t + D_1 \cos \omega t) (\omega^2 - \omega^2) = 0. \quad (\text{Л.20})$$

Используем теперь заданные начальные условия для определения $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$. Так как начальные условия уже были удовлетворены при определении x_0 , то для всех последующих приближений начальные условия нулевые. Имея это в виду, из уравнения (Л.14) находим: $x_1(0) = B_1 + F_1 = 0$.

Но из (Л.19) $F_1 = 0$, поэтому $B_1 = 0$. Из уравнения (Л.14), используя условие $\dot{x}'_1(0) = 0$, имеем $\omega A_1 + D_1 + 3\omega E_1 = 0$. Но D_1 и E_1 известны [формулы (Л.16) и (Л.18)]. Поэтому $A_1 = -3E_1 = \frac{3}{32\omega} A_0^3$.

Поправку на угловую частоту f_1 , а вместе с тем и значение A_0 найдем исходя из того, что амплитуда векового члена должна быть равна нулю при любом $t > 0$. Отсюда $C_1 = 0$ и $D_1 = 0$.

Из (Л.17) следует, что $f_1 = 0$, и из (Л.16), что $A_0 = 2$. Таким образом,

$$A_1 = \frac{3}{32\omega} A_0^3; \quad B_1 = 0; \quad C_1 = D_1 = 0; \quad E_1 = -\frac{A_0^3}{32\omega}; \quad F_1 = 0; \quad \omega = \omega_0.$$

Ограничившись первым приближением и перейдя от μ к k_1 , получим

$$x = x_0 + \mu x_1 = A_0 \cos \omega t + k_1 \left(\frac{3}{32\omega} A_0^3 \sin \omega t - \frac{A_0^3}{32\omega} \sin 3\omega t \right).$$

Первое приближение привело к изменению амплитуды первой гармоники с $A_0 = 2$ до $2 \sqrt{1 + \left(\frac{0,75 k_1}{2\omega} \right)^2}$ и к появлению третьей гармоники. Угловая частота первой гар-

моники в первом приближении не изменилась и равна угловой частоте ω_0 нулевого приближения. Аналогичным образом производится и второе приближение. Однако каждое последующее приближение по сравнению с предыдущим более трудоемко.

В основу данного метода положены работы французского математика Пуанкаре по небесной механике. Метод называют методом малого параметра потому, что в нем производят разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Насколько этот параметр должен быть мал в каждом примере, заранее сказать нельзя. Важно, чтобы ряды для x и для ω^2 (или ω) сходились. Если ряды будут сходиться медленно или вообще не будут сходиться, то пользоваться этим методом не имеет смысла.

ЧАСТЬ III

Глава пятнадцатая

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 15.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи; оно является носителем энергии и обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами.

Электростатическое поле — это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени.

Из курса физики известно, что любое вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем. Таким образом, в любом веществе всегда имеется микроскопическая неоднородность в пространстве. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, находятся в непрерывном хаотическом движении. Следовательно, кроме микроскопической неоднородности в пространстве, всегда имеется неодинаковость расположения микроскопических зарядов в смежные моменты времени.

В теории поля осредняют микроскопические неоднородности вещества в пространстве и во времени, т. е. рассматривают процессы в макроскопическом смысле.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и дает возможность рассматривать в электростатическом поле лишь одну «сторону» электромагнитного поля, а именно электрическую «сторону».

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полем, создаваемым в однородной и изотропной среде, т. е. в такой среде, электрические свойства которой одинаковы для всех точек поля и не зависят от направления. В ином случае сделаны соответствующие оговорки.

Электростатическому полю присуща способность воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной величине этого заряда.

В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона.

§ 15.2. ЗАКОН КУЛОНА

Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой \vec{F} , прямо пропорциональной произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды (рис. 15.1). Если заряды имеют одинаковые знаки, то они стремятся оттолкнуться друг от друга; заряды противоположных знаков стремятся сблизиться:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \quad (15.1)$$

где \vec{R}_0 — единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (см. рис. 15.1) *.

При использовании СИ и кратных долей единиц этой системы расстояние R измеряют в метрах (м), заряды — в кулонах (к); электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ ф/м; тогда силу получают в ньютонах.

Под точечными зарядами подразумевают следующее: линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.

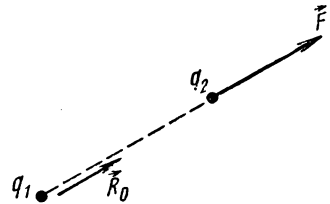


Рис. 15.1

§ 15.3. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Всякое поле характеризуется некоторыми основными величинами. Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются напряженность \vec{E} и потенциал ϕ .

Напряженность электростатического поля — величина векторная, определяемая в каждой точке и величиной и направлением; потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом.

Электрическое поле определено, если известен закон изменения \vec{E} или ϕ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Напряженность численно равна силе, действующей на заряд, по величине равный единице.

* Стрелка над буквой означает вектор в пространстве.

В том случае, когда поле создается несколькими зарядами (q_1, q_2, q_3, \dots), напряженность поля равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots,$$

т. е. при расчете электрического поля применим метод наложения.

Рассмотрим вопрос о работе, совершаемой силами поля при перемещении заряда, и о связанных с работой понятиях потенциала и разности потенциалов.

Поместим в электрическое поле некоторый заряд q . На заряд будет действовать сила $q\vec{E}$. Пусть заряд q из точки 1 переместился в точку 2 по пути 132 (рис. 15.2). Так как направление силы $q\vec{E}$, действующей на заряд в каждой точке пути, может не совпадать с элементом пути \vec{dl} , то работа на перемещение заряда на пути \vec{dl} определится скалярным произведением силы на элемент пути $q\vec{E} \cdot \vec{dl}$. Работа, затраченная на перенос заряда из точки 1 в точку 2 по пути 132, определится как сумма элементарных работ $q\vec{E} \cdot \vec{dl}$. Эта сумма может быть записана в виде линейного интеграла

$$q \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд). Под разностью потенциала $\varphi_1 - \varphi_2$ принято понимать работу, затрачиваемую силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}, \quad (15.2)$$

Формула (15.2) позволяет определить разность потенциалов точек 1 и 2 как линейный интеграл от напряженности поля.

Если бы потенциал конечной точки пути 2 был равен нулю, то потенциал точки 1 определился бы так (при $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl},$$

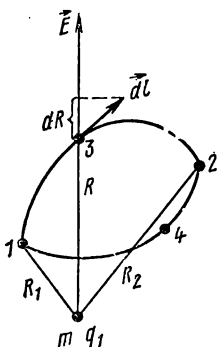


Рис. 15.2

т. е. потенциал произвольной точки поля 1 может быть определен как работа, совершаемая силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.

За точку, имеющую нулевой потенциал, может быть принята любая точка поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются совершенно однозначно.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсах физики, распростра-

нено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в толще ее — находится эта точка).

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т. е. потенциал определяется с точностью до постоянной величины. Однако существенного значения это не имеет, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

При составлении разности потенциалов произвольную постоянную, с точностью до которой определяют потенциал, вычитают, и в разность потенциалов она не входит. На величине производной от потенциала по координатам произвольная постоянная также не скажется, поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

§ 15.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ — ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ

Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. С этой целью положим, что в точке m рис. 15.2 находится положительный точечный заряд q_1 , создающий поле, а из точки 1 в точку 2 через промежуточную точку 3 перемещается единичный положительный заряд $q = 1$.

Обозначим: R_1 — расстояние от точки m до исходной точки 1 ; R_2 — расстояние от точки m до конечной точки 2 ; R — расстояние от точки m до произвольной точки 3 на пути 132 . Направление напряженности поля \vec{E} и направление элемента пути $d\vec{l}$ в промежуточной точке 3 показано на рис. 15.2. Скалярное произведение $\vec{E} d\vec{l} = E dR$, где dR — проекция элемента пути $d\vec{l}$ на направление радиуса, соединяющего точку m с точкой 3 .

В соответствии с определением напряженности поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. По закону Кулона,

$$\vec{E} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0.$$

Так как $|\vec{R}_0| = 1$ и $q = 1$, то модуль напряженности поля в поле точечного заряда

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Подставив в формулу (15.2) вместо $\vec{E} d\vec{l}$ величину $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dR = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (15.2')$$

Таким образом, *разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из исходной точки в конечную точку.* Другими словами, если перемещение из точки 1 в точку 2 будет происходить по какому-то другому пути, например по пути 142, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ при перемещении из точки 1 в точку 2 по пути 132.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то этот вывод справедлив для поля, созданного каждым из точечных зарядов в отдельности. А так как для электрического поля в однородном и изотропном диэлектрике справедлив принцип наложения, то вывод о независимости величины разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от пути, по которому происходило перемещение из точки 1 в точку 2, справедлив и для электрического поля, созданного совокупностью точечных зарядов.

Если пройти по замкнутому пути 13241 (см. рис. 15.2), то исходная точка пути (1) и конечная точка пути (2) совпадут, и тогда и левая и правая части формулы (15.2) будут равны нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 = \oint \vec{E} d\vec{l}. \quad (15.3)$$

(Кружок на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутому контуру.)

Соотношение (15.3) свидетельствует о том, что в *электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю.*

Физически это объясняется тем, что при движении вдоль замкнутого пути совершена определенная работа силами поля и такая же работа совершена внешними силами против сил поля.

Если условиться работу, совершенную силами поля, считать положительной, а работу, совершенную против сил поля, — отрицательной, то сумма «положительных» и «отрицательных» работ равна нулю.

Равенство (15.3) можно трактовать и так: циркуляция вектора \vec{E} вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это соотношение выражает собой основное свойство электростатического поля. Поля, для которых выполняются подобного рода соотношения, называют *потенциальными*. Потенциальными являются не только электростатические поля, но и все гравитационные поля (поля сил тяготения между материальными телами), установившиеся температурные поля около нагретых тел и т. д.

§ 15.3. СИЛОВЫЕ И ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЛИНИИ

Электростатическое поле можно характеризовать совокупностью силовых и эквипотенциальных линий. *Силовая линия* — это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и оканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Проводится она таким образом, что касательная к ней в любой точке ее дает направление напряженности поля \vec{E} в этой точке. Вдоль силовой линии передвигался бы весьма малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться в поле и если бы он не обладал инерцией. Таким образом, силовые линии имеют начало (на положительно заряженном теле) и конец (на отрицательно заряженном теле). Так как положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то силовые линии электрического поля не могут быть замкнутыми сами на себя линиями.

В электростатическом поле могут быть проведены эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности. Под *эквипотенциальной поверхностью* понимают совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Если мысленно рассеять электростатическое поле какой-либо секущей плоскостью, то

в полученном сечении будут видны следы пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их называют *эквипотенциальными линиями* (или эквипотенциалами). Из самого определения эквипотенциальной поверхности следует, что перемещение по ней не вызовет изменения потенциала. Точно так же и перемещение вдоль эквипотенциальной линии не связано с изменением потенциала.

Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом. На рис. 15.3, а изображены два заряженных тела и проведено несколько силовых и эквипотенциальных линий.

В противоположность силовым эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми сами на себя линиями. Как уже говорилось, между напряженностью электрического поля \vec{E} и потенциалом φ существует связь интегрального вида (15.2). Кроме нее, между \vec{E} и φ существует и связь дифференциального вида.

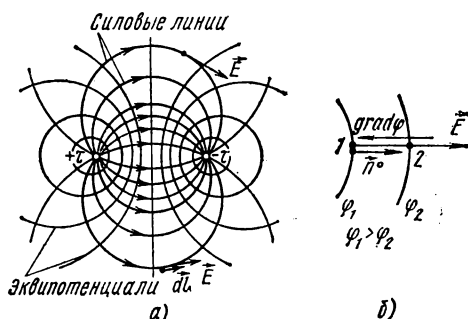


Рис. 15.3

§ 15.6. ВЫРАЖЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ В ВИДЕ ГРАДИЕНТА ОТ ПОТЕНЦИАЛА

Электростатическое поле, как отмечалось ранее, является полем потенциальным. Между двумя близко расположенными точками поля имеется в общем случае некоторая разность потенциалов.

Если эту разность разделить на кратчайшее расстояние между взятыми точками, то полученная величина будет характеризовать скорость изменения потенциала в направлении кратчайшего расстояния между точками. Эта скорость будет зависеть от направления, вдоль которого взяты точки.

В курсе математики пользуются понятием градиента скалярной функции. *Градиентом скалярной функции* называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания. В определении градиента существенны два положения: 1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения потенциала была максимальной; 2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает).

На рис. 15.3, б изображены отрезки двух весьма близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1 , другая — φ_2 . Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда в соответствии с приведенным определением градиент потенциала изобразится на рис. 15.3, б вектором, перпендикулярным к эквипотенциальным линиям и направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала).

Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала (φ_1) к более низкому (φ_2). Если через dn обозначить расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями, а через \vec{dn} — вектор, совпадающий с направлением \vec{E} :

$$\vec{dn} = \vec{n}^0 dn$$

(здесь \vec{n}^0 — единичный вектор по направлению \vec{dn}), то на основании соотношения (15.2) можно записать выражение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl} \approx \vec{E} \vec{dn} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2.

Так как векторы \vec{E} и \vec{dn} совпадают по направлению, то скалярное произведение $\vec{E} \vec{dn}$ равно произведению модуля \vec{E} на модуль \vec{dn} ($\vec{E} \vec{dn} = E dn$).

Таким образом, $E dn = -d\varphi$. Отсюда модуль напряженности поля $E = -\frac{d\varphi}{dn}$. Вектор напряженности поля $\vec{E} = E \vec{n}^0$. Следовательно,

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n}^0. \quad (15.4)$$

В свою очередь из определения градиента следует, что

$$\text{grad } \varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn} (-\vec{n}^0) = -\frac{d\varphi}{dn} (-\vec{n}^0). \quad (15.5)$$

Сопоставляя (15.4) и (15.5), замечаем, что

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (15.6)$$

Соотношение (15.6) можно истолковать следующим образом: напряженность в какой-либо точке поля равна скорости изменения потенциала в этой точке поля, взятой с обратным знаком. Знак минус означает, что направление \vec{E} и направление $\text{grad } \varphi$ противоположны (см. рис. 15.3, б).

Нормаль \vec{dn} в общем случае может быть расположена так, что не совпадает с направлением какой-либо координатной оси. И потому градиент потенциала в общем случае можно представить в виде суммы трех проекций по координатным осям. Например, в декартовой системе координат

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (15.7)$$

где $\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — скорость изменения φ в направлении оси x ;

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — числовое значение (модуль) скорости (скорость — величина векторная);

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные орты соответственно по осям x, y, z декартовой системы.

Вектор напряженности $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z$. Таким образом,

$$\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = - \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Два вектора равны только тогда, когда равны друг другу их соответствующие проекции. Следовательно,

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (15.8)$$

Соотношения (15.8) следует понимать так: проекция напряженности поля на ось x равна проекции скорости изменения потенциала вдоль оси x , взятой с обратным знаком, и т. д.

§ 15.7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА (ОПЕРАТОР НАБЛА)

Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляется дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла).

Под дифференциальным оператором Гамильтона (оператором набла) понимают сумму частных производных по трем координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). В декартовой системе координат его записывают так:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Он сочетает в себе векторные и дифференциальные свойства и может быть применен к скалярным и векторным функциям. Ту функ-

цию, действие над которой хотят произвести (дифференцирование ее по координатам, или «пространственное» дифференцирование), пишут справа от оператора набла.

Применим оператор ∇ к потенциалу φ . С этой целью запишем

$$\nabla\varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Если сравнить последнее выражение с (15.7), то можно заметить, что правые части у них одинаковы. Следовательно, равны и левые:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi,$$

т. е. запись $\nabla \varphi$ эквивалентна записи $\text{grad } \varphi$, а приписывание слева к какой-либо скалярной функции (в нашем случае к φ) оператора ∇ означает взятие градиента от этой скалярной функции.

§ 15.8. ВЫРАЖЕНИЕ ГРАДИЕНТА ПОТЕНЦИАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

В цилиндрической системе (обозначения см. на рис. 15.4, а)

$$\text{grad } \varphi = \vec{r}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}^0 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \vec{z}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (15.9)$$

В сферической системе (обозначения см. на рис. 15.4, б)

$$\text{grad } \varphi = \vec{R}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \vec{\theta}^0 \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{\alpha}^0 \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (15.10)$$

§ 15.9. ПОТОК ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТ ПОВЕРХНОСТИ И ПОТОК ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть в векторном поле (например, в поле вектора напряженности электрического поля \vec{E}) есть некоторый элемент поверхности, площадь которого с одной стороны численно равна ds . Выберем положительное

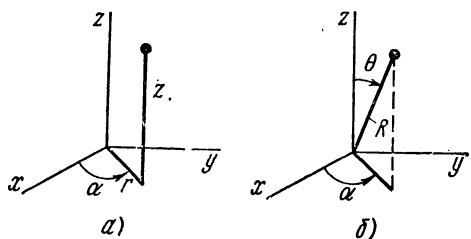


Рис. 15.4

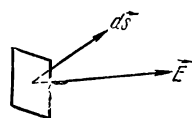


Рис. 15.5

направление нормали (перпендикуляра) к элементу поверхности. Вектор \vec{ds} в некотором масштабе на рис. 15.5 равен площади элемента поверхности, а его направление совпадает с положительным направ-

лением нормали. Будем считать, что площадь элемента достаточно мала, чтобы в пределах этого элемента вектор \vec{E} можно было считать одним и тем же во всех точках.

Если бы \vec{E} было перпендикулярно \vec{ds} , то вектор \vec{E} не пронизывал бы элемент поверхности; если \vec{E} будет направлено по \vec{ds} , то через данный элемент поверхности будет максимальный поток вектора \vec{E} . В общем случае поток вектора \vec{E} через элемент поверхности ds определится скалярным произведением $\vec{E} \vec{ds}$.

Поток вектора через элемент поверхности $\vec{E} \vec{ds}$ является скаляром алгебраического характера. Поток вектора может оказаться положительным или отрицательным. Положительное значение потока $\vec{E} \vec{ds}$ означает, что он направлен в сторону \vec{ds} ; отрицательное его значение — что он направлен в обратную сторону.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, велика, то тогда нельзя считать, что во всех точках ее E одна и та же. В этом случае поверхность подразделяют на отдельные элементы малых размеров, и полный поток вектора через поверхность равняется алгебраической сумме потоков через все элементы поверхности. Сумма потоков может быть записана в виде интеграла

$$\int_s \vec{E} \vec{ds}.$$

Значок s под знаком интеграла означает, что суммирование производится по элементам поверхности.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, замкнутая, то на знаке интеграла ставят кружок:

$$\oint_s \vec{E} \vec{ds}.$$

§ 15.10. СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ ЗАРЯДЫ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВА

Свободными называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под *связанными* понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие заряды «связаны» с данным веществом, неотделимы от него. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, то оно поляризуется.

Под *поляризацией* понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в теле, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что отрицательные связанные заряды в теле переместятся в направлении более высокого

потенциала, а положительные связанные заряды переместятся в сторону более низкого потенциала. Заряды сместятся настолько, что силы воздействия электрического поля на связанные заряды уравновесятся внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды.

§ 15.11. ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ

Произведение $\vec{q}\vec{l}$ называют электрическим моментом двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся друг от друга на расстоянии l (диполя). Это векторная величина, направленная от заряда $-q$ к заряду $+q$ (рис. 15.6, а).

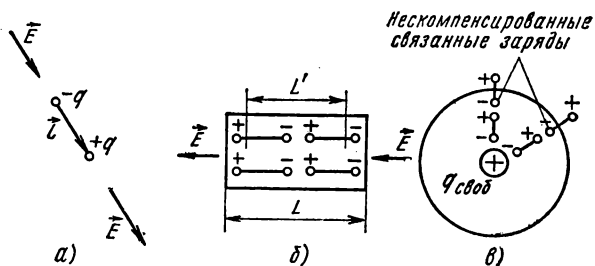


Рис. 15.6

В поляризованном веществе молекулы в электрическом отношении представляют собой диполи. Под действием внешнего электрического поля диполи стремятся ориентироваться в пространстве таким образом, чтобы электрический момент их был направлен параллельно вектору напряженности электрического поля. Практический интерес представляет электрический момент не одной молекулы, не одной пары зарядов, а суммы диполей, находящихся в единице объема вещества. Электрический момент суммы диполей, находящихся в единице объема вещества V , называют вектором поляризации (поляризованностью) и обозначают \vec{P} ;

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{q}\vec{l}}{V}. \quad (15.11)$$

Для большинства диэлектриков \vec{P} пропорционально напряженности электрического поля \vec{E} . Коэффициент пропорциональности между ними k называют электрической восприимчивостью (или поляризуемостью):

$$\vec{P} = k\vec{E}. \quad (15.12)$$

Диэлектрики в зависимости от происходящих в них процессов при поляризации можно подразделить на 2 группы.

В первую группу входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля электрически нейтральны, т. е. в них центры действия положительных и отрицательных зарядов

совпадают. К числу таких диэлектриков относятся водород, азот, парафин, слюда и др.

Поляризация в диэлектриках первой группы состоит в том, что под действием внешнего электрического поля центр действия положительного заряда молекулы смещается по внешнему полю, а центр действия отрицательных зарядов (электронная орбита) смещается против поля. В результате молекула становится диполем.

Это смещение зарядов молекулы пропорционально величине напряженности внешнего поля. Смещению противодействуют внутримолекулярные силы.

Во вторую группу входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля представляют собой диполи, т. е. центры действия положительных и отрицательных зарядов этих молекул при отсутствии внешнего электрического поля не совпадают (полярные молекулы).

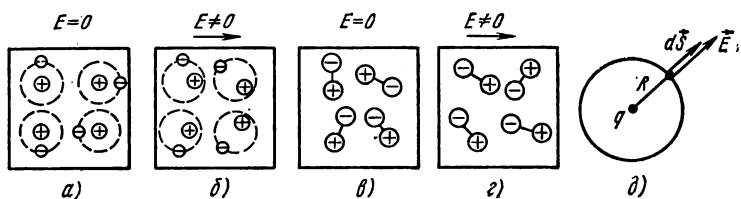


Рис. 15.7

Диэлектриком с полярными молекулами является, например, хлористый водород.

Благодаря тепловому движению диполи располагаются хаотично, так что при отсутствии внешнего электрического поля их электрические поля взаимно нейтрализуются.

Поляризация в диэлектриках второй группы состоит в том, что полярные молекулы стремятся повернуться таким образом, чтобы их электрический момент был направлен по внешнему электрическому полю.

Поляризацию диэлектриков первой группы иллюстрирует рис. 15.7, а и б; второй группы — рис. 15.7, в и г. Рис. 15.7, а и в соответствуют случаю, когда внешнее поле отсутствует; рис. 15.7, б и г — при наличии внешнего поля.

§ 15.12. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ \vec{D}

Кроме векторов \vec{E} и \vec{P} , в электротехнических расчетах используют еще вектор электрической индукции, или вектор электрического смещения \vec{D} .

Вектор \vec{D} равен сумме двух векторов: вектора $\epsilon_0 \vec{E}$, характеризующего поле в вакууме, и вектора поляризации \vec{P} , характеризующего

способность диэлектрика в рассматриваемой точке поля поляризоваться:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Так как

$$\vec{P} = k\vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} \frac{k}{\epsilon_0}, \quad (15.13)$$

то

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \left(1 + \frac{k}{\epsilon_0}\right) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (15.14)$$

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon^*; \quad \epsilon = 1 + \frac{k}{\epsilon_0}, \quad (15.15)$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость, имеющая нулевую размерность; она показывает, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества (ϵ_a) больше, чем электрическая постоянная (ϵ_0), характеризующая электрические свойства вакуума.

В системе СИ $[D] = [P] = \kappa/\text{м}^2$.

§ 15.13. ТЕОРЕМА ГАУССА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Теорема Гаусса является одной из важнейших теорем электростатики. Она соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать тремя способами.

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, окружающую некоторый объем, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{s} = \sum q_{\text{своб}}. \quad (15.16)$$

Из формулы (15.16) следует, что вектор \vec{D} является такой характеристикой поля, которая при прочих равных условиях *не зависит* от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ).

2. Так как $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, то теорему Гаусса для однородной и изотропной среды можно записать и в такой форме:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{своб}}}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (15.17)$$

т. е. поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности, разделенной на произведение $\epsilon_0 \epsilon$.

Из формулы (15.17) следует, что вектор \vec{E} представляет собой характеристику поля, которая в отличие от вектора \vec{D} при прочих рав-

* Раньше относительную диэлектрическую проницаемость обозначали ϵ_r , а абсолютную проницаемость ϵ , т. е. $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$.

ных условиях *зависит* от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ).

Поток вектора зависит лишь от суммы зарядов и не зависит от расположения зарядов внутри замкнутой поверхности *.

3. Поток вектора \vec{E} через любую замкнутую поверхность создается не только суммой свободных зарядов ($\sum q_{\text{своб}}$), но и суммой связанных зарядов ($\sum q_{\text{связ}}$), находящихся внутри поверхности.

Из курса физики известно, что поток вектора поляризации сквозь любую замкнутую поверхность равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\sum q_{\text{связ}} = - \oint \vec{P} \vec{ds}. \quad (a)$$

Напомним вывод формулы (a). С этой целью сначала покажем, что плотность поверхностных связанных зарядов на поверхности раздела поляризованного диэлектрика и вакуума равна модулю вектора поляризации.

На рис. 15.6, б показано расположение диполей в поляризованном диэлектрике длиной L , сечением s . На торцах диэлектрика образуются связанные заряды. Поверхностную плотность их обозначим через σ . На длине L' положительные и отрицательные заряды взаимно компенсируют друг друга. Поэтому поляризованный диэлектрик рис. 15.6, б можно рассматривать как диполь длиной L с сосредоточенными на концах зарядами σs .

Электрический момент всего диэлектрика длиной L равен $\sigma s L$. Электрический момент единицы объема диэлектрика

$$P = \frac{\sigma s L}{V} = \frac{\sigma s L}{s L} = \sigma.$$

Таким образом, плотность связанных зарядов на торцах поляризованного диэлектрика равна модулю вектора поляризации \vec{P} (вектор \vec{P} перпендикулярен торцам). На рис. 15.6, в изображен свободный положительный заряд, вызвавший поляризацию окружающего его диэлектрика.

Окружим заряд сферой и подсчитаем нескомпенсированные связанные заряды, попавшие внутрь сферы. Нескомпенсированными связанными зарядами оказываются заряды диполей, пересекаемых поверхностью s .

Так как поверхностная плотность их равна σ , то

$$\sum q_{\text{связ}} = - \oint \sigma ds = - \oint \vec{P} \vec{ds}.$$

Знак минус появился вследствие того, что знак нескомпенсированных связанных зарядов противоположен знаку свободного заряда (см. рис. 15.6, в).

Формулу (15.16) можно переписать следующим образом:

$$\oint \vec{D} \vec{ds} = \oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \vec{ds} = \epsilon_0 \oint \vec{E} \vec{ds} + \oint \vec{P} \vec{ds} = \sum q_{\text{своб}}.$$

* Теорема Гаусса [формула (15.16) или (15.17)] применима не только к электростатическому полю, но и к переменному электромагнитному полю при условии, что расстояние от заряда, создающего поле, до точки, в которой определяют напряженность, должно быть много меньше длины электромагнитной волны (подробнее см. § 21.6).

Распространил теорему Гаусса на переменное электромагнитное поле (постулировал возможность ее применения) Д. Максвелл. Поэтому теорему Гаусса в применении к переменному электромагнитному полю в литературе называют *постулатом Максвелла*.

Следовательно,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \vec{ds} = \sum q_{\text{своб}} - \oint \vec{P} \vec{ds} = \sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}}$$

или

$$\oint \vec{E} \vec{ds} = \frac{\sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}. \quad (15.17')$$

Формулы (15.17) и (15.17') отличаются своими правыми частями.

§ 15.14. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА В ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Теорему Гаусса в интегральной форме с большой эффективностью можно использовать для нахождения напряженности или электрического смещения в какой-либо точке поля, если через эту точку можно провести замкнутую поверхность таким образом, что все точки этой поверхности будут в одинаковых (симметричных) условиях по отношению к заряду, находящемуся внутри замкнутой поверхности.

Такой поверхностью является обычно сфера (если заряд точечный) или боковая поверхность цилиндра (если заряд «линейный»). При этом в силу симметричного расположения всех точек поверхности относительно заряда числовое значение напряженности поля в различных точках этой поверхности будет одинаковым.

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемую точечным зарядом в точке, удаленной на расстоянии R от заряда. С этой целью проведем через заданную точку сферическую поверхность радиусом R , полагая, что заряд находится в центре сферы, и применим к этой сфере теорему Гаусса (рис. 15.7, д).

Элемент поверхности сферы \vec{ds} перпендикулярен к поверхности сферы* и направлен в сторону внешней (по отношению к объему внутри поверхности) нормали.

В данном примере в каждой точке сферы \vec{E} и \vec{ds} совпадают по направлению. Угол между ними равен нулю. Если учесть, что числовое значение \vec{E} во всех точках сферы одно и то же, то E можно вынести из-под интеграла:

$$\oint \vec{E} \vec{ds} = \oint E ds \cos 0^\circ = E \oint ds = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Следовательно, напряженность, создаваемая точечным зарядом q на расстоянии R от него,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R^2}. \quad (15.18)$$

В силу сферической симметрии напряженность поля имеет только одну R -ю составляющую в сферической системе координат. Значит

* Имеется в виду вектор, изображающий собой элемент поверхности сферы.

$$E = E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\frac{d\varphi}{dR}.$$

Отсюда

$$\varphi = - \int E \, dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} + C. \quad (15.19)$$

Таким образом, потенциал в поле точечного заряда обратно пропорционален первой степени расстояния R от точечного заряда до точки, в которой определяется потенциал; C представляет собой постоянную интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал. Напомним, что аналогичные выражения для E и φ были получены в § 15.4 при использовании закона Кулона.

§ 15.15. ТЕОРЕМА ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Теорема Гаусса в интегральной форме выражает связь между потоком вектора \vec{D} через поверхность s , ограничивающую некоторый объем, и алгебраической суммой зарядов, находящихся внутри этого объема. С помощью теоремы Гаусса в интегральной форме нельзя определить, как связан исток линий \vec{D} в данной точке поля с плотностью свободных зарядов в той же точке поля. Ответ на этот вопрос дает дифференциальная форма теоремы Гаусса. Чтобы прийти к ней, разделим обе части уравнения (15.16) на одну и ту же скалярную величину — на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности s :

$$\frac{\oint \vec{D} \, d\vec{s}}{V} = \frac{\sum q_{\text{своб}}}{V}. \quad (б)$$

Выражение (б) остается справедливым для объема V любой величины. Устремим объем к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{D} \, d\vec{s}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{\text{своб}}}{V}. \quad (в)$$

При стремлении объема к нулю $\oint \vec{D} \, d\vec{s}$ также стремится к нулю, но отношение двух бесконечно малых величин $\oint \vec{D} \, d\vec{s}$ и V есть величина конечная *. Предел отношения потока векторной величины \vec{D} сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к объему V называют дивергенцией вектора \vec{D} ($\text{div } \vec{D}$). Часто вместо термина «дивергенция» употребляют термин «расхождение», или «исток», вектора \vec{D} .

* В ч. III учебника неоднократно использованы величины, которые определяются при стремлении рассматриваемого объема или площади к нулю.

Стремление к нулю не следует понимать дословно: речь идет лишь о таком уменьшении линейных размеров объема или площади, при котором еще не сказывается дискретность материи.

В правой части выражения (в) находится объемная плотность свободного заряда, ее обозначают $\rho_{\text{своб}}$.

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме записывают следующим образом (первая форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}, \quad (15.20)$$

т. е. исток линий \vec{D} в данной точке поля определяется величиной плотности свободных зарядов в этой точке. Если объемная плотность зарядов в данной точке положительна ($\rho_{\text{своб}} > 0$), то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку поля, линии вектора \vec{D} исходят (исток положителен, рис. 15.8, а). Если в данной точке поля

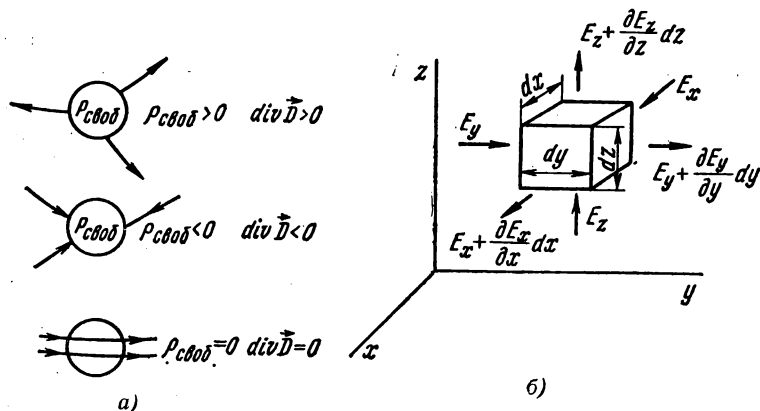


Рис. 15.8 •

$\rho_{\text{своб}} < 0$, то в бесконечно малый объем, внутри которого находится данная точка, линии вектора \vec{D} входят. И, наконец, если в какой-либо точке поля $\rho_{\text{своб}} = 0$, то в данной точке поля нет ни истока, ни стока линий \vec{D} , т. е. в данной точке линии вектора \vec{D} не начинаются и не заканчиваются.

Если среда однородна и изотропна, то ее $\epsilon_a = \text{const}$. Вместо (15.20) запишем выражение

$$\operatorname{div} \epsilon_a \vec{E} = \rho_{\text{своб}}.$$

Вынесем ϵ_a за знак дивергенции:

$$\epsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}};$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (15.21)$$

Формула (15.21) представляет собой вторую форму записи теоремы Гаусса. Она справедлива только для однородной и изотропной среды. Для неоднородной среды ϵ_a является функцией координат и потому ϵ_a не может быть вынесена за знак дивергенции.

Уравнение (15.17') в дифференциальной форме записывают так (третья форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}}{\epsilon_0}. \quad (15.21')$$

Следовательно, истоком вектора \vec{E} в отличие от истока вектора \vec{D} являются не только свободные, но и связанные заряды.

В различных системах координат $\operatorname{div} \vec{E}$ раскрывается различно.

§ 15.16. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $\operatorname{div} \vec{E}$ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Выделим в пространстве весьма малый параллелепипед с ребрами dx , dy , dz . Расположим ребра параллелепипеда параллельно осям декартовой системы (рис. 15.8, б). Для нахождения истока вектора \vec{E} из данного объема составим разность потоков, выходящих из объема и входящих в него, и разделим разность потоков на величину объема параллелепипеда, равную $dx \, dy \, dz$.

Левую грань площадью $dx \, dz$ пронизывает только одна составляющая вектора \vec{E} , т. е. составляющая $j\vec{E}_y$, остальные составляющие ($i\vec{E}_x$ и $k\vec{E}_z$) скользят по грани. Поток вектора \vec{E} , входящий в эту грань, равен $E_y \, dx \, dz$.

Так как \vec{E} есть функция координат, то и ее составляющие также есть функции координат. Правая грань площадью $dx \, dz$ отстоит от левой грани на расстоянии dy . Проекция вектора \vec{E} на ось y для нее равна $E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$, где $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ — скорость изменения E_y в направлении оси y ; $\frac{\partial E_y}{\partial y} dy$ — приращение «игрековой» составляющей напряженности поля на пути dy .

Поток, выходящий из правой грани площадью $dx \, dz$, равен $\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy\right) dx \, dz$. Исток через грани площадью $dx \, dz$ равен $\frac{\partial E_y}{\partial y} dx \, dy \, dz$. Таким же путем получим разность потоков через грани площадью $dy \, dz$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} dx \, dy \, dz.$$

Разность потоков через грани $dx \, dy$ (верхнюю и нижнюю стенки объема) равна

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} dx \, dy \, dz.$$

Для нахождения $\operatorname{div} \vec{E}$ сложим разности потоков через все грани и поделим на объем параллелепипеда $dx \, dy \, dz$; получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (15.22)$$

§ 15.17. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРА НАБЛА ДЛЯ ЗАПИСИ ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ ДИВЕРГЕНЦИИ

Ранее было показано, что умножение оператора ∇ на скалярную функцию равносильно взятию градиента от этой скалярной функции. Покажем, что скалярное умножение оператора ∇ на векторную функцию, например на функцию \vec{E} , означает взятие дивергенции от этой векторной функции.

Произведение $\nabla \vec{E}$ можно записать так:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{E} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z)^* = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (15.23)$$

Правые части (15.22) и (15.23) равны; следовательно, должны быть равны и левые их части. Поэтому

$$\nabla \vec{E} = \text{div } \vec{E},$$

т. е., действительно, умножение оператора ∇ на вектор \vec{E} означает взятие дивергенции от этого вектора.

§ 15.18. ВЫРАЖЕНИЕ $\text{div } \vec{E}$ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Без вывода запишем выражение $\text{div } \vec{E}$ в цилиндрической системе координат:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (15.24)$$

и в сферической системе координат:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (15.25)$$

§ 15.19. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА И УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Уравнения Пуассона и Лапласа являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Действительно, известно, что $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. В то же время согласно теореме Гаусса (15.21)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Подставив в (15.21) \vec{E} из (15.6), получим

$$\text{div } \vec{E} = \text{div } (-\text{grad } \varphi) = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

* Поочередно умножаем слагаемые первой скобки на слагаемые второй скобки. Учитываем, что скалярное произведение одноименных ортов равно единице, а скалярное произведение разноименных ортов равно нулю:

$$\begin{aligned}\vec{i} \vec{i} &= \vec{j} \vec{j} = \vec{k} \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1; \\ \vec{i} \vec{j} &= \vec{i} \vec{k} = \vec{j} \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0.\end{aligned}$$

Вынесем минус за знак дивергенции:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Вместо $\operatorname{grad} \varphi$ запишем его эквивалент $\nabla \varphi$; вместо div напомним ∇ . Тогда

$$\nabla (\nabla \varphi) = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}, \quad (15.26')$$

или

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (15.26)$$

Уравнение (15.26) называют уравнением Пуассона. Частный вид уравнения Пуассона, когда $\rho_{\text{своб}} = 0$, называют уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа записывают так:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (15.27)$$

Оператор $\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ называют оператором Лапласа, или лапласианом, и иногда обозначают еще символом Δ . Поэтому можно встретить и такую форму записи уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Раскроем $\nabla^2 \varphi$ в декартовой системе координат. С этой целью произведение двух множителей ∇ и $\nabla \varphi$ запишем в развернутом виде:

$$\nabla (\nabla \varphi) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Произведем почленное умножение и получим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (15.28)$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (15.29)$$

Приведем без вывода выражения $\nabla^2 \varphi$ в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (15.30)$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = & \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Уравнение Пуассона дает связь между частными производными второго порядка от φ в любой точке поля и объемной плотностью свободных зарядов в этой точке поля. В то же время потенциал φ в какой-либо точке поля зависит от всех зарядов, создающих поле, а не только от величины свободного заряда, находящегося в данной точке. Уравнение Пуассона применяют при исследовании потенциальных полей (электрических и магнитных) с 1820 г.

Уравнение Лапласа (1780 г.) первоначально было применено для описания потенциальных полей небесной механики и впоследствии было использовано для описания электрических полей.

Рассмотрим вопрос о том, как в общем виде может быть записано решение уравнения Пуассона.

Положим, что в объеме V есть объемные (ρ), поверхностные (σ) и линейные (τ) заряды. Эти заряды представим в виде совокупностей точечных зарядов: ρdV , σds , τdl ; dV — элемент объема, ds — элемент заряженной поверхности, dl — элемент длины заряженной оси. Составляющая потенциала $d\varphi$ в некоторой точке пространства, удаленной от ρdV на расстояние R , в соответствии с формулой (15.19) равна $\frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R}$.

Составляющие потенциала от поверхностного и линейного зарядов, если рассматривать их как точечные, определим аналогичным образом: $\frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_a R}$ и $\frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R}$.

Полное значение φ определим как сумму (интеграл) составляющих потенциала от всех зарядов в поле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_s \frac{\sigma ds}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{R}. \quad (15.31')$$

В формуле (15.31') ρ , σ и τ есть функции радиуса R . Практически формулой (15.31') пользуются редко, так как распределение σ по поверхности, τ по длине и ρ по объему сложным образом зависит от конфигурации электродов и, как правило, перед проведением расчета неизвестно. Поэтому интегрирование произвести затруднительно, так как обычно неизвестно, какова зависимость ρ , σ и τ от радиуса R .

При использовании формулы (15.31') предполагается, что потенциал на бесконечности равен нулю и что заряды, создающие поле, распределены в ограниченной (не бесконечно протяженной) области (иначе интеграл может оказаться расходящимся).

§ 15.20. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Под граничными условиями понимают условия, которым подчиняется поле на границах раздела сред с разными электрическими свойствами.

При изучении раздела «Переходные процессы» очень большое значение имел вопрос о начальных условиях и о законах коммутации. Начальные условия и законы коммутации позволяли определить

постоянные интегрирования при решении задач классическим методом. В классическом методе они использовались в явном виде, в операторном методе — в скрытом. Без использования их нельзя решить ни одной задачи на переходные процессы.

Можно провести параллель между ролью граничных условий в электрическом (или в любом другом) поле и ролью начальных условий и законов коммутации при переходных процессах.

При интегрировании уравнения Лапласа (или Пуассона) в решение входят постоянные интегрирования. Их определяют исходя из граничных условий. Прежде чем перейти к подробному обсуждению граничных условий, рассмотрим вопрос о поле внутри проводящего тела в условиях электростатики.

§ 15.21. ПОЛЕ ВНУТРИ ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

В проводящем теле, находящемся в электростатическом поле, вследствие явления электростатической индукции происходит разделение зарядов. Отрицательные заряды смещаются на поверхность тела, обращенную в сторону более высокого потенциала, положительные — в противоположную сторону (рис. 15.9).

Все точки тела будут иметь одинаковый потенциал. Если между какими-либо точками возникла бы разность потенциалов, то под действием ее возникло бы упорядоченное движение зарядов, что противоречило бы понятию электростатического поля.

Поверхность тела эквипотенциальна. Вектор напряженности внешнего поля в любой точке поверхности подходит к ней под прямым углом. *Внутри проводящего тела напряженность поля равна нулю*, так как внешнее поле компенсируется полем зарядов, расположившихся на поверхности тела.



Рис. 15.9

§ 15.22. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА И ДИЭЛЕКТРИКА

На границе проводящее тело — диэлектрик при отсутствии тока по проводящему телу выполняются два условия:

1) отсутствует тангенциальная (касательная к поверхности) составляющая напряженности поля:

$$E_t = 0; \quad (15.32)$$

2) вектор электрического смещения \vec{D} в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда σ на поверхности проводящего тела в этой точке:

$$D = \sigma. \quad (15.33)$$

Рассмотрим первое условие. Все точки поверхности проводящего тела имеют один и тот же потенциал. Следовательно, между двумя любыми весьма близко расположенными друг к другу точками поверхности приращение потенциала $d\varphi = 0$, но $d\varphi = E_t dl$, следовательно, $E_t dl = 0$.

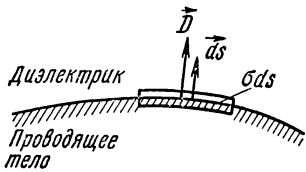


Рис. 15.10

Так как элемент пути dl между точками на поверхности не равен нулю, то равно нулю E_t .

Для доказательства второго условия мысленно выделим бесконечно малый параллелепипед (рис. 15.10). Верхняя грань его параллельна поверхности проводящего тела и расположена в диэлектрике. Нижняя грань находится в проводящем теле. Высоту параллелепипеда возьмем весьма малой (сплющим его). Применим к параллелепипеду теорему Гаусса. В силу малости линейных размеров можно принять, что плотность заряда σ на поверхности ds проводящего тела, попавшей внутрь параллелепипеда, одна и та же. Полный заряд внутри рассматриваемого объема равен σds .

Поток вектора \vec{D} через верхнюю грань объема равен $\vec{D} \vec{ds} = D ds$. Потока вектора \vec{D} через боковые грани объема ввиду малости последнего и того, что вектор \vec{D} скользит по ним, нет. Через «дно» объема поток также отсутствует, так как внутри проводящего тела $E = 0$ и $D = 0$ (ϵ_a проводящего тела есть величина конечная). Таким образом, поток вектора \vec{D} из объема равен $D ds = \sigma ds$ или $D = \sigma$.

§ 15.23. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

На границе раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями выполняются два следующих условия:

- 1) равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad (15.34)$$

- 2) равны нормальные составляющие электрической индукции:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (15.35)$$

Индекс 1 относится к первому диэлектрику, индекс 2 — ко второму.

Первое условие вытекает из того, что в потенциальном поле $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ по любому замкнутому контуру. Второе условие представляет собой следствие теоремы Гаусса.

Докажем справедливость первого условия. С этой целью выделим плоский замкнутый контур $mnpqt$ (рис. 15.11) и составим вдоль него циркуляцию вектора напряженности электрического поля. Верхняя сторона контура расположена в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , нижняя — в диэлектрике с ϵ_1 . Длину стороны mn , равную длине стороны pq , обозначим dl . Контур возьмем так, что раз-

меры nr и qt будут бесконечно малы по сравнению с dl . Поэтому составляющими интеграла $\oint \vec{E} d\vec{l}$ вдоль вертикальных сторон в силу их малости пренебрежем. Составляющая $\oint \vec{E} d\vec{l}$ на пути mn равна $\vec{E}_2 d\vec{l}_2 = \vec{E}_{2t} d\vec{l}$, по пути pq равна $\vec{E}_1 d\vec{l}_1 = -E_{1t} dl$. Знак минус появился потому, что элемент длины на пути pq и касательная составляющая вектора \vec{E}_1 направлены в противоположные стороны ($\cos 180^\circ = -1$).

Таким образом, $\oint \vec{E} d\vec{l} = E_{2t} dl - E_{1t} dl = 0$ или $E_{1t} = E_{2t}$.

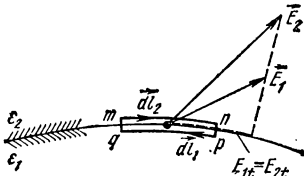


Рис. 15.11

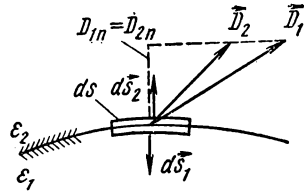


Рис. 15.12

Убедимся в справедливости второго условия. С этой целью на границе раздела двух сред выделим очень малых размеров параллелепипед (рис. 15.12). Внутри выделенного объема есть связанные заряды и нет свободных (случай наличия свободных зарядов на границе раздела рассмотрим отдельно), поэтому

$$\oint \vec{D} d\vec{s} = 0.$$

Поток вектора \vec{D} через верхнюю грань площадью ds

$$\vec{D}_2 d\vec{s}_2 = D_{2n} ds_2;$$

через нижнюю грань

$$\vec{D}_1 d\vec{s}_1 = D_{1n} ds_1 \cos 180^\circ = -D_{1n} ds;$$

$$|d\vec{s}_1| = |d\vec{s}_2| = ds.$$

Следовательно,

$$\oint \vec{D} d\vec{s} = -D_{1n} ds + D_{2n} ds = 0 \text{ или } D_{1n} = D_{2n}.$$

При наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов с плотностью σ (это встречается весьма редко)

$$\oint \vec{D} d\vec{s} = D_{2n} ds - D_{1n} ds = \sigma ds,$$

при этом

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (15.36)$$

т. е. при наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов нормальная составляющая вектора \vec{D} скачком изменяется на величину плотности свободных зарядов на границе раздела.

Потенциал есть работа (см. стр. 522). На границе раздела двух сред потенциал не претерпевает скачков.

§ 15.24. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Электрическое поле описывается уравнением Лапласа или Пуассона. Оба они являются уравнениями в частных производных. Для уравнений в частных производных в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений допускается в общем случае множество линейно независимых друг от друга решений. В любой же конкретной практической задаче есть единственная картина поля, т. е. единственное решение. Из множества линейно независимых решений, допускаемых уравнением Лапласа — Пуассона, выбор единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производят с помощью граничных условий.

Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа — Пуассона и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Это положение называют *теоремой единственности решения*. Докажем ее.

Допустим, что есть два решения (φ' и φ'' , E' и E''). На поверхности каждого k -го проводящего тела с зарядом q_k потенциал $\varphi_k' = \varphi_k''$. Во всех точках разностное поле ($\varphi = \varphi' - \varphi''$ и $E = E' - E''$) отсутствует, так как его энергия $\int \frac{1}{2} \epsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \sum \varphi_k q_k = 0$ [§ 15.43;

на поверхности проводника $\varphi_k = \varphi_k' - \varphi_k'' = 0$].

§ 15.25. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

В зависимости от того, что задано и что определяют, задачи электростатики можно подразделить на три типа.

Задача первого типа. По заданному закону распределения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$ найти распределение свободных зарядов, вызвавших поле. Такого рода задачи можно решать с помощью уравнения Пуассона. Это наиболее простой тип задач; — $\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}$ в данной точке поля согласно уравнению Пуассона равняется сумме частных производных второго порядка от φ , в которую подставляют координаты данной точки поля. Одна из задач первого типа рассмотрена в примере 189.

Близкой к задачам первого типа является задача, в которой известно выражение для потенциала φ как функции координат и требуется найти распределение поверхностных или линейных зарядов, создающих поле, когда объемные заряды в поле отсутствуют. Если заряды расположены на поверхностях проводящих тел, то в соответствии с формулой (15.33) плотность заряда $\sigma = \epsilon E_n$, где $E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Индекс n означает направление, нормальное к поверхности тела.

Задача второго типа. Задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат $\rho_{\text{своб}}(x, y, z)$. Найти закон изменения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$. Эта задача является обратной по отношению к первой и значительно сложнее ее. Принципиально задача состоит в решении уравнения Пуассона отно-

сительно ϕ , т. е. в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. Задачи второго типа рассмотрены в примерах 184—187.

Задачи первого и второго типов практически встречаются редко, чаще имеют дело с задачами третьего типа.

Задача третьего типа. Известны потенциалы (или полные заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения E или ϕ во всех точках поля. Несколько задач третьего типа рассмотрено в § 15.37—15.40 и в примерах 176, 182, 183.

Если среда, в которой создано поле, является неоднородной, то ее подразделяют на однородные области и решение уравнения Лапласа производят для каждой области в отдельности. Основная трудность задачи состоит в том, что полные заряды тел известны, а плотность распределения зарядов на отдельных участках заряженного тела неизвестна. Решения уравнения Лапласа для отдельных областей должны быть согласованы друг с другом: на границе раздела двух сред с различными ϵ , должны выполняться граничные условия. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика также должны выполняться свои граничные условия.

Задачи третьего типа можно решать аналитически или графически либо путем электромоделирования.

В настоящем параграфе приведена лишь краткая характеристика этих методов (путей решения). Более обстоятельное изложение их дано в дальнейшем на конкретных примерах.

В самых простейших случаях задачи на аналитический расчет полей решают путем использования теоремы Гаусса в интегральной форме (см. § 15.13). В более сложных случаях аналитическое решение задач третьей группы производят, используя уравнение Лапласа.

Аналитические методы решения задач третьей группы могут быть подразделены на две подгруппы. В первой из них производят интегрирование уравнения Лапласа без использования вспомогательных (искусственных) приемов. Во второй подгруппе используют искусственный прием — метод зеркальных изображений*.

По методу зеркальных изображений решение производят путем введения вспомогательного заряда или зарядов, которые в расчетном отношении заменяют связанные заряды, выявившиеся на границах тел или сред в результате их поляризации или в результате электростатической индукции (см. § 15.30—15.33).

В тех случаях, когда потенциал ϕ является функцией только одной координаты выбранной системы координат, уравнение Лапласа из уравнения в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое интегрируется без затруднений (см. примеры 182—184).

Если же потенциал ϕ является функцией двух или трех координат, то, для того чтобы проинтегрировать уравнение Лапласа, применяют метод Фурье — Бернулли, который позволяет перейти от уравнения в частных производных к эквивалентной ему совокупности двух или

* См. также метод конформных преобразований в приложении П.

соответственно трех обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 15.37).

Графический метод анализа и расчета задач третьей группы представляет собой метод, в котором по определенным правилам производят построение семейств силовых и эквипотенциальных линий, используя некоторые заранее известные свойства исследуемого поля. Эти правила практически одни и те же для всех неизменных во времени полей, т. е. для электростатического поля, электрического поля постоянного тока в проводящей среде (см. гл. XVI) и для магнитного поля постоянного тока (см. гл. XVII). В силу того, что графический метод решения наиболее часто применяют для анализа магнитных полей, он рассмотрен не в данной главе, а в главе «Магнитное поле постоянного тока» (см. § 17.20).

В основу анализа и расчета электростатических полей методом моделирования положена аналогия между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока в проводящей среде. Метод моделирования основан на сопоставлении задачи электростатики и сходной задачи на электрическое поле постоянного тока в проводящей среде, в которой совокупность силовых и эквипотенциальных линий практически такая же. Это дает возможность воспользоваться результатами экспериментального исследования поля в проводящей среде при решении родственной электростатической задачи. Подробно об этом говорится в § 16.7—16.9. Следует заметить, что при расчетах полей широко применяют метод наложения.

В заключение отметим, что в задачах электростатики расчет можно производить с целью определения либо «точечной» характеристики поля (напряженности или потенциала в заданной точке), либо интегральной характеристики данного поля, например емкости или разности потенциалов.

В приложениях М, Н, О, П к ч. III рассмотрены идеи и основные положения ряда аналитических методов расчета полей, которые рекомендуются студентам специальностей ТВН, электронной техники, электрических машин и аппаратов.

Перейдем к рассмотрению некоторых простейших электростатических задач.

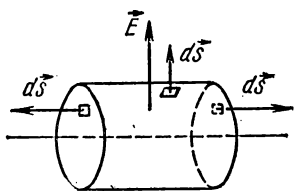


Рис. 15.13

§ 15.26. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ

Под заряженной осью понимают весьма тонкий теоретически бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволока). Заряд на единицу длины ее принято обозначать через τ . Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна ϵ_a . Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси (рис. 15.13), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность так, что ось цилиндрической поверхности совпадет с заряженной осью.

Используем теорему Гаусса, которая применима к замкнутой поверхности. В нашем случае последняя образована боковой поверх-

ностью цилиндра и двумя его доньями. Поток вектора \vec{E} имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через донья поток вектора \vec{E} отсутствует, так как элемент поверхности \vec{ds} каждого донья перпендикулярен \vec{E} .

Элементы \vec{ds} боковой поверхности и напряженность электрического поля \vec{E} в любой точке цилиндрической поверхности по направлению совпадают, поэтому

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\tau}{\epsilon_a} \quad \text{или} \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (15.37)$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r точки от оси.

Потенциал

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int E dr = - \int \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r} dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + C = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} + C \end{aligned} \quad (15.38)$$

изменяется по логарифмическому закону *.

§ 15.27. ПОЛЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ОСЕЙ

Пусть одна ось на единицу длины имеет заряд $+\tau$, другая — заряд $-\tau$. Возьмем в поле некоторую произвольную точку M (рис. 15.14). Результирующая напряженность поля в ней \vec{E}_M равна геометрической сумме напряженностей от обоих зарядов. Расстояние точки M до положительно заряженной оси обозначим через a , до отрицательно заряженной оси — через b . Потенциал есть функция скалярная. Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \end{aligned} \quad (15.39)$$

Уравнением эквипотенциали в поле двух заряженных осей является выражение

$$\frac{b}{a} = \text{const.}$$

Эквипотенциаль представляет собой совокупность точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная.

В геометрии известна теорема Аполлония. Согласно теореме Аполлония, геометрическим местом точек, отношение расстояний которых

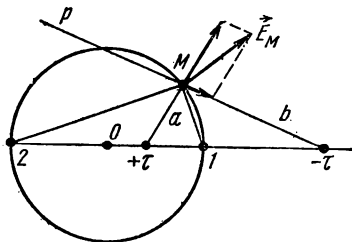


Рис. 15.14

* Единича, находящаяся под знаком логарифма в (15.38), имеет смысл единичного радиуса (единицы измерения), поэтому логарифм берется от величины с нулевой размерностью.

до двух заданных точек есть величина постоянная, является окружность. Поэтому эквипотенциаль в поле двух заряженных осей есть окружность. Рассмотрим, как ее можно построить. Соединим точку M с осями. Проведем биссектрисы внутреннего (aMb) и внешнего (pMa) углов. Точки 1 и 2 пересечения биссектрис с линией, проведенной через заряженные оси, и точка M будут тремя точками искомой окружности.

Для нахождения положения центра окружности (точки O) разделим пополам расстояние между точками 1 и 2.

§ 15.28. ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Расстояние между осями двух проводов линии (рис. 15.15, a) обозначим через d , радиус каждого провода — через r . Если левому проводу будет сообщен, например, заряд $+\tau$ на единицу длины, а правому заряд $-\tau$, то в пространстве между проводами возникнет электрическое поле. Заряды проводов распределятся по поверхности с неодинаковой плотностью.

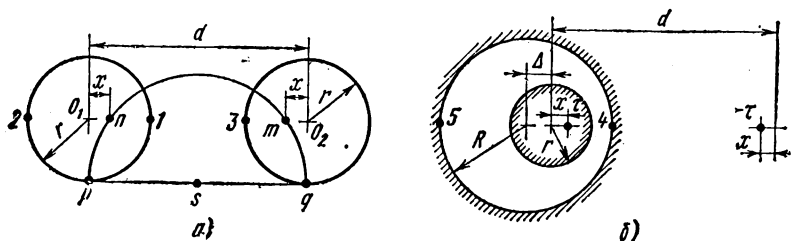


Рис. 15.15

Поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциальной. Внутри проводов $E = 0$. Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной задаче о поле двух заряженных осей. (Картину поля двух заряженных осей см. на рис. 15.3, a .) Расположим две заряженные оси так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными.

Точки O_1 и O_2 означают геометрические оси проводов. Заряженные оси пусть будут расположены в точках m и n . Из условия симметрии они на одинаковое расстояние x удалены от геометрических осей.

Запишем условие равенства потенциалов точек 1 и 2 левого провода. Отношение $\frac{b}{a}$ для точки 1 есть $\frac{d-r-x}{r-x}$; отношение $\frac{b}{a}$ для точки 2 равно $\frac{d+r-x}{r+x}$.

Из равенства

$$\frac{d-r-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$$

получим

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}. \quad (15.40)$$

В последнем выражении знак минус перед радикалом соответствует положению точки n , знак плюс — точке m .

Положение заряженных осей (часто их называют *электрическими осями* проводов) вместо подсчетов по формуле (15.40) находят путем следующих графических построений.

Проводят общую касательную к проводам (прямая pq), делят расстояние между точками касания пополам (точка s) и проводят окружность радиусом ps . Точки пересечения (m и n) окружности с линией $O_1 O_2$ дают положения электрических осей, т. е. таких осей, на которых надо было бы мысленно сосредоточить заряды проводов, чтобы поверхности проводов являлись эквипотенциалами. Так как поле от двух заряженных осей вне проводов удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворены граничные условия (поверхность каждого провода является эквипотенциалью, на ней $E_t = 0$), то на основании теоремы единственности полученное решение истинно.

Нетрудно убедиться в том, что если $d \gg r$, то x становится много меньше r . При этом электрические и геометрические оси практически совпадают.

Рассмотренную методику можно применить и в том случае, когда заданы два цилиндрических электрода *неравных* радиусов, следы поверхности которых совпадают с какими-либо двумя эквипотенциальными линиями на рис. 15.3.

Например, поле в пространстве между двумя цилиндрическими электродами, один из которых находится внутри другого [см. рис. 15.15, б (заданы радиусы r , R и смещение между осями Δ)], найдем как поле от двух заряженных осей с зарядами $+\tau$ и $-\tau$. Положение осей определено значениями x и d . Для подсчета значений x и d следует воспользоваться уравнением (15.40) и уравнением, выражающим равенство потенциалов точек 4 и 5 окружности радиусом R .

§ 15.29. ЕМКОСТЬ

Если два каких-либо проводящих тела разделены диэлектриком и несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды Q , то в пространстве между ними создается электрическое поле. Пусть разность потенциалов между телами, обусловленная этими зарядами, равна U .

Под емкостью C между двумя телами, на которых имеются равные и противоположные по знаку заряды, понимают абсолютную величину отношения заряда на одном из тел к напряжению между телами:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (15.41)$$

Из определения емкости следует единица ее размерности $1 \frac{\text{Кулон}}{\text{Вольт}} = 1 \text{ фарада (ф)}$. Это очень крупная единица, и потому на практике пользуются более мелкими кратными ей единицами: микрофарадой (мкф) и пикофарадой (пф): $1 \text{ мкф} = 10^{-6} \text{ ф}$; $1 \text{ пф} = 10^{-12} \text{ ф}$.

Устройства, предназначенные для получения *определенной* величины емкости, называют *конденсаторами*. Однако не следует думать, что емкостью обладают только специально созданные для ее получения

устройства. Емкостью обладают всякие два проводящих тела, разделенных диэлектриком.

В литературе также можно встретить термин *емкость уединенного тела*. Под ней понимают отношение заряда на этом теле к его потенциалу, полагая, что второе тело удалено в бесконечность и что потенциал его равен нулю. В приведенном определении емкости между двумя проводящими телами и емкости уединенного тела имеется в виду, что если в электростатическом поле есть и другие проводящие тела, то они не заряжены; в противном случае заряды этих тел влияли бы на величину разности потенциалов U между рассматриваемыми телами (на величину потенциала тела).

Так как напряжение между двумя телами в электростатическом поле может быть линейно выражено через заряд Q (исключение составляют только устройства, в которых используются сегнетодиэлектрики — вещества, у которых ϵ является функцией E), то отношение $\frac{Q}{U}$ оказывается не зависящим ни от величины Q , ни от величины U .

Емкость зависит только от конфигурации тел, их размеров, от расстояния между телами, от электрических свойств диэлектрика (величины ϵ).

Рассмотрим определение *емкости двухпроводной линии*. Выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины. Точка 1 (см. рис. 15.15, а) принадлежит поверхности левого провода, точка 3 — поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними

$$U_{13} = \Phi_1 - \Phi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}.$$

При $d \gg r$ $x \ll r$, поэтому

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \cdot 2 \cdot \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r}. \quad (15.42)$$

Следовательно, емкость единицы длины линии при условии $d \gg r$

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (15.43)$$

Она действительно зависит только от геометрических размеров и от свойств среды, не зависит от величины заряда τ и от величины напряжения U_{13} . Если расстояние между двумя проводами увеличивать, то емкость будет уменьшаться.

§ 15.30. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для расчета электростатических полей, особенно ограниченных какой-либо проводящей поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя диэлектриками, широко применяют метод зеркальных изображений.

Это искусственный прием расчета. В него, кроме заданных зарядов, вводят еще дополнительные заряды, величины и местоположение

которых выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям в поле. Если граница между двумя средами плоская, то дополнительные («фиктивные») заряды помещают территориально там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных зарядов. Метод зеркальных изображений применяют не только для расчета электростатических полей, но и для расчета электрических полей в проводящей среде и магнитных полей. Обоснованием метода и правильности даваемого им решения является теорема единственности.

Рассмотрим два примера на метод зеркальных изображений.

§ 15.31. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Заряженная ось (τ — заряд на единицу длины) расположена параллельно поверхности проводящей среды (рис. 15.16, *а*). Проводящей средой может быть какая-либо металлическая стенка или, например, земля. Требуется определить характер поля в верхней полуплоскости (диэлектрике).

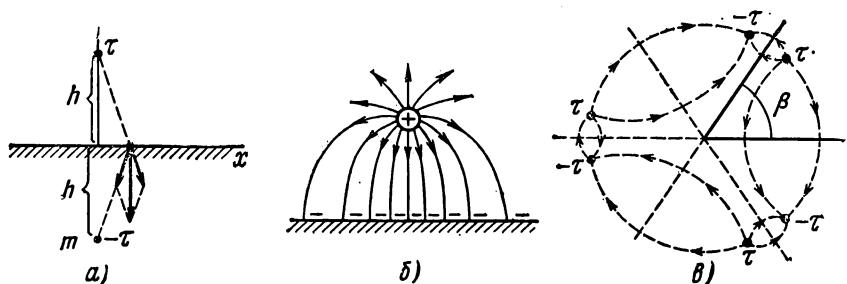


Рис. 15.16

Вследствие явления электростатической индукции на поверхности проводящего тела выступают заряды. Плотность их меняется с изменением координаты x . Поле в диэлектрике создается не только заряженной осью, но и зарядами, выступившими на поверхности проводящего тела вследствие электростатической индукции. Несмотря на то что распределение плотности зарядов на поверхности проводящей среды неизвестно, данную задачу сравнительно легко можно решить по методу зеркальных изображений.

Поместим в точке m фиктивный заряд обратного знака ($-\tau$) по отношению к заданному заряду τ . Расстояние h от точки m до плоскости раздела сред такое же, как и расстояние от действительного заряда до плоскости раздела. В этом смысле осуществлено зеркальное изображение. В данной задаче фиктивный заряд численно равен заданному, но имеет обратный знак. Так будет не всегда, т. е. не во всех задачах искусственно введенный заряд будет численно равен заданному и иметь противоположный знак.

Убедимся, что напряженность поля от двух зарядов (τ и $-\tau$) в любой точке границы раздела имеет только нормальную к границе составляющую и не имеет тангенциальной составляющей (см. построения на рис. 15.16, а). Действительно, тангенциальные составляющие от обоих зарядов имеют противоположные направления и в сумме дают нуль в любой точке поверхности.

Можно убедиться в том, что потенциал от каждой из осей, определяемый формулой (15.38), удовлетворяет уравнению Лапласа [формуле (15.30)]. Для того чтобы проверить это, следует подставить правую часть формулы (15.38) в формулу (15.30) и убедиться в том, что $\nabla^2 \varphi$ будет равно нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} \right) \right] = 0.$$

Так как потенциал от каждой из осей удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворено граничное условие, то на основании теоремы единственности полученное решение является истинным.

Картина поля заряженной оси, расположенной параллельно проводящей плоскости, изображена на рис. 15.16, б. Силовые линии перпендикулярны поверхности провода и поверхности проводящей плоскости. Знаки минус на поверхности проводящей плоскости означают отрицательные заряды, выявившиеся на ее поверхности в результате электростатической индукции.

Многократные зеркальные отражения

Если заряд τ находится в диэлектрике внутри двугранного угла $\beta = \frac{\pi}{n}$ (n — целое число), а границами угла являются проводящие стенки (на рис. 15.16, в $n=3$), то поле внутри двугранного угла определится как поле от $2n$ знакопеременных зарядов $\pm\tau$, расположенных зеркально по отношению друг к другу. На каждой стороне двугранного угла тангенциальная составляющая напряженности поля равна нулю.

§ 15.32. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ОСИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПРОНИЦАЕМОСТЯМИ

Как показано на рис. 15.17, а, верхнее полупространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{1a} , нижнее — диэлектриком с ϵ_{2a} ; ab — граница раздела двух сред. В верхнем полупространстве параллельно границе раздела сред находится заряженная ось с зарядом τ_1 . Вследствие поляризации диэлектриков на границе раздела выявятся связанные заряды, которые будут влиять на поле в обеих средах. Учет влияния связанных зарядов на поле производят путем введения двух дополнительных фиктивных зарядов τ_2 и τ_3 в отличие от предыдущей задачи, где вводился один заряд. В предыдущей задаче надо было фактически удовлетворить только одному условию ($E_t = 0$), и это можно было сделать с помощью одного

заряда. В данной же задаче надо удовлетворить двум граничным условиям, что возможно только с помощью двух неизвестных пока зарядов τ_2 и τ_3 .

Расчет поля в любой точке *верхнего* полупространства (полуплоскости) производят от двух зарядов: заданного τ_1 и дополнительного τ_2 . Причем не только верхнее, но и нижнее полупространство заполнено (в расчетном смысле) диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{1a} (рис. 15.17, б).

Поле в любой точке *нижнего* полупространства определяют как поле от некоторого дополнительного заряда τ_3 , расположенного в той же точке, где находится заряд τ_1 . В этом случае не только нижнее, но и верхнее полупространство заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{2a} (рис. 15.17, в).

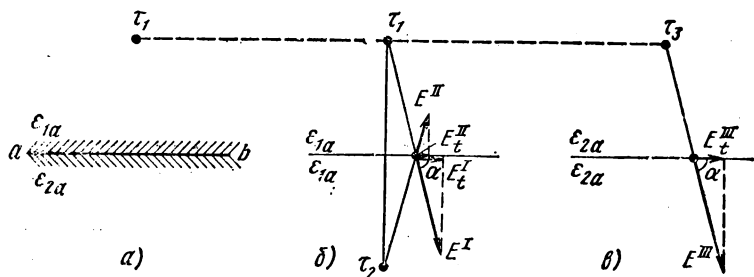


Рис. 15.17

Составим два уравнения для определения неизвестных пока τ_2 и τ_3 .

Из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела следует, что

$$E_t^I + E_t^{II} = E_t^{III}$$

или

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_{1a}r} [\tau_1 + \tau_2] \cos \alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_{2a}r} \tau_3 \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 \frac{\epsilon_{1a}}{\epsilon_{2a}} \quad (15.44)$$

Из условия равенства нормальных составляющих вектора D на границе раздела, приняв за положительное направление для нормали направление вниз, имеем

$$\bar{D}_n^I - \bar{D}_n^{II} = \bar{D}_n^{III}$$

Запишем последнюю строку в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi r} (\tau_1 - \tau_2) \sin \alpha = \frac{1}{2\pi r} \tau_3 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \quad (15.45)$$

Совместное решение (15.44) и (15.45) дает

$$\tau_2 = \frac{\epsilon_{1a} - \epsilon_{2a}}{\epsilon_{1a} + \epsilon_{2a}} \tau_1 \quad (15.46)$$

и

$$\tau_3 = \frac{2\epsilon_{2a}}{\epsilon_{1a} + \epsilon_{2a}} \tau_1. \quad (15.47)$$

Знак заряда τ_2 совпадает со знаком заряда τ_1 , если $\epsilon_{1a} > \epsilon_{2a}$. Знак τ_3 всегда тот же, что и знак τ_1 .

Если поле будет создаваться не заряженной осью, а точечным зарядом, то вся методика сохраняется и формулы (15.46) и (15.47) годятся и для точечных зарядов. Но под τ теперь следует понимать величину точечного заряда.

§ 15.33. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

В качестве системы заряженных тел рассмотрим многопроводную линию из n весьма длинных проводов с зарядом τ_k на единицу длины (индекс у заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно поверхности земли*. Высота подвеса и радиус каждого провода известны. Известна также электрическая проницаемость ϵ_a среды, окружающей провода.

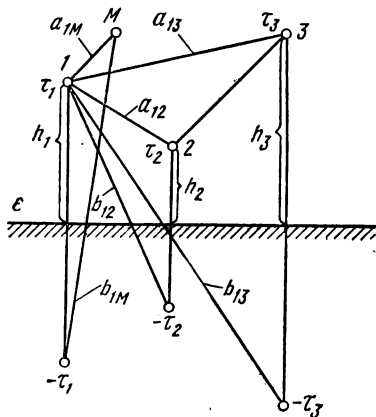


Рис. 15.18

Возьмем в диэлектрике некоторую произвольную точку M (рис. 15.18) и найдем ее потенциал. Потенциал точки M будет равен сумме потенциалов, создаваемых каждым проводом и его зеркальным изображением.

Составляющую потенциала точки M от провода 1 и его зеркального изображения в соответствии с формулой (15.39) можно записать следующим образом (постоянную, с точностью до которой определяется потенциал, опускаем):

$$\varphi_{M1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}},$$

где b_{1M} — расстояние точки M до зеркального изображения первого провода;

a_{1M} — расстояние точки M до первого провода.

Будем полагать, что высоты подвеса проводов над землей много больше радиусов проводов. При этом электрические оси практически совпадут с геометрическими.

* В более общем случае параллельно поверхности любой проводящей среды

Составляющая потенциала точки M от второго провода и его зеркального изображения

$$\varphi_{M_2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_M = \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} + \varphi_{M_3} + \dots = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} + \\ + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{3M}}{a_{3M}} + \dots \end{aligned}$$

§ 15.34. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ. ПЕРВАЯ ГРУППА ФОРМУЛ МАКСВЕЛЛА

Точка M может быть помещена на поверхность первого провода. При этом $\varphi_M = \varphi_1$; $b_{M_1} = 2h_1$; $a_{M_1} = r_1$; $b_{M_2} = b_{12}$ — расстояние первого провода до зеркального изображения второго провода; $a_{M_2} = a_{12}$ — расстояние первого провода до второго провода и т. д.:

$$\varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}} + \dots \quad (15.48')$$

Коэффициенты при зарядах τ_1 , τ_2 и других зависят только от геометрических размеров тел, взаимного их расположения и от свойств среды. Они не зависят ни от величины, ни от знаков зарядов и потенциалов.

Для сокращения записи выражение (15.48') и другие, аналогичные ему, запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13} + \dots \\ \varphi_2 &= \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23} + \dots \\ \varphi_3 &= \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.48)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{km} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{km}}{a_{km}}, \\ \alpha_{kk} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_k}{r_k}. \end{aligned} \right\} \quad (15.48'')$$

Коэффициент $\alpha_{mk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{mk}}{a_{mk}}$. Так как $b_{mk} = b_{km}$ и $a_{mk} = a_{km}$, то $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$. Систему уравнений (15.48) принято называть *первой группой формул Максвелла* (ее не следует смешивать с первым уравнением Максвелла, о котором идет речь в § 18.2).

Коэффициенты α называют *потенциальными коэффициентами*. Размерность их равна размерности единицы длины, разделенной на фараду.

Так как у всех коэффициентов α под знаком логарифма находится дробь, числитель которой всегда больше знаменателя, то все коэффициенты α положительны.

Коэффициентам α может быть дано следующее толкование. Пусть заряды всех проводов, кроме первого, равны нулю:

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0, \text{ а } \tau_1 = 1;$$

тогда $\varphi_1 = \alpha_{11}$, т. е. α_{11} численно равно потенциалу первого провода, если на первом проводе находится единичный заряд, а заряды на остальных проводах отсутствуют. Аналогично, α_{21} численно равно потенциалу второго провода в тех же условиях. Система (15.48) позволяет подсчитать потенциалы заряженных тел по известным общим зарядам тел.

Может встретиться и обратная задача: по известным потенциалам тел найти общие заряды тел.

§ 15.35. ЕМКОСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ. ВТОРАЯ ГРУППА ФОРМУЛ МАКСВЕЛЛА

Решим систему (15.48) относительно зарядов, полагая потенциалы φ и коэффициенты α известными:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.49)$$

Коэффициенты $\beta_{kn} = \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$. Здесь через Δ обозначен определитель системы (15.48):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение Δ_{kn} получают из определителя системы Δ путем вычеркивания k -строки и n -столбца и умножения полученного минора на $(-1)^{k+n}$.

Система (15.49) является *второй группой формул Максвелла*.

Коэффициенты β называют *емкостными коэффициентами*. Размерность их обратна размерности коэффициента α . Так как определитель системы Δ симметричен относительно главной диагонали, то $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$ и потому $\beta_{kn} = \beta_{nk}$. Все β с одинаковыми индексами положительны, все β с разными индексами отрицательны.

Убедимся, например, в том, что β_{11} положительно, а β_{21} и β_{31} отрицательны. С этой целью все провода, кроме первого, соединим тонкими (чтобы не исказить поля) проводниками с землей. Потенциал земли примем равным нулю. При этом из (15.49) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1, \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1, \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (15.49')$$

Придадим первому проводу положительный по отношению к земле потенциал, соединив его с землей, например через батарею (рис. 15.19, а) Заряд первого провода положителен и потенциал первого провода положителен ($\varphi_1 > 0$; $\tau_1 > 0$). Отрицательный заряд растечется по

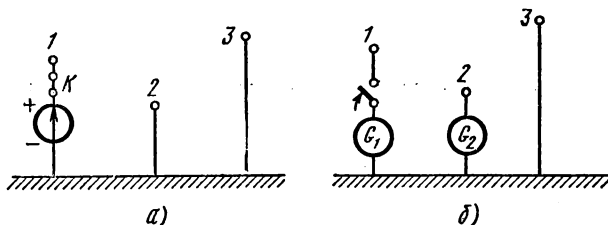


Рис. 15.19

земле и по всем телам, с ней электрически соединенными. Все провода, кроме первого, поскольку они электрически соединены с землей, приобретут отрицательные заряды:

$$\varphi_2 = 0 \quad \tau_2 < 0,$$

$$\varphi_3 = 0 \quad \tau_3 < 0.$$

Из системы (15.49') следует, что

$$\beta_{11} = \frac{\tau_1}{\varphi_1} > 0, \text{ а } \beta_{21} = \frac{\tau_2}{\varphi_1} < 0 \text{ и } \beta_{31} = \frac{\tau_3}{\varphi_1} < 0.$$

Отсюда следует методика определения коэффициентов β_{11} и β_{21} опытным путем.

Если после зарядки провода 1 (ключ K на рис. 15.19, а включен) до известного потенциала φ_1 ключ K разомкнуть, убрать батарею, включить гальванометры G_1 и G_2 (рис. 15.19, б), а затем замкнуть ключ K , то система разрядится; G_1 измерит заряд τ_1 ; G_2 измерит заряд τ_2 . Далее находим $\beta_{11} = \frac{\tau_1}{\varphi_1}$ и $\beta_{21} = \frac{\tau_2}{\varphi_1}$.

§ 15.36. ЧАСТИЧНЫЕ ЕМКОСТИ. ТРЕТЬЯ ГРУППА ФОРМУЛ МАКСВЕЛЛА

Систему (15.49) принято записывать и в иной форме, чтобы в правой части каждой строчки были не потенциалы, а разности потенциалов между данным телом и всеми остальными, в том числе и землей.

В соответствии с (15.49) заряд k -тела

$$\tau_k = \beta_{kk}\varphi_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km}\varphi_m.$$

Слагаемое

$$\beta_{km}\varphi_m = \beta_{km}(\varphi_m - \varphi_k + \varphi_k) = -\beta_{km}U_{km} + \beta_{km}\varphi_k.$$

Поэтому

$$\tau_k = \varphi_k \beta_{kk} + \varphi_k \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} U_{km} = \varphi_k \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} (-\beta_{km}) U_{km}.$$

Обозначим:

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn} = \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} \quad (15.50)$$

и

$$C_{km} = -\beta_{km}. \quad (15.51)$$

Тогда

$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + U_{k1} C_{k1} + U_{k2} C_{k2} + \dots = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} U_{km} C_{km}. \quad (15.52)$$

Если придать k значения 1, 2, 3, ..., то получим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \varphi_1 C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13} + \dots \\ \tau_2 &= \varphi_2 C_{22} + U_{21} C_{21} + U_{23} C_{23} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}. \quad (15.53)$$

Систему (15.53) называют *третьей группой формул Максвелла*. Коэффициенты C_{kk} называют *собственными частичными емкостями*, коэффициенты C_{km} — *взаимными частичными емкостями*. (Часто слова «собственная» и «взаимная» опускают.)

Так как $\beta_{km} = \beta_{mk}$, то и $C_{km} = C_{mk}$.

Размерность частичных емкостей та же, что и размерность емкостных коэффициентов β . Все частичные емкости положительны. Так как $C_{km} = -\beta_{km}$, а $\beta_{km} < 0$, то очевидно, что $C_{km} > 0$. Чтобы убедиться, что C_{kk} положительно, проведем следующий опыт: соединим тонкими проводниками все провода с k -проводом. Все $U_{km} = 0$, и из (15.52) следует, что $\tau_k = \varphi_k C_{kk}$.

Если k -проводу сообщить положительный по отношению к земле потенциал (потенциал земли принят равным нулю), соединив его с плюсом батареи, минус которой соединен с землей, то τ_k и φ_k будут положительными и

$$C_{kk} = \frac{\tau_k}{\varphi_k} > 0;$$

C_{kk} оказывается положительной, несмотря на то что в состав ее [см. формулу (15.50)] может входить большое число отрицательных коэффициентов β_{km} (коэффициент β_{kk} больше, чем $\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km}$). Согласно

(15.53), полный заряд k -тела равен сумме зарядов. Заряд $\varphi_k C_{kk}$ обусловлен разностью потенциалов между k -телом и землей; $U_{km} C_{km}$ есть заряд, обусловленный разностью потенциалов между k - и m -телами. Поэтому частичной емкости C_{km} между k - и m -телами можно

дать следующее толкование: C_{km} есть отношение составляющей заряда k -тела, обусловленной разностью потенциалов U_{km} между k -и m -телами, к величине этой разности потенциалов.

Для более наглядной иллюстрации системы (15.53) можно представить, что в системе трех проводов (рис. 15.20, а) первый провод как бы соединен с обкладками трех конденсаторов C_{11} , C_{12} и C_{13} . Заряды на обкладках этих конденсаторов, обращенных к проводу 1, соответственно равны $\varphi_1 C_{11}$; $U_{12} C_{12}$; $U_{13} C_{13}$. Заряды на других обкладках записаны на рис. 15.20, а.

Три группы формул Максвелла справедливы для системы заряженных тел любой формы. Однако если тела имеют произвольную форму, то потенциальные коэффициенты уже нельзя определять по формулам (15.48"), справедливым только для системы линейных параллельных достаточно длинных проводов.

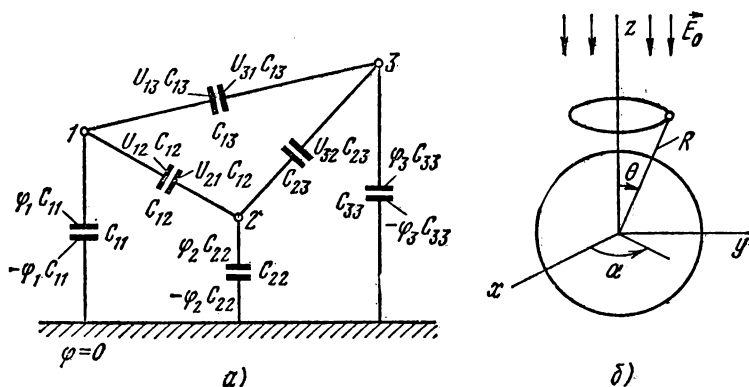


Рис. 15.20

Определение емкостных коэффициентов и частичных емкостей в этом случае производят опытным путем.

Частичные емкости используют при расчетах не только электростатических полей, они находят применение при расчетах быстро протекающих процессов в электрических цепях, а также процессов в электрических цепях, в основу которых положено использование частичных емкостей, например при емкостном отборе мощности от высоковольтной линии электропередачи. Частичные емкости между электродами электронных ламп, между электродами транзисторов учитывают при расчетах быстро протекающих процессов (см., например, § Ж. 4).

§15.37. ШАР В РАВНОМЕРНОМ ПОЛЕ

Если в равномерное поле (направлено сверху вниз; вдоль оси z), напряженность которого равна E_0 (рис. 15.20, б), внести металлический или диэлектрический шар (ϵ шара отлично от ϵ окружающей среды), то электрическое поле, особенно вблизи от шара, исказится,

перестанет быть равномерным. Характер искажения поля зависит от размеров шара, от его ϵ и от величины заряда на шаре.

Если шар металлический (проводящий), то силовые линии должны подходить к его поверхности под прямым углом. Если металлический шар не заряжен, то на нем вследствие явления электростатической индукции произойдет разделение зарядов. Силовые линии будут заканчиваться или начинаться на них.

Металлический шар может быть и заряжен, т. е. нести на себе избыточный заряд, который также расположится на поверхности.

Если шар из диэлектрика, то под влиянием внешнего по отношению к нему поля шар поляризуется. Заряды, выявившиеся на шаре вследствие поляризации, исказят прежде (до внесения шара) равномерное поле. Силовые линии будут подходить к поверхности шара так, что будут выполняться два граничных условия (см. § 15.23).

Если шар металлический, то внутри шара $E = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Независимо от того, металлический шар или диэлектрический, во внешней по отношению к шару области нет свободных зарядов и потому поле в наружной по отношению к шару области описывается уравнением Лапласа. Если шар из диэлектрика и свободный заряд на нем равен нулю, то поле внутри шара описывается также уравнением Лапласа.

Таким образом, для решения той и другой задачи необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Это одна из наиболее типичных классических задач электростатики. Для любой конкретной задачи необходим правильный выбор системы координат. Система координат должна быть выбрана таким образом, чтобы граничные поверхности в поле описывались наиболее удобно. В нашей задаче граничная поверхность — сфера. Сфера наиболее удобно описывается в сферической системе координат. Поэтому будем пользоваться сферической системой координат.

Вторым этапом решения является выяснение вопроса о том, не обладает ли изучаемое поле тем или иным видом симметрии. Условия симметрии поля часто в значительной мере облегчают решение задачи. В рассматриваемой задаче поле не зависит от координаты α . Чтобы убедиться в этом, мысленно рассежем поле плоскостью, перпендикулярной оси z декартовой системы, и проведем в этой плоскости окружность так, чтобы центр ее лежал на оси z . Все точки этой окружности имеют одно и то же значение радиуса R , соединяющего точку на этой окружности с началом координат. Кроме того, угол θ в меридианной плоскости между радиусом R и осью z один и тот же.

Все точки окружности находятся в поле в одинаковых условиях. Поэтому потенциал их один и тот же. Но значение угла α , характеризующего положения точек этой окружности, различно. Если для совокупности точек, обладающих $R = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ и разными значениями угла α , φ одно и то же, то это означает, что в данном поле φ не зависит от угла α . Поэтому поле будет описываться уравнением [см. уравнение (15.31)]

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (15.54)$$

(составляющая $\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$ выпала, так как φ не зависит от α). Выражение (15.54) представляет собой уравнение в частных производных. Для интегрирования уравнений в частных производных применяют метод Фурье — Бернулли. Согласно этому методу, искомую функцию (в нашем случае φ) полагают в виде произведения двух пока неизвестных функций M и N , одна из которых (M) зависит только от R , а другая (N) — только от θ :

$$\varphi = M(R) N(\theta) = MN. \quad (15.55)$$

Вид функций M и N подлежит определению. Определение функции φ в виде произведения двух функций (15.55) позволяет разбить уравнение в частных производных (15.54) на два обыкновенных дифференциальных уравнения, из которых одно будет составлено относительно M , другое — относительно N .

Подставим (15.55) в (15.54), учтя, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = N \frac{\partial M}{\partial R}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = M \frac{\partial N}{\partial \theta}.$$

Поэтому

$$\frac{N}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) + \frac{M}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (15.56)$$

Умножим (15.56) на $\frac{R^2}{MN}$:

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) + \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (15.57)$$

Особенностью уравнения (15.57) является то, что первое слагаемое в нем представляет собой функцию только R , а второе слагаемое — функцию только θ . Сумма двух функций, из которых одна зависит только от R , а другая — только от θ , равна нулю для бесчисленного множества пар значений R и θ [уравнение (15.57) годится для всех точек поля]. Это возможно тогда, когда каждая из данных функций равна нулю:

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (15.57')$$

либо когда

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) = \rho \quad \text{и} \quad \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = -\rho. \quad (15.57'')$$

Здесь ρ есть некоторое число, пока не известное.

Таким образом, задача свелась к интегрированию уравнений (15.57') и (15.57''). Общее решение для φ согласно (15.55) равно произведению решений уравнений (15.57') плюс произведение решений для M и N по уравнениям (15.57''). Найдем решение уравнений (15.57'). Так как в (15.57') M зависит только от R , а N — только от θ , то от частных производных можно перейти к простым (обыкновенным):

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = 0; \quad \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = 0.$$

Интеграл первого из них

$$M = \frac{A_1}{R} + A_2. \quad (15.58)$$

Найдем интеграл второго уравнения:

$$\sin \theta \frac{dN}{d\theta} = A_3; \quad \frac{dN}{d\theta} = \frac{A_3}{\sin \theta} \quad \text{или} \quad N = A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + A_4. \quad (15.59)$$

Покажем, что A_3 непременно должно равняться нулю, так как только в этом случае в решении отсутствует слагаемое $A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.

Потенциал есть функция непрерывная и на конечном отрезке он не может измениться на бесконечно большую величину. Из физических соображений ясно, что потенциал точек оси z вблизи шара не может быть равен бесконечности. Между тем, если бы $A_3 \neq 0$, то в решении для потенциала присутствовало бы слагаемое $A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, равное $-\infty$ для всех точек, у которых $\theta = 0$ ($\operatorname{tg} \theta = 0$; $\ln \operatorname{tg} \theta = -\infty$).

Таким образом, частное решение для φ , вытекающее из (15.57'), таково:

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 (C_1 = A_1 A_4; C_2 = A_2 A_4). \quad (15.60)$$

Найдем решение уравнений (15.57''):

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = p$$

или

$$2R \frac{dM}{dR} + R^2 \frac{d^2 M}{dR^2} = pM.$$

Применим подстановку Эйлера $M = CR^n$:

$$\frac{dM}{dR} = nCR^{n-1}; \quad \frac{d^2 M}{dR^2} = n(n-1)CR^{n-2}.$$

Подставим производные в уравнение:

$$2RnCR^{n-1} + R^2(n-1)nCR^{n-2} = pCR^n$$

или

$$n^2 + n - p = 0.$$

Решение квадратного уравнения:

$$n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}. \quad (15.61)$$

Значение p определим при интегрировании второго уравнения (15.57''):

$$\frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = -p.$$

Решение его можно записать в виде $N = B \cos \theta$. Убедимся в этом путем подстановки и одновременно найдем значение p :

$$\frac{dN}{d\theta} = -B \sin \theta; \sin \theta \frac{dN}{d\theta} = -B \sin^2 \theta,$$

$$\frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = \frac{-2B \sin \theta \cos \theta}{B \cos \theta \sin \theta} = -2 = -p.$$

Следовательно, $p = 2$.

После нахождения числа p подставим его в (15.61) и найдем: $n_1 = 1$ и $n_2 = -2$.

Таким образом, совместное решение уравнений (15.57") дает следующее выражение для φ :

$$\varphi = \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta.$$

Полное решение:

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 + \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta. \quad (15.62)$$

В (15.62) присутствуют четыре неизвестных постоянных: C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Значения постоянных зависят от того, какой шар (проводящий или диэлектрический) внесен в поле *.

§ 15.38. ПРОВОДЯЩИЙ ШАР В РАВНОМЕРНОМ ПОЛЕ

Для определения четырех постоянных необходимо учесть не только условие на поверхности шара, но и условия на весьма большом удалении от шара, теоретически на бесконечно большом удалении от шара, или, как принято говорить, условия на бесконечности.

Совокупность весьма удаленных от шара точек в условном смысле рассматривается при этом как бесконечность. Если шар не заряжен, то все точки плоскости XOY , проходящей через центр шара, имеют один и тот же потенциал. Обозначим его φ_0 .

При удалении от шара на большое расстояние $Z = R \cos \theta$, по сравнению с которым радиус шара a весьма мал, возмущающее действие шара на поле либо вовсе не проявится (если суммарный заряд шара будет равен нулю), либо проявится как возмущение от точечного заряда (если шар будет иметь на себе суммарный свободный заряд Q). Потенциал φ на бесконечности определим так:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 R \cos \theta. \quad (15.63)$$

Первое слагаемое правой части (15.63) дает составляющую потенциала от заряда шара Q , слагаемое $E_0 R \cos \theta$ учитывает прирост потенциала от напряженности равномерного поля E_0 на пути $Z = R \cos \theta$. Так как решение (15.62) годится и для точек поля, весьма

* Задачи теории поля, в которых приходится решать уравнение в частных производных и из большого числа выбирать решения, удовлетворяющие граничным условиям, в математических работах принято называть *краевыми задачами*.

далеко (бесконечно далеко) удаленных от шара, то можно сопоставить выражения (15.62) и (15.63). Они должны давать один и тот же результат. Это будет только в том случае, когда соответствующие слагаемые в обоих выражениях равны. Из сопоставления следует, что $C_2 = \varphi_0$; $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a}$; $C_3 = E_0$.

Сопоставление на бесконечности не дает возможности найти величину C_4 , так как в (15.63) нет слагаемого, изменяющегося обратно пропорционально второй степени R . Для нахождения C_4 воспользуемся тем, что в условиях электростатики все точки поверхности шара имеют один и тот же потенциал. Это условие равносильно тому, что тангенциальная составляющая напряженности поля на поверхности шара равна нулю. При $R = a$

$$\varphi = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a a} + \left(E_0 a + \frac{C_4}{a^2}\right) \cos \theta + \varphi_0.$$

Правая часть будет постоянной с изменением θ только при условии, что $\left(E_0 a + \frac{C_4}{a^2}\right) = 0$. Отсюда

$$C_4 = -E_0 a^3.$$

Таким образом, для всех точек диэлектрика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 \left(R - \frac{a^3}{R^2}\right) \cos \theta. \quad (15.64)$$

Так как потенциал зависит только от R и θ , напряженность электрического поля имеет только две составляющих (см. стр. 528):

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} - E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{R^3}\right) \cos \theta; \\ E_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = E_0 \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.64')$$

Если $Q = 0$, то на поверхности шара (при $R = a$)

$$E_R = -3E_0 \cos \theta.$$

При $\theta = 0$ напряженность $E_R = -3E_0$; при $\theta = 180^\circ$ $E_R = 3E_0$, т. е. в этих точках напряженность поля стала в три раза больше напряженности равномерного поля E_0 , в которое был внесен шар. На «экваторе» при $\theta = 90^\circ$ напряженность, напротив, стала равной нулю.

Таким образом, капелька воды, попав в бак трансформатора с масляным заполнением, вызовет значительное местное увеличение напряженности поля.

§ 15.39. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ШАР В РАВНОМЕРНОМ ПОЛЕ

Если в равномерное поле помещен незаряженный диэлектрический шар, то как внутри шара, так и вне его нет свободных зарядов и потому поле описывается уравнением Лапласа. Полное решение (15.62)

пригодно и для данной задачи. Величины, служащие для описания поля внутри шара, обозначим с индексом i , а величины, с помощью которых записывается потенциал во внешней по отношению к шару области, — с индексом e . Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = \frac{C_{1i}}{R} + C_{2i} + \left(C_{3i}R + \frac{C_{4i}}{R^2} \right) \cos \theta; \quad (15.65)$$

для внешней области

$$\varphi_e = \frac{C_{1e}}{R} + C_{2e} + \left(C_{3e}R + \frac{C_{4e}}{R^2} \right) \cos \theta. \quad (15.66)$$

Надо найти 8 постоянных интегрирования. Потенциал на бесконечности в этом случае

$$\varphi = \varphi_0 + E_0 R \cos \theta.$$

Сопоставим последнее выражение с (15.66):

$$C_{2e} = \varphi_0 \text{ и } C_{3e} = E_0.$$

В § 15.14 было рассмотрено поле точечного заряда. Там было показано, что потенциал в поле точечного заряда изменяется обратно пропорционально R . Поэтому $\frac{C_{1e}}{R}$ есть составляющая потенциала от суммарного заряда шара, рассматриваемого как точечный заряд. Так как суммарный заряд шара равен нулю, то в выражении для φ_e эта составляющая должна выпасть, т. е.

$$C_{1e} = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_e = \varphi_0 + \left(E_0 R + \frac{C_{4e}}{R^2} \right) \cos \theta. \quad (15.66')$$

В выражении (15.66') осталась неизвестной лишь постоянная C_{4e} .

Рассмотрим выражение потенциала φ_i для внутренней области. Оно должно давать конечное значение для всех точек внутри шара. Это возможно только тогда, когда $C_{1i} = 0$ и $C_{4i} = 0$ (если бы $C_{1i} \neq 0$, то слагаемое $\frac{C_{1i}}{R}$ в центре шара при $R = 0$ давало бы бесконечно большое значение). Постоянная C_{2i} , с точностью до которой определяется потенциал в рассматриваемом поле, равна аналогичной постоянной $C_{2e} = \varphi_0$ для внешней области.

Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = \varphi_0 + C_{3i}R \cos \theta. \quad (15.65')$$

Оставшиеся неизвестными постоянные C_{4e} и C_{3i} найдем из граничных условий.

Из равенства потенциалов φ_i и φ_e при $R = a$ (это условие, как нетрудно убедиться, эквивалентно условию $E_{1t} = E_{2t}$) следует, что

$$C_{3i}a = E_0a + \frac{C_{4e}}{a^2}.$$

Из равенства нормальных составляющих вектора \vec{D} на границе следует, что

$$-\varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial R} \right)_{R=a} = -\varepsilon_e \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} \right)_{R=a},$$

т. е.

$$\varepsilon_i C_{3i} = \varepsilon_e \left(E_0 - \frac{2C_{4e}}{a^3} \right).$$

Совместное решение двух последних уравнений дает

$$C_{3i} = E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}, \quad C_{4e} = a^3 E_0 \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}.$$

Потенциал внутренней области

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_0 + E_0 R \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} \cos \theta = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} z; \\ z &= R \cos \theta. \end{aligned} \quad (15.67)$$

Потенциал внешней области

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(R + \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} \right) \cos \theta. \quad (15.68)$$

Напряженность поля внутри шара

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = -E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}. \quad (15.69)$$

Напряженность \vec{E} направлена вдоль оси z и не зависит от координат точки. Это означает, что поле внутри шара однородное.

На рис. 15.21 изображены линии вектора \vec{D} и эквипотенциальные линии (картина поля) для трех случаев:

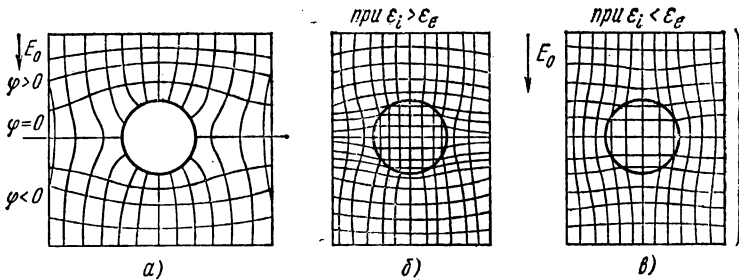


Рис. 15.21

а) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен незаряженный проводящий шар (рис. 15.21, а);

б) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен диэлектрический шар, ε_i которого больше ε_e окружающей среды (рис. 15.21, б);

в) когда ε_i диэлектрического шара меньше ε_e окружающей среды (рис. 15.21, в).

Как известно из предыдущего (см. § 15.15), линии вектора \vec{D} начинаются на свободных зарядах. Эти линии прерываются на поверхности металлического шара (см. рис. 15.21, а) и проходят, не прерываясь, через диэлектрический шар (см. рис. 15.21, б и в).

Если на рис. 15.21, б и в вместо линий вектора \vec{D} изобразить линии вектора напряженности поля \vec{E} , то линии \vec{E} частично претерпевают разрыв на поверхности шаров [так как истоком для \vec{E} являются не только свободные, но и связанные заряды, см. формулу (15.21')].

§ 15.40. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР В РАВНОМЕРНОМ ПОЛЕ

Аналогично формулам § 15.39 выводятся формулы, позволяющие определить потенциал и напряженность равномерного поля, возмущенного внесением в него диэлектрического цилиндра (ось цилиндра перпендикулярна \vec{E}_0).

Пусть напряженность \vec{E}_0 равномерного (до внесения цилиндра) поля направлена параллельно оси x декартовой системы (рис. 15.22, а). Поместим в это поле *диэлектрический цилиндр* так, что ось цилиндра совпадет с осью z .

Решая уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат, получим следующие формулы для определения потенциала внутри цилиндра (φ_i) и вне цилиндра (φ_e):

$$\varphi_i = -\frac{2e_e}{e_i + e_e} E_0 r \cos \alpha = -\frac{2e_e}{e_i + e_e} E_0 x, \quad (15.70)$$

$$\varphi_e = E_0 \left(\frac{e_i - e_e}{e_i + e_e} \cdot \frac{a^2}{r} - r \right) \cos \alpha. \quad (15.71)$$

Напряженность равномерного поля внутри цилиндра направлена по оси x и равна

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{2e_e}{e_i + e_e} E_0. \quad (15.72)$$

В заключение отметим, что если в равномерное поле напряженностью E_0 внести *проводящий цилиндр* радиусом a , расположив так, что

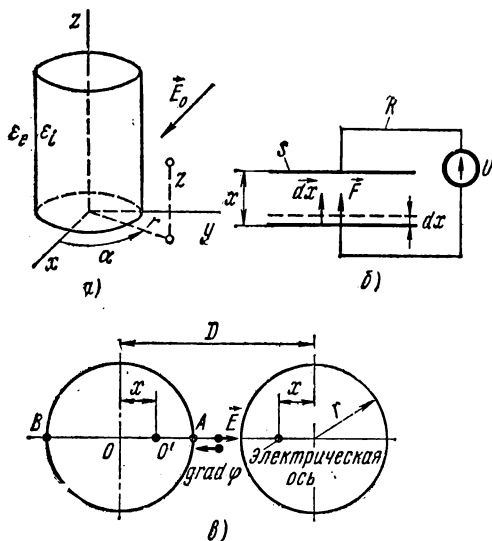


Рис. 15.22

продольная ось его будет перпендикулярна E_0 , то потенциал в области вне цилиндра

$$\varphi_e = E_0 \left(\frac{a^2}{r} - r \right) \cos \alpha.$$

§ 15.41. ПОНЯТИЕ О ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ, ПЛОСКОМЕРИДИАННОМ И РАВНОМЕРНОМ ПОЛЯХ

В литературе можно встретить термины «плоскопараллельное поле», «плоскомеридианное поле» и «равномерное поле» *.

Под *плоскопараллельным полем* понимают поле, картина которого (т. е. совокупность силовых и эквипотенциальных линий) повторяется во всех плоскостях, перпендикулярных какой-либо одной оси декартовой системы координат, т. е. в плоскопараллельном поле картина поля не зависит от какой-то одной координаты декартовой системы.

В качестве примера плоскопараллельного поля можно назвать поле двухпроводной линии (двух параллельных проводов). Если ось z декартовой системы направить вдоль оси одного из проводов, то потенциал φ не будет зависеть от координаты z .

Под *плоскомеридианным полем* понимают поле, картина которого повторяется во всех меридианных плоскостях, т. е. картина поля не зависит от координаты α цилиндрической или сферической системы координат. В литературе встречается еще определение плоскомеридианного поля как поля, образованного телами вращения с общей осью.

В качестве примера плоскомеридианного поля можно назвать поле, образованное внесением металлического шара в равномерное до внесения шара поле (см. рис. 15.21), или поле диполя, о котором идет речь в примере 192. В обоих случаях потенциал зависит только от радиуса R и угла θ сферической системы координат, но не зависит от угла α .

Частным случаем плоскомеридианного поля является поле, в котором потенциал зависит только от какой-либо одной координаты сферической или цилиндрической системы координат.

В *равномерном поле* напряженность одинакова во всех точках поля, т. е. величина ее не зависит от координат точки.

Равномерное поле образуется, например, между обкладками плоского конденсатора, если в пространстве между обкладками отсутствуют свободные заряды и если пренебречь искажающим влиянием краев конденсатора.

* Физики и математики в термин «поле» вкладывают свое («профессиональное») содержание. Когда говорят о поле в физическом смысле (электромагнитном, гравитационном, тепловом, поле ядерных сил), то под ним понимают вид материи. Когда о поле говорится в математическом смысле, то имеется в виду поле величины, которой оно описывается. С чисто математической точки зрения поля могут быть векторные и скалярные, вихревые и безвихревые, плоскопараллельные, плоскомеридианные и др.

Следует иметь в виду, что весьма большое количество встречающихся на практике полей не обладает ни одним из перечисленных видов симметрии и потому не может быть отнесено ни к плоскопараллельному, ни к плоскомеридианному, ни к равномерному полям.

§ 15.42. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ВЫРАЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИЛЫ В ВИДЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ КООРДИНАТЕ

Положим, что в некоторый момент времени напряжение на конденсаторе равно u . При увеличении напряжения на конденсаторе на величину du заряд на одной из пластин конденсатора увеличится на величину dQ , а на другой пластине — на величину $-dQ$;

$$dQ = C du,$$

где C — емкость конденсатора.

Для переноса заряда dQ источник энергии должен совершить работу, равную $udQ = C u du$, которая затрачивается на создание электрического поля в конденсаторе. Энергия, доставленная источником при заряде конденсатора от напряжения $u = 0$ до напряжений $u = U$ и перешедшая в энергию электрического поля конденсатора,

$$W_э = C \int_0^U u du = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Рассмотрим вопрос об объемной плотности энергии электрического поля. С этой целью возьмем плоский конденсатор и положим, что расстояние между пластинами его равно x , а площадь каждой пластины с одной стороны равна S . Диэлектрическая проницаемость среды между пластинами ϵ_a . Напряжение между пластинами U . Пренебрежем искажающим влиянием краев конденсатора на поле между пластинами. При этом условии поле можно считать равномерным.

Напряженность электрического поля по модулю

$$E = \frac{U}{x}.$$

Вектор электрической индукции по модулю $D = \epsilon_a E = \frac{Q}{S}$. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_a S}{x}$. Для нахождения объемной плотности энергии электрического поля разделим энергию $W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_a S U^2}{2x}$ на объем $V = Sx$, «занятый полем». Получим

$$\frac{W_э}{V} = \frac{\epsilon_a S U^2}{2Sx^2} = \frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Таким образом, объемная плотность энергии электрического поля равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$. Если поле неравномерно, то напряженность будет изменяться при переходе от одной точки поля к соседней, но объемная плотность энергии поля будет по-прежнему равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$, так как в пределах бесконечно малого объема поле можно считать равномерным.

Выделим в поле элементарный объем dV . Энергия в объеме dV равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2} dV$.

Энергия, заключенная в объеме V любых размеров, равна $\int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV$.

В § 4.12, ч. I учебника рассматривался вопрос о выражении механической силы, действующей на контур с током в магнитном поле, в виде производной от энергии магнитного поля по изменяющейся координате.

В электрическом поле между заряженными телами также действуют механические силы и их можно выразить в виде производной от энергии поля по изменяющейся координате. На рис. 15.22, б изображен плоский конденсатор, который присоединен к источнику напряжения U . В соответствии с предыдущим расстояние между пластинами назовем x , а площадь пластины S . На каждую пластину конденсатора действует сила F . Под действием этих сил пластины конденсатора стремятся сблизиться. Сила, действующая на нижнюю пластину, направлена вверх, на верхнюю пластину — вниз.

Положим, что под действием силы F нижняя пластина весьма медленно, теоретически бесконечно медленно, переместилась вверх на расстояние dx и приняла положение, показанное пунктиром на рис. 15.22, б.

Составим уравнение для баланса энергии при таком перемещении пластины. На основании закона сохранения энергии доставленная источником питания энергия $dW_{\text{и}}$ должна равняться сумме трех слагаемых:

- 1) работе силы F на расстоянии dx : $\vec{F}d\vec{x} = Fdx$;
- 2) изменению энергии электрического поля конденсатора $dW_{\text{э}}$;
- 3) тепловым потерям от тока i , который протекает по проводам с сопротивлением R в течение времени от 0 до ∞ :

$$dW_{\text{и}} = F dx + dW_{\text{э}} + \int_0^{\infty} Ri^2 dt.$$

Так как по условию проведения эксперимента пластина конденсатора перемещается вверх теоретически бесконечно медленно, то изменение зарядов на пластинах также происходит весьма медленно, а следовательно, и проходящий через конденсатор ток смещения бесконечно мал. Другими словами, тепловыми потерями $\int_0^{\infty} Ri^2 dt$ в силу их малости в уравнении энергетического баланса можно пренебречь и тогда

$$dW_{\text{и}} = F dx + dW_{\text{э}}.$$

Отсюда сила

$$F = \frac{d(W_{\text{и}} - W_{\text{э}})}{dx}.$$

Таким образом, силу F можно выразить в виде производной от разности энергий $(W_{\text{и}} - W_{\text{э}})$ по изменяющейся координате x .

В общем случае при перемещении пластины могут изменяться и напряжение между пластинами U и заряд Q .

Рассмотрим теперь два характерных частных случая перемещения пластины конденсатора.

В первом из них конденсатор отсоединен от источника напряжения и перемещение пластины происходит при неизменных зарядах на пластинах.

Во втором случае перемещение пластины происходит при неизменном напряжении между пластинами (конденсатор присоединен к источнику неизменного напряжения U).

П е р в ы й с л у ч а й. Так как конденсатор отсоединен от источника энергии, то последний энергии не доставляет и потому $dW_{\text{и}} = 0$. При этом

$$F = -\frac{dW_{\text{э}}}{dx}.$$

Таким образом, сила, действующая на пластину, равна взятой с обратным знаком производной от энергии электрического поля конденсатора по изменяющейся

координате. Знак минус свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае работа силы производится за счет убыли энергии в электрическом поле конденсатора.

Если учесть, что энергия электрического поля конденсатора

$$W_э = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_a S},$$

то сила F по модулю

$$|F| = \frac{dW_э}{dx} = \frac{Q^2}{2\epsilon_a S} = \frac{\epsilon_a E^2 S}{2}.$$

Второй случай. Энергия, доставляемая источником питания при $U = \text{const}$,

$$dW_н = U dQ = U^2 dC,$$

где dC — приращение емкости, вызванное уменьшением расстояния между пластинами на величину dx .

Изменение энергии электрического поля конденсатора

$$dW_э = d\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{U^2}{2} dC.$$

Разность

$$dW_н - dW_э = U^2 dC - \frac{U^2}{2} dC = \frac{U^2}{2} dC = dW_э.$$

Поэтому во втором случае

$$F = \frac{dW_э}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}.$$

Таким образом, и во втором случае сила равна производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате.

Емкость

$$C = \frac{\epsilon_a S}{x},$$

поэтому

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_a S}{x^2},$$

$$|F| = \frac{1}{2} \epsilon_a S \left(\frac{U}{x}\right)^2 = \frac{\epsilon_a E^2 S}{2}.$$

Сила, действующая на пластину конденсатора во втором случае, равна силе, действующей на пластину конденсатора в первом случае. На единицу поверхности конденсатора действует сила $\frac{F}{S}$, которая равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$.

Обратим внимание на то, что величина $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$ выражает собой не только плотность энергии электрического поля, но и численно равна силе, действующей на единицу поверхности пластины конденсатора.

Действующие на пластины конденсатора силы можно рассматривать как результат проявления сил продольного сжатия (вдоль силовых трубок) и сил бокового распора (поперек силовых трубок). Силы продольного сжатия стремятся укоротить силовую трубку, а силы бокового распора — расширить ее. На единицу боковой поверхности силовой трубки действует сила, численно равная $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$. Эти силы проявляются не только в виде сил, действующих на пластины конденсатора, но также в виде сил на границе раздела двух диэлектриков. В этом случае на границе раздела действует сила, направленная в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Энергия поля, образованного системой n заряженных тел, имеющих потенциалы $\Phi_1 \dots \Phi_n$,

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \Phi_k. \quad (\text{a})$$

Формула (a) по структуре аналогична формуле (4.33) для энергии магнитного поля. Вывод формулы основан на том, что энергия поля равна работе внешних сил, затраченной на перенос зарядов из бесконечности (где $\Phi = 0$) в точки поля, в которых они будут находиться, и на принципе наложения. Используя формулу (15.48), сначала нахо-

дим работу при переносе заряда q_1 , полагая, что заряды всех остальных тел равны нулю. Затем находим работу при переносе заряда q_2 , полагая $q_1 = \text{const}$ и $q_3 = q_4 = \dots = q_n = 0$ и т. д. Суммируя все работы, получаем формулу (a).

Пример 176. Два провода диаметром 10 мм расположены в воздухе параллельно друг другу (рис. 15.22, в).

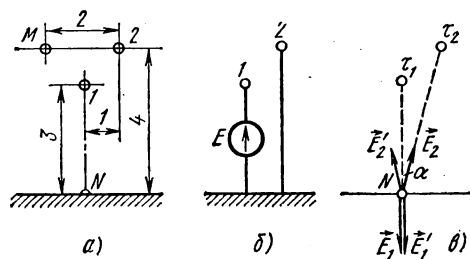


Рис. 15.23

Расстояние между осями проводов 20 мм. Заряд каждого провода на метр длины 10^{-8} к. Левый провод несет положительный заряд, правый — отрицательный. Найти наибольшую и наименьшую плотности заряда на поверхности провода.

Решение. Находим положение электрических осей: $x = 1,35$ мм. Плотность заряда на поверхности металла $\sigma = D = \epsilon_a E$. Следовательно, σ будет больше там, где E больше.

Если учесть, что напряженность поля, создаваемая положительным зарядом, направлена от этого заряда, а напряженность поля, создаваемая отрицательным зарядом, направлена к заряду, то станет ясно, что наибольшая напряженность поля будет в точке A , наименьшая — в точке B . Напряженность поля в точке A равна сумме напряженностей от обоих зарядов, а в точке B — разности напряженностей:

$$E_A = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(r-x)} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(D-r-x)};$$

$$E_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{r+x} - \frac{1}{D+r-x} \right)^*.$$

Отсюда

$$D_A = \sigma_A = \epsilon_a E_A = 0,544 \text{ мкк/м}^2, \quad D_B = \sigma_B = \epsilon_a E_B = 0,186 \text{ мкк/м}^2.$$

Таким образом, плотность заряда в точке A в 2,92 раза больше, чем плотность заряда в точке B .

* Для воздуха $\epsilon_a = \epsilon_0$ ($\epsilon = 1$).

Пример 177. По условию предыдущей задачи найти градиент потенциала в точке M (расположенной посередине между проводами на линии, соединяющей их центры).

Решение. Так как $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, то модуль $\text{grad } \varphi$ равен модулю \vec{E} , а направление $\text{grad } \varphi$ противоположно направлению \vec{E} . В точке M

$$E_M = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{\frac{D}{2} - x} + \frac{1}{\frac{D}{2} + x} \right) = \frac{10^{-8} \cdot 2}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,00865} = 41600 \text{ в/м.}$$

Направления \vec{E} и $\text{grad } \varphi$ даны на рис. 15.22, в.

Пример 178. Определить частичные емкости на один метр длины двухпроводной линии. Геометрические размеры (в метрах) см. на рис. 15.23, а. Радиусы проводов 6 мм.

Решение. В соответствии с формулой (15.48)

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2; \quad \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 \alpha_{12} \\ \varphi_2 \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \varphi_1 \beta_{11} + \varphi_2 \beta_{12}.$$

Здесь

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}; \quad \beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = U_1(\beta_{11} + \beta_{12}) - \beta_{12}U_{12} = U_1C_{11} + U_{12}C_{12} \quad (\varphi_1 = U_1).$$

Следовательно, для двухпроводной линии

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Delta}; \quad C_{12} = -\beta_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta}.$$

Аналогичным путем найдем

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\Delta}.$$

По формуле (15.48') найдем:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r} = 12,4 \cdot 10^{10} \text{ м/ф};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_2}{r} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ м/ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ м/ф};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \end{vmatrix} = 151,6 \cdot 10^{20} \text{ м}^2/\text{ф}^2;$$

$$C_{11} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Delta} = 0,659 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м};$$

$$C_{22} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\Delta} = 0,626 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м};$$

$$C_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta} = 0,191 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м}.$$

Пример 179. Провод 1 примера 178 соединен с землей через источник э. д. с. $E = 127$ в. Провод 2 соединен с землей проводником, так что его потенциал равен нулю (рис. 15.23, б). Определить заряды на проводах 1 и 2 на один погонный метр.

Решение. Из формулы (15.49) при $\varphi_2 = 0$ следует, что

$$\tau_1 = \varphi_1 \beta_{11} \text{ и } \tau_2 = \varphi_1 \beta_{12};$$

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta} = \frac{12,9 \cdot 10^{10}}{151,6 \cdot 10^{20}} = 0,852 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м};$$

$$\beta_{12} = -C_{12} = -0,191 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м}.$$

Заряд первого провода

$$\tau_1 = 127 \cdot 0,852 \cdot 10^{-11} = 1,08 \cdot 10^{-9} \text{ к/м}.$$

Заряд второго провода

$$\tau_2 = -0,191 \cdot 10^{-11} \cdot 127 = -0,242 \cdot 10^{-9} \text{ к/м}.$$

Пример 180. Заряд τ_1 на единицу длины провода 1 рис. 15.23, а равен $2 \cdot 10^{-9}$ к/м. Заряд τ_2 на единицу длины провода 2 равен -10^{-9} к/м. Определить потенциал точки М, полагая потенциал земли равным нулю.

Решение.

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{7^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} - \frac{10^{-9}}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{8^2 + 2^2}}{2} = 30,6 \text{ в.} \end{aligned}$$

Пример 181. Определить плотность наведенного заряда на поверхности земли в точке N (см. рис. 15.23, а), полагая, что заряды на проводах такие же, как и в примере 180.

Решение. В соответствии с формулой (15.33) плотность заряда на поверхности проводника равна напряженности в этой точке, умноженной на $\epsilon_a = \epsilon_0$.

Напряженность поля в точке N (рис. 15.23, в) равна геометрической сумме напряженностей от четырех зарядов — от заряда τ_1 (обозначим ее E_1), от заряда τ_2 (E_2) и от зеркальных изображений этих зарядов (E'_1 и E'_2):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2.$$

Напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}'_1 направлены по одной прямой (по вертикали) и складываются. Для нахождения проекций \vec{E}_2 и \vec{E}'_2 на вертикаль умножаем E_2 и E'_2 на $\cos \alpha$. Плотность заряда

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \cdot \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a h_1} \epsilon_a - 2 \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a \sqrt{h_2^2 + a^2}} \cdot \epsilon_a \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + a^2}} = \\ &= 0,1375 \cdot 10^{-9} \text{ к/м}^2; \\ a &= 1; h_2 = 4 \text{ м.} \end{aligned}$$

Пример 182. Две металлические пластинки (теоретически бесконечной протяженности) находятся в воздухе (рис. 15.24), образуя, не соприкасаясь, двугранный угол α_2 . Потенциал первой пластинки φ_1 , второй φ_2 . Вывести формулы для определения φ и E в любой точке поля внутри двугранного угла, а также формулу для определения плотности заряда на пластинках. Дать числовой ответ при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 100$ в, $\alpha_2 = 30^\circ$.

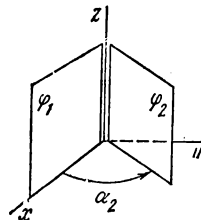


Рис. 15.24

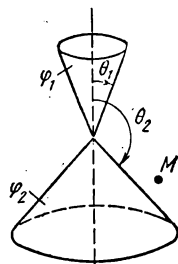


Рис. 15.25

Решение. Поскольку граничные поверхности проще всего можно описать в цилиндрической системе координат, то

решение будем проводить именно в этой системе. В пространстве между пластинами отсутствуют свободные заряды, поэтому поле подчиняется уравнению Лапласа [уравнение (15.30)].

Потенциал φ зависит только от угла α и из условий симметрии не зависит от координаты z и радиуса r цилиндрической системы координат. Поэтому $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0$.

Согласно этому уравнению, $\varphi = C_1 \alpha + C_2$.

По условию, при $\alpha = 0$ $\varphi = \varphi_1 = 0$, а при $\alpha = \alpha_2$ $\varphi = \varphi_2 = 100$ в. Следовательно,

$$C_2 = 0; C_1 = \frac{100}{\pi/6} = \frac{600}{\pi} \text{ и } \varphi = \frac{600}{\pi} \alpha.$$

Напряженность поля имеет только одну альфовую составляющую

$$E_\alpha = -\frac{d\varphi}{r d\alpha} = -\frac{C_1}{r} = -\frac{600}{\pi r} \text{ в/м.}$$

Плотность заряда

$$\sigma = D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_\alpha = -\frac{600\epsilon_0}{\pi r}.$$

Например, при $r = 2$ см

$$\sigma = D = -8,48 \cdot 10^{-8} \text{ к/м}^2.$$

Пример 183. Две металлические конусообразные воронки находятся в воздухе, обращены остриями друг к другу и не соприкасаются (рис. 15.25). Угол $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 135^\circ$, потенциал первой воронки $\varphi_1 = 0$, потенциал второй воронки $\varphi_2 = 1000$ в. Вывести формулу для определения φ и E в пространстве между воронками и найти по ним E и φ в точке M с координатами $R = 2$ см и $\theta = 120^\circ$.

Решение. Воспользуемся сферической системой координат, поскольку поверхности воронок проще всего описываются именно в этой системе. В пространстве между воронками отсутствует объемный заряд, поэтому поле описывается уравнением Лапласа [формула (15.31)].

В силу симметрии φ зависит только от угла θ и не зависит от радиуса R и угла α — двух остальных координат сферической системы. Таким образом,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0,$$

откуда

$$\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C_1; \quad \varphi = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2.$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . При $\theta = 30^\circ$ $\varphi = 0$, при $\theta = 135^\circ$ $\varphi = 1000$ в. Следовательно,

$$0 = C_1 \ln \operatorname{tg} 15^\circ + C_2;$$

$$1000 = C_1 \ln \operatorname{tg} 67^\circ 30' + C_2.$$

Отсюда

$$C_1 = 461 \text{ в}, \quad C_2 = 608 \text{ в}.$$

Потенциал точки M

$$\varphi_M = 461 \ln \operatorname{tg} 60^\circ + 608 = 856,5 \text{ в}.$$

Напряженность поля имеет только θ -составляющую:

$$E_\theta = - \frac{d\varphi}{R d\theta} = - \frac{C_1}{R \sin \theta}.$$

Напряженность в точке M

$$E_{\theta M} = - \frac{461}{0,02 \sin 120^\circ} = - 26,6 \text{ кВ/м}.$$

Пример 184. В вакууме на расстоянии 2 см друг от друга расположены два плоских электрода (рис. 15.26). Правый электрод заземлен, а левый соединен с плюсом батареи, э. д. с. которой 200 в; отрицательный зажим батареи заземлен. В пространстве между электродами распределен объемный заряд с плотностью $\rho = -a\epsilon_0 x$, где $a = 30 \text{ кВ/см}^3$; x — расстояние от левой пластины (см. рис. 15.26). Требуется найти закон изменения потенциала в пространстве между электродами.

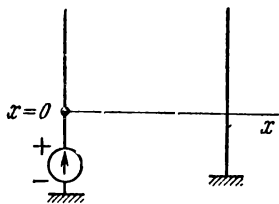


Рис. 15.26

Решение. Полагаем, что размеры электродов много больше расстояния между электродами. Направляем ось x , как показано на рис. 15.26.

Потенциал зависит только от x ; от y и от z он в данной задаче не зависит. Следовательно,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} = ax.$$

Производим двукратное интегрирование по x :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{ax^2}{2} + C_1$$

и

$$\varphi = \frac{ax^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Определяем постоянные интегрирования из граничных условий:
при $x=0$ $\varphi = 200 = C_2$;

при $x=2$ $\varphi = 0 = 200 + 2C_1 + \frac{30 \cdot 8 \cdot 10^3}{6}$;

$$C_1 = -20100 \text{ в/см.}$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{30 \cdot 10^3 x^3}{6} - 20100x + 200 = 5000x^3 - 20100x + 200 \text{ в.}$$

Пример 185. В цилиндрическом конденсаторе с воздушной изоляцией вокруг внутреннего электрода радиусом r_0 располагается заряд короны с объемной плотностью ρ к/см³. Наружный радиус короны r_1 (рис. 15.27). Радиус наружного электрода r_2 . Потенциал внутреннего электрода φ_0 , потенциал наружного электрода нуль.

Вывести формулу для определения φ в пространстве, занятом объемными зарядами (назовем его областью I), и в пространстве, не занятом свободными зарядами (область II).

Решение. В первой области

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Двукратное интегрирование по r дает

$$\varphi_1 = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r + C_2.$$

Во второй области

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_{II}}{dr} \right) = 0,$$

откуда

$$\varphi_{II} = C_3 \ln r + C_4.$$

Составим четыре уравнения для определения четырех постоянных интегрирования (C_1, C_2, C_3, C_4).

При $r = r_0$ $\varphi_1 = \varphi_0$; поэтому

$$\varphi_0 = -\frac{\rho r_0^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r_0 + C_2. \quad (a)$$

При $r = r_1$ $\varphi_1 = \varphi_{II}$; следовательно,

$$-\frac{\rho r_1^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r_1 + C_2 = C_3 \ln r_1 + C_4. \quad (б)$$

При $r = r_2$ $\varphi_{II} = 0$; тогда

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4. \quad (в)$$

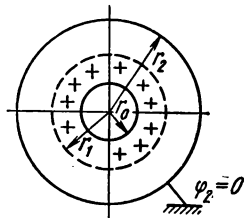


Рис. 15.27

При $r = r_1$ равны нормальные составляющие вектора электрического смещения D :

$$\epsilon_0 \left(\frac{d\varphi_I}{dr} \right)_{r=r_1} = \epsilon_0 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dr} \right)_{r=r_1}$$

или

$$C_3 = C_1 - \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon_0}. \quad (г)$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в), (г), которое опущено, дает

$$C_1 = \frac{\frac{\rho}{4\epsilon_0} (r_1^2 - r_0^2) + \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} - \varphi_0}{\ln \frac{r_2}{r_0}}.$$

Далее определяют C_3 из уравнения (г), C_4 из уравнения (в) и C_2 из уравнения (а).

Пример 186. Над поверхностью земли расположилось положительно заряженное грозное облако. Пространство между облаком и землей можно рассматривать как огромных размеров плоский конденсатор. Напряженность поля E в нем направлена от облака к земле.

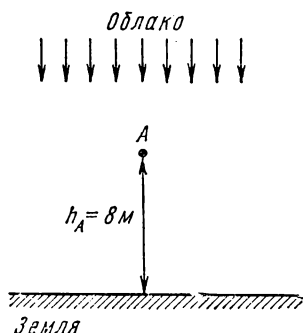


Рис. 15.28

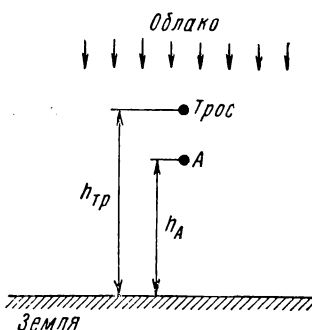


Рис. 15.29

Найти потенциал точки A , расположенной на расстоянии 8 м от поверхности земли, в двух случаях: 1) когда над поверхностью земли не протянут заземленный трос (рис. 15.28) и 2) когда над поверхностью земли над точкой A на высоте 10 м от земли протянут заземленный стальной трос диаметром 10 мм (рис. 15.29).

Решение. В случае отсутствия троса

$$\varphi_A^I = E h_A, \quad \text{где } h_A = 8 \text{ м.}$$

При наличии троса потенциал в точке A создается не только равномерным полем «плоского конденсатора», но и зарядом на тросе $q_{тр}$:

$$\varphi_A^{II} = E h_A + q_{тр} \alpha_{12}.$$

Здесь через α_{12} обозначен потенциальный коэффициент:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{10+8}{2}.$$

Составим уравнение для определения заряда троса:

$$\varphi_{\text{тр}} = Eh_{\text{тр}} + q_{\text{тр}}\alpha_{11} = 0.$$

Следовательно,

$$q_{\text{тр}} = -\frac{Eh_{\text{тр}}}{\alpha_{11}} \quad \text{и} \quad \varphi_A^{\text{II}} = E \left(h_A - h_{\text{тр}} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right).$$

Изменение потенциала в точке A , отнесенное к значению потенциала в точке A до появления троса:

$$\frac{\Delta\varphi_A}{\varphi_A^{\text{I}}} = \frac{\varphi_A^{\text{I}} - \varphi_A^{\text{II}}}{\varphi_A^{\text{I}}} = \frac{E \left\{ h_A - \left(h_A - h_{\text{тр}} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) \right\}}{Eh_A} = \frac{10 \cdot 0,251}{8} = 0,313;$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\ln \frac{18}{2}}{\ln 4000} = \frac{2,08}{8,3} = 0,251.$$

Пример 187. В равномерное поле с напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м внесен незаряженный металлический шар радиусом $a = 1$ см. Найти E_R и E_θ в точке A . Координаты точки A : $R = 2$ см и $\theta = 30^\circ$.

Решение. В соответствии с формулами § 15.38 имеем:

$$\begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{R^3} \right) = \\ &= -10^3 \cdot 0,866 \left(1 + \frac{2}{8} \right) = -1,082 \cdot 10^3 \text{ В/м}; \end{aligned}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{R \partial\theta} = E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{a^3}{R^3} \right) = 10^3 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 0,4375 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Результирующая напряженность поля по модулю

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = 1,168 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Пример 188. В воздухе создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м. В этом поле поместили диэлектрический цилиндр ($\epsilon_i = 4\epsilon_0$), так что ось цилиндра перпендикулярна полю. Найти напряженность поля E_i внутри цилиндра.

Решение. Воспользуемся формулой (15.72):

$$E_i = E_0 \frac{2\epsilon_0}{\epsilon_i + \epsilon_0} = 10^3 \frac{2 \cdot 1}{4 + 1} = 4 \cdot 10^2 \text{ кВ/м}.$$

Пример 189. В некоторой области пространства имеется поле, потенциал которого зависит только от координаты x декартовой системы:

$$\varphi = 5x^3 - 60x^2.$$

Найти закон изменения плотности свободных зарядов в этом поле.

Решение. Уравнение Пуассона, описывающее поле, можно записать так:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Дважды дифференцируем φ по x :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 120x; \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 30x - 120.$$

Следовательно,

$$\rho_{\text{своб}} = (-30x + 120) \epsilon_a.$$

Пример 190. Вывести формулу для определения напряженности и потенциала поля, создаваемого заряженной осью длиной l (рис. 15.30). Заряд на единицу длины оси равен τ .

Решение. Определим E и φ в произвольной точке K . Расположим оси декартовой системы координат в соответствии с рис. 15.30. Выделим отрезок оси длиной dx , на нем будет заряд τdx . В силу малости dx

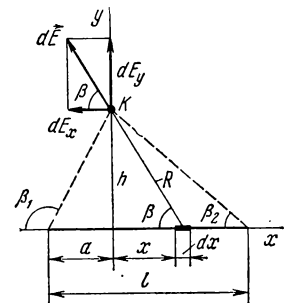


Рис. 15.30

будем считать этот заряд точечным и по теореме Гаусса найдем создаваемую им напряженность поля в точке K :

$$dE = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Проекция $d\vec{E}$ на ось x

$$-dE_x = dE \cos \beta = \frac{\tau \cos \beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Проекция $d\vec{E}$ на ось y

$$dE_y = dE \sin \beta = \frac{\tau \sin \beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Заменим:

$$R = \frac{h}{\sin \beta}; \quad x = h \operatorname{ctg} \beta; \quad dx = -\frac{h d\beta}{\sin^2 \beta};$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1);$$

$$E_y = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Составляющая потенциала в точке K от точечного заряда τdx :

$$d\varphi = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a R} = \frac{-\tau d\beta}{4\pi\epsilon_a \sin \beta};$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sin \beta} = \operatorname{Arsh} (\operatorname{ctg} \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2};$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-a}{h} + \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right).$$

§ 15.44. МЕТОД СРЕДНИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Как говорилось ранее, в электростатическом поле, образованном системой заряженных проводящих тел, все точки поверхности каждого тела имеют одинаковый потенциал, а поверхностная плотность зарядов τ в общем случае изменяется от точки к точке.

В тех случаях, когда неравномерность распределения зарядов по поверхности тела невелика, иногда пользуются для подсчета емкостей методом средних потенциалов (приближенный метод). В основу его положено заведомо неправильное предположение, что на поверхности каждого тела заряды распределены с одинаковой плотностью, а различные точки одного и того же проводящего тела имеют неодинаковые потенциалы. Это предположение дает возможность относительно легко найти среднее значение потенциала $\varphi_{\text{ср}}$ тела и по известному заряду тела найти его емкость. Результат оказывается близким к истинному.

Пример 191. Определить емкость уединенного прямого проводника длиной l и радиусом r .

Решение. Воспользуемся формулой для потенциала произвольной точки K , полученной в примере 190. Сосредоточим заряд на оси провода с плотностью τ на единицу длины и поместим точку K рис. 15.30 на поверхность провода (т. е. примем $h = r$). Тогда

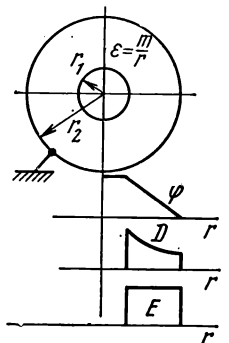


Рис. 15.31

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l \left(\text{Arsh} \frac{l-a}{r} + \text{Arsh} \frac{a}{r} \right) da = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l \text{Arsh} \frac{a}{r} da;$$

$$\int \text{Arsh} x dx = x \text{Arsh} x - \sqrt{1+x^2};$$

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left[\text{Arsh} \frac{l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} \right].$$

По определению (см. § 15.29), заряд уединенного тела $\tau l = \varphi_{\text{ср}} C$. Поэтому емкость уединенного цилиндрического провода

$$C = 2\pi\epsilon_a l \left[\text{Arsh} \frac{l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} \right]^{-1}.$$

Пример 192. Вследствие неравномерного нагрева диэлектрическая проницаемость изоляции коаксиального кабеля (рис. 15.31) изменяется в функции радиуса r следующим образом: $\epsilon_a = \frac{m}{r}$. Вывести формулы для определения напряженности электрического поля E и смещения D . Радиус жилы кабеля r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 ; напряжение между жилой и оболочкой U . Объемный заряд отсутствует.

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса [формула (15.20)] в дифференциальной форме (применять уравнение Лапласа в данном случае нельзя, поскольку оно выведено при условии, что $\epsilon_a = \text{const}$; см. § 15.15). В формуле (15.24) заменим \vec{E} на \vec{D} , учтем, что \vec{D} имеет только одну r -составляющую и в силу симметрии не зависит от координат r и α . Будем иметь

$$\text{div } \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$r D_r = r D = C; \quad D = \frac{C}{r},$$

где C — постоянная интегрирования.

Таким образом, D изменяется обратно пропорционально радиусу. Напряженность поля

$$E = \frac{D}{\epsilon_a} = \frac{Cr}{mr} = \frac{C}{m},$$

т. е. напряженность поля является величиной постоянной. Определим постоянную интегрирования C . С этой целью воспользуемся тем, что

$$\int_{r_1}^{r_2} E dr = U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C}{m} dr = \frac{C(r_2 - r_1)}{m};$$

отсюда

$$C = \frac{mU}{r_2 - r_1}.$$

Графики изменения E , D и φ см. на рис. 15.31.

Обратим внимание на то, что если бы диэлектрическая проницаемость ϵ_a изоляции коаксиального кабеля примера 191 была постоянной величиной (не являлась бы функцией r), то тогда имели бы место следующие зависимости:

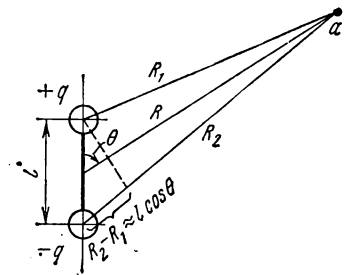


Рис. 15.32

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad D = \epsilon_a E; \quad \varphi = \frac{U \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

т. е. в этом случае напряженность поля была бы не постоянна, а изменялась обратно пропорционально радиусу r , потенциал φ изменялся бы не линейно в функции r , а по логарифмическому закону.

Пример 193. Вывести формулы для расчета поля диполя.

Решение. Диполь изображен на рис. 15.32. Расстояние между зарядами обозначим через l . При решении воспользуемся сферической системой координат. Обозначим расстояние от произвольной точки a до заряда $+q$ через R_1 , до заряда $-q$ — через R_2 и до середины диполя — через R . Угол между вертикалью и радиусом R равен θ . Потенциал точки a определим как потенциал в поле двух точечных зарядов:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Если $R \gg l$, то $R_1 R_2 \approx R^2$, а $R_2 - R_1 \approx l \cos \theta$; поэтому

$$\varphi \approx \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^3}. \quad (15.73)$$

По формулам § 15.10 найдем:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{ql \cos \theta}{2\pi\epsilon_a R^3}; \quad (15.74)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_a R^3}; \quad (15.75)$$

$$E_\alpha = 0;$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_a R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (15.76)$$

Таким образом, в поле диполя при $R \gg l$ потенциал φ изменяется обратно пропорционально *второй*, а напряженность — обратно пропорционально *третьей* степени расстояния R рассматриваемой точки до диполя; φ и E являются функциями угла θ .

Картина поля диполя изображена на рис. 15.33. Напряженность поля в некоторой произвольной точке a равна геометрической сумме напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 от зарядов $+q$ и $-q$. Если воспользоваться сферической системой координат, то напряженность поля в той же точке a можно представить в виде суммы напряженностей \vec{E}_R и \vec{E}_θ ; \vec{E}_R направлена вдоль радиуса R , а \vec{E}_θ имеет направление θ .

Пример 194. Вывести формулы для определения величины напряженности поля и емкости двуслойного плоского конденсатора рис. 15.34, а также построить графики изменения модуля вектора напряженности электрического поля, модуля вектора электрической индукции D и потенциала φ в функции расстояния x .

Толщина первого слоя диэлектрика d_1 , второго слоя d_2 . Абсолютная диэлектрическая проницаемость первого слоя ϵ_{1a} , второго слоя ϵ_{2a} . Принять $\epsilon_{1a} = 2\epsilon_a$ и $d_2 = 1,5 d_1$.

Решение. Все величины, относящиеся к первому слою, обозначим индексом 1, а ко второму

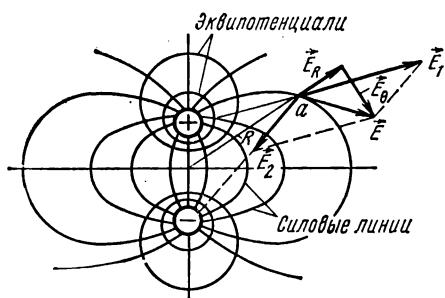


Рис. 15.33

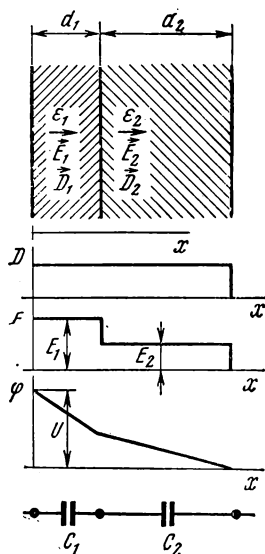


Рис. 15.34

слою — индексом 2. Положим, что разность потенциалов между обкладками конденсатора равна U .

Искажающее влияние краев конденсатора на поле учитывать не будем. При этом условии в каждом слое поле будет равномерным. В силу того что нормальная составляющая вектора D непрерывна, имеем $D_{1n} = D_{2n}$.

Но $D_{1n} = \epsilon_{1a} E_1$, $D_{2n} = \epsilon_{2a} E_2$. Следовательно,

$$\epsilon_{1a} E_1 = \epsilon_{2a} E_2. \quad (д)$$

Таким образом, отношение напряженностей обратно пропорционально отношению электрических проницаемостей.

Уравнение (д) связывает две пока не известные величины E_1 и E_2 . Второе уравнение относительно E_1 и E_2 составим исходя из того, что

$$\int_0^{d_1} \vec{E}_1 d\vec{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 d\vec{x} = U$$

или

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \quad (е)$$

Совместное решение (д) и (е) дает

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_{1a}}{\epsilon_{2a}} d_2}.$$

Графики зависимостей D , E и ϕ от расстояния x изображены на рис. 15.34.

Для нормальной работы конденсатора необходимо, чтобы напряженность электрического поля ни в первом, ни во втором слоях конденсатора не достигла значения напряженности, при котором происходит пробой данного диэлектрика.

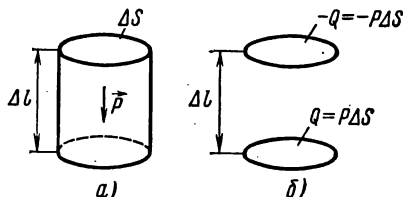


Рис. 15.35

Напряженность равномерного поля, при которой происходит пробой данного диэлектрика, принято называть *пробивной напряженностью*. Пробивная напряженность диэлектриков, особенно газообразных, сильно зависит от температуры и давления. Пробивная напряженность воздуха равна 30 кВ/см при нормальном атмосферном давлении и температуре 18° С.

При выводе формулы для емкости двуслойного плоского конденсатора на гра-

ницу раздела двух диэлектриков мысленно поместим бесконечно тонкий металлический листок. Эта операция вполне допустима, так как поверхность раздела диэлектриков как была эквипотенциальной поверхностью до помещения листка, так и останется ею после помещения на нее листка; причем значение потенциала ее при этом не изменится.

После проведения такой операции — в литературе ее называют иногда *способом отверждения* — емкость двуслойного конденсатора можно подсчитать как емкость двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2 ; C_1 — емкость первого слоя конденсатора, C_2 — емкость второго слоя конденсатора:

$$C_1 = \frac{\epsilon_{1a} S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_{2a} S}{d_2},$$

где S — площадь одной пластины конденсатора с одной стороны.

Емкость двух последовательно включенных конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{\frac{d_2}{\epsilon_{2a}} + \frac{d_1}{\epsilon_{1a}}}.$$

§ 15.45. О РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, СОЗДАВАЕМЫХ ДИЭЛЕКТРИКАМИ, СОХРАНЯЮЩИМИ ОСТАТОЧНУЮ ПОЛЯРИЗАЦИЮ ПРИ СНЯТИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Поле, которое создает однородно поляризованный диэлектрик с остаточной поляризацией \vec{P} (электрет, сегнетодиэлектрик) — на рис. 15.35, а он изображен в виде цилиндра длиной Δl и площадью поперечного сечения ΔS — на основании § 15.14 будет таким же, как поле воздушного конденсатора, изображенного на рис. 15.35, б. Площадь пластин этого конденсатора равна ΔS , расстояние между ними Δl , заряды на пластинах равны соответственно $\pm P\Delta S$.

Если поле создается не только электретом с остаточной поляризацией, но и другими заряженными телами, то следует использовать принцип наложения.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 16.1. ПЛОТНОСТЬ ТОКА И ТОК

Если под воздействием внешних источников в проводящей среде (металлических проводниках, земле, жидкостях и т. д.) создано электрическое поле, то в ней будет протекать электрический ток.

Носителями зарядов в металлах являются свободные электроны, носителями зарядов в жидкостях — ионы.

Упорядоченное движение свободных электронов в металле и ионов в жидкости под действием электрического поля принято называть *током проводимости*.

При своем упорядоченном движении носители зарядов испытывают многочисленные столкновения с другими частицами вещества, которые находятся в тепловом движении. Эти столкновения затрудняют упорядоченное движение носителей зарядов и являются причиной сопротивления, оказываемого проводящей средой прохождения тока.

Свойство среды, характеризующее ее способность проводить ток, называют *удельной проводимостью* γ . Удельная проводимость γ зависит от физических свойств проводящего материала и от температуры, имеет размерность $\text{ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{сим/м}$.

Электрическое поле в проводящей среде подчиняется законам, рассмотренным в данной главе.

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока $\vec{\delta}$. Это векторная величина, направленная по напряженности поля. Она численно равна отношению тока Δi , протекающего через элемент поверхности Δs (перпендикулярный к направлению напряженности поля в данной точке), к величине Δs этой поверхности.

Если поверхность имеет конечные размеры, то направление вектора плотности тока во всех элементах, на которые может быть разбита эта поверхность, и направление элементов поверхности могут быть различны, и ток определится так:

$$I = \int_s \vec{\delta} \cdot d\vec{s}.$$

Таким образом, *ток есть поток вектора плотности тока*.

В отличие от плотности тока ток является скаляром алгебраического характера.

При протекании постоянных токов как внутри проводящих тел, так и вне их существуют постоянные (неизменные во времени) магнитные поля. Так как эти поля неизменны во времени, то в поле не возникает явления электромагнитной индукции, т. е. магнитное поле, созданное постоянным током, не оказывает влияния на электрическое

поле постоянного тока. Поэтому электрическое и магнитное поля постоянного тока можно рассматривать отдельно.

Магнитное поле постоянного тока рассматривается в гл. XVII.

§ 16.2. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Выделим в проводящей среде небольшой параллелепипед объемом ΔV . Длина ребра параллелепипеда Δl , площадь поперечного сечения Δs . Расположим этот параллелепипед так, чтобы напряженность поля

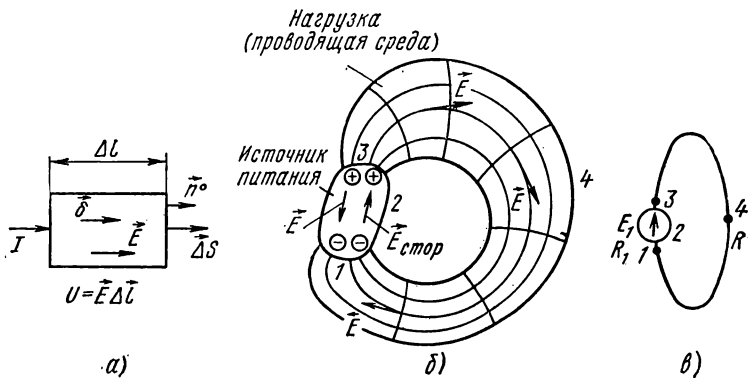


Рис. 16.1

в нем была направлена параллельно ребру (рис. 16.1, а). В силу малости объема можно считать, что напряженность электрического поля \vec{E} одна и та же во всем элементарном объеме:

$$\Delta \vec{l} = \Delta l \vec{n}^\circ; \quad \Delta \vec{s} = \Delta s \vec{n}^\circ,$$

где \vec{n}° — единичный вектор по направлению $\Delta \vec{l}$, $\Delta \vec{s}$ и \vec{E} .

$$\text{Ток } I = \int \vec{s} \cdot \vec{ds} = \vec{s} \cdot \Delta \vec{s}.$$

$$\text{Напряжение на элементе объема } U = \vec{E} \Delta \vec{l} = RI.$$

$$\text{Сопротивление элемента объема } R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta s}.$$

Подставив в выражение $RI = \vec{E} \Delta \vec{l}$ эквиваленты R и I , получим

$$\frac{\Delta l}{\gamma \Delta s} \vec{s} \Delta s \vec{n}^\circ = \vec{E} \Delta l \vec{n}^\circ,$$

откуда

$$\vec{s} = \gamma \vec{E}. \quad (16.1)$$

Соотношение (16.1) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Оно устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.

Уравнение (16.1) справедливо для областей вне источников э. д. с. В областях, занятых источниками э. д. с., кроме кулонова (электростатического) поля, существует еще так называемое стороннее электрическое поле, обеспечивающее непрерывное движение зарядов в электрической цепи.

Под *сторонним электрическим полем* понимают электрическое поле не электростатической природы (например, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими, механическими или электромагнитными процессами).

Напряженность стороннего поля обозначают $\vec{E}_{\text{стор}}$. В областях, занятых источниками э. д. с., полное значение напряженности поля равно геометрической сумме напряженности кулонова и стороннего полей $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$.

На рис. 16.1, б схематически изображена электрическая цепь постоянного тока. Она состоит из источника питания и нагрузки.

Источник сторонней э. д. с. создает внутри источника питания стороннюю напряженность поля $\vec{E}_{\text{стор}}$.

Линейный интеграл от сторонней напряженности поля внутри источника называется э. д. с. источника (E_1):

$$\int \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = E_1. \quad (16.2)$$

Под действием стороннего поля в источнике непрерывно происходит разделение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются к плюсу источника, а отрицательные — к минусу.

Эти заряды в области внутри и вне источника создают электрическое поле, напряженность которого, как и напряженность электростатического (кулонова) поля, направлена от положительных зарядов к отрицательным.

При протекании постоянного тока по цепи одни электрические заряды непрерывно сменяются другими, такими же, как и в предыдущие моменты времени. Таким образом, картина поля в макроскопическом смысле повторяется в смежные моменты времени. Поле носит как бы статический характер. Это и послужило основанием для того, чтобы поле, созданное в проводящей среде разделившимися зарядами, называть *кулоновым полем*, а его напряженность E называть напряженностью кулонова поля.

Внутри источника кулоново поле направлено навстречу стороннему полю. Полное значение напряженности поля внутри источника равно $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$. Вне источника кулоново поле направлено от положительного электрода к отрицательному. Под действием этого поля и происходит упорядоченное движение зарядов в области вне источника. При протекании тока по цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| > |\vec{E}|$. При разомкнутой цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| = |\vec{E}|$.

Закон Ома в дифференциальной форме для областей, занятых источниками э. д. с., записывают следующим образом:

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (16.3)$$

Уравнение (16.3) в литературе называют *обобщенным законом Ома в дифференциальной форме*.

Если от обеих частей уравнения (16.3) взять интеграл по замкнутому контуру, включающему в себя источник э. д. с., то из уравнения (16.3) будет получен второй закон Кирхгофа. Поэтому уравнение (16.3) называют также *вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*.

На рис. 16.1, в изображен замкнутый контур, по которому течет ток I . На участке 123 имеется источник сторонней э. д. с. E_1 . На участке 341 нет источников сторонней э. д. с. Обозначим через R_1 сопротивление участка 123 и через R — сопротивление участка 341. Примем, что площадь поперечного сечения всех участков замкнутого контура достаточно мала для того, чтобы можно было считать направление плотности тока и направление напряженности поля в некоторой точке совпадающими с направлением элемента пути \vec{dl} в той же точке.

Умножим обе части (16.3) на $\frac{dl}{\gamma}$ и составим циркуляцию вдоль замкнутого контура 12341 рис. 16.1, в:

$$\oint \frac{\vec{\delta} \cdot d\vec{l}}{\gamma} \oint (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l}.$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов. Поэтому

$$\oint (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l} = \oint \vec{E} d\vec{l} + \oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ в силу потенциального характера кулонова поля.

В свою очередь

$$\oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = \int_{123} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} + \int_{341} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l},$$

но $\int_{123} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$ равен сторонней э. д. с. E_1 , а $\int_{341} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = 0$, так как на участке 341 нет сторонней э. д. с.

Для подсчета величины $\oint \frac{\vec{\delta} \cdot d\vec{l}}{\gamma}$ умножим и разделим подынтегральное выражение на площадь поперечного сечения S , от плотности тока $\vec{\delta}$ перейдем к току I и заменим $\frac{dl}{\gamma S}$ на сопротивление участка пути dR . Получим:

$$\frac{\vec{\delta} \cdot d\vec{l}}{\gamma} \frac{S}{S} = \frac{I dl}{\gamma S} = I dR;$$

$$\oint \frac{\vec{\delta} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = I \oint dR = I \int_{123} dR + I \int_{341} dR = IR_1 + IR.$$

Таким образом, из уравнения (16.3) образовано уравнение

$$I(R_1 + R) = E_1,$$

составленное по второму закону Кирхгофа.

§ 16.3. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Если в проводящей среде выделить некоторый объем, по которому протекает постоянный, не изменяющийся во времени ток, то можно сказать, что ток, который войдет в объем, должен равняться току, вышедшему из объема, иначе в этом объеме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объем и выходящего из объема токов записывают так:

$$\oint \vec{\delta} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (16.4)$$

Если разделить и левую и правую части (16.2) на одно и то же число (на объем, о котором шла речь), то равенство останется справедливым:

$$\frac{\oint \vec{\delta} \cdot d\vec{s}}{V} = 0.$$

Очевидно, что последнее соотношение будет справедливо и в том случае, если объем, находящийся внутри замкнутой поверхности, будет стремиться к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{\delta} \cdot d\vec{s}}{V} = \operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

Таким образом, для постоянного, неизменного во времени поля в проводящей среде

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0. \quad (16.5)$$

Это соотношение называют *первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*. Оно означает, что в установившемся режиме (при постоянном токе) в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости $\vec{\delta}$.

§ 16.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНА ДЖОУЛЯ—ЛЕНЦА

В разделе постоянного тока ч. I учебника отмечалось, что если по какому-либо проводнику сопротивлением R протекает постоянный ток I , то в единицу времени (в *сек*) в нем выделяется энергия, равная $I^2 R$. Определим энергию, выделяющуюся в единицу времени в единице объема проводящей среды (с этой целью воспользуемся рис. 16.1, а):

$$\frac{I^2 R}{V} = \frac{(\delta \Delta s)^2}{\Delta l \Delta s} \left(\frac{\Delta l}{\gamma \Delta s} \right) = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (16.6)$$

Следовательно, в единице объема проводящей среды выделяется в единицу времени энергия, численно равная γE^2 .

§ 16.5. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Так же как и в электростатическом поле, напряженность электрического поля в проводящей среде $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В неизменном во времени поле

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0. \quad (16.7)$$

Если γ среды не изменяется от точки к точке, т. е. если среда однородна и изотропна, то γ как постоянную величину можно вынести за знак дивергенции и, следовательно, вместо $\operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0$ можно написать

$$\gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ или}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (16.8)$$

т. е.

$$\operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

или

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (16.9)$$

Таким образом, поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа. Поле постоянного тока в проводящей среде является полем потенциальным. В нем, в областях, не занятых источниками, $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

§ 16.6. ПЕРЕХОД ТОКА ИЗ СРЕДЫ С ОДНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ γ_1 В СРЕДУ С ДРУГОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ γ_2 . ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Выясним, какие граничные условия выполняются при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью.

На рис. 16.2 линия OO есть граница раздела сред. Возьмем на границе плоский замкнутый контур 1234 . Составим циркуляцию вдоль этого контура. Стороны 12 и 34 его весьма малы по сравнению со сторонами 23 и 41 (длину последних обозначим dl).

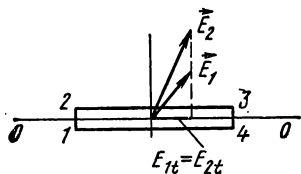


Рис. 16.2

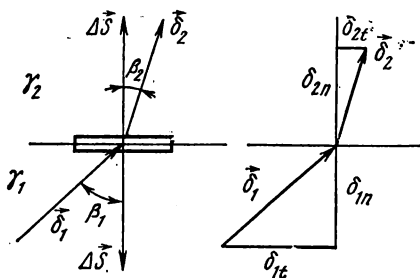


Рис. 16.3

Так как $\oint \vec{E} d\vec{l}$ вдоль любого замкнутого контура равно нулю, то оно равно нулю и для контура 1234 .

В силу малости отрезков 12 и 34 пренебрежем составляющими интеграла вдоль этих путей и тогда

$$E_{1t} dl - E_{2t} dl = 0 \text{ или } E_{1t} = E_{2t}. \quad (16.10)$$

Это соотношение совпадает с соотношением (15.34).

На границе раздела равны нормальные составляющие плотностей токов. Докажем это.

На границе раздела выделим сплюснутый параллелепипед (рис. 16.3). Поток вектора $\vec{\delta}$, втекающий в объем через нижнюю грань, равен

$-\delta_{1n}\Delta S$; поток вектора $\vec{\delta}$, вытекающий из объема через верхнюю грань, $\delta_{2n}\Delta S$. Так как $\oint \vec{\delta} \vec{ds} = 0$, то

$$\begin{aligned} -\delta_{1n}\Delta S + \delta_{2n}\Delta S &= 0 \\ \delta_{1n} &= \delta_{2n}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Следовательно, при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью непрерывна тангенциальная составляющая вектора \vec{E} , т. е. $E_{1t} = E_{2t}$ (но $E_{1n} \neq E_{2n}$), и непрерывна нормальная составляющая плотности тока $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ (но $\delta_{1t} \neq \delta_{2t}$).

Отсюда следует, что полные значения вектора \vec{E} и вектора $\vec{\delta}$ в общем случае меняются скачком на границе раздела.

Найдем связь между углом падения β_1 и углом преломления β_2 :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\delta_{1t}}{\delta_{1n}} = \frac{E_{1t}\gamma_1}{\delta_{1n}}; \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_{2t}}{\delta_{2n}} = \frac{E_{2t}\gamma_2}{\delta_{2n}}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (16.12)$$

Если ток переходит из среды с большой проводимостью (например, из металла) в среду с малой проводимостью (например, в землю), то тангенс угла преломления $\operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} \beta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ меньше тангенса угла падения и, следовательно, угол β_2 будет меньше угла β_1 . Если γ_2 весьма мало, то угол $\beta_2 \rightarrow 0$.

§ 16.7. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ПОЛЕМ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

По своей природе поле электростатическое и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается электрическими зарядами, неизменными во времени и неподвижными в пространстве, тогда как электрическое поле в проводящей среде есть поле, в котором электрические заряды имеют упорядоченное движение под действием внешнего источника. Тем не менее между двумя полями может быть проведена определенная формальная аналогия.

Действительно, электростатическое поле в областях, не занятых зарядами, удовлетворяет уравнению Лапласа. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде вне сторонних источников также ему удовлетворяет. В обоих полях имеют дело с вектором напряженности поля \vec{E} . С вектором электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ можно сопоставить вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. С потоком вектора \vec{D} (обозначим его буквой ψ) $\psi = \int \vec{D} \vec{ds}$ можно сопоставить поток вектора плотности электрического тока $I = \int \vec{\delta} \vec{ds}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{и} \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различной проводимостью:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{и} \quad \delta_{1n} = \delta_{2n}.$$

Но если два поля удовлетворяют одному и тому же уравнению $\nabla^2\varphi = 0$ и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных величин, то при одинаковой форме граничных поверхностей на основании теоремы единственности можно сказать, что совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях (т. е. картина поля) будет одинаковой.

Эта формальная аналогия на практике широко используется. Так, например, если какое-либо электростатическое поле уже изучено, то все сведения о поле могут быть перенесены и на геометрически подобное поле в проводящей среде. Справедливо и обратное заключение.

§ 16.8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ

Если форма граничных поверхностей (электродов) сложна, то аналитический расчет поля осуществить бывает довольно трудно. Непосредственное же определение потенциала электростатического поля путем помещения в отдельные точки поля зондов обычно также не удастся, потому что зонды даже при малой мощности, потребляемой индикаторами, своим присутствием искажают поле.

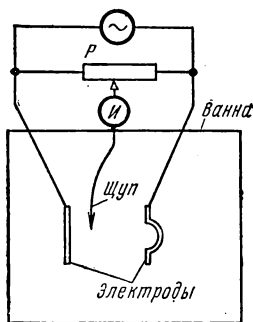


Рис. 16.4

В этом случае поле исследуют экспериментально на модели, т. е. прибегают к моделированию, либо в электрической ванне, либо на твердой модели. Рассмотрим, как производится моделирование двумерного поля в электролитической ванне.

В ванну с электролитом (например, с подкисленной водой) помещают электроды (рис. 16.4). Форма и взаимное расположение их должны быть точно такими же, как и в изучаемом электростатическом поле. Для того чтобы стенки ванны меньше искажали исследуемое поле, линейные размеры ванны должны в несколько раз превышать соответствующие линейные размеры исследуемого участка поля.

Электроды соединяют с источником э. д. с. низкой частоты (обычно 50 гц). Использовать в качестве источника питания э. д. с. постоянного тока нельзя, так как при постоянном токе будет происходить электролиз подкисленной воды, и пузырьки газа, осаждаясь на электродах, будут искажать исследуемое поле. По электролиту проходит переменный ток.

С помощью вспомогательного реостата P , зонда (щупа) и индикатора нуля $И$ можно снять семейство эквипотенциальных линий в поле.

С этой целью устанавливают движок реостата в каком-либо фиксированном положении и, перемещая зонд (щуп) так, чтобы индикатор показывал нуль, находят совокупность точек, потенциал которых равен потенциалу движка реостата. Далее перемещают движок реостата в новое положение и определяют координаты точек второй эквипотенциали и т. д. Затем по семейству эквипотенциалей строят сетку силовых линий. При построении последней руководствуются тем, что силовые линии в любой точке поля должны быть перпендикулярны эквипотенциалам, в том числе и поверхностям электродов.

В электростатическом поле силовые линии перпендикулярны поверхностям электродов. В поле проводящей среды силовые линии, строго говоря, немного не перпендикулярны поверхностям электродов. Но если проводимость электродов будет во много раз больше проводимости электролита, то [см. формулу (16.12)] с большой степенью точности можно считать, что силовые линии будут подходить к поверхностям электродов практически под прямым углом *.

Моделирование двумерных полей на твердой модели осуществляют обычно на специально выпускаемой электропроводной бумаге (в обычную бумагу добавляют сажу или графит). Металлические электроды ставят на бумагу и подводят к ним напряжение переменного или постоянного тока. Ток проходит по бумаге. Семейство эквипотенциалей снимают так же, как и в электролитической ванне.

§ 16.9. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПРОВОДИМОСТЬЮ И ЕМКОСТЬЮ

Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику э. д. с., то по проводящей среде пойдет ток. Если напряжение между электродами 1 и 2 равно U_{12} и по среде проходит ток I , то проводимость среды

$$G = \frac{I}{U_{12}}.$$

Так как ток $I = \int \vec{\delta} \cdot d\vec{s} = \gamma \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ и $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$, то

$$G = \frac{\gamma \int \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}. \quad (16.13)$$

В свою очередь в электрическом поле с электродами такой же конфигурации емкость между двумя частями электродов, на которых расположены одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды Q , создающие поток ψ вектора электрической индукции \vec{D}

* В приложении М на стр. 698 рассматриваются основы моделирования полей с помощью метода электрических сеток.

$\psi = Q = \int \vec{D} ds$, будет

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_a \int \vec{E} d\vec{s}}{\int \vec{E} d\vec{l}}. \quad (16.14)$$

Если разделить (16.14) на (16.13), то после сокращения получим

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon_a}{\gamma}, \quad (16.15)$$

т. е. емкость C между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a , так относится к проводимости G между теми же телами, если поместить их в среду с электрической проводимостью γ , как ϵ_a относится к γ .

Соотношение (16.15) позволяет по известному выражению емкости между какими-либо телами получить выражение для проводимости или совершить обратную операцию. Так, например, емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{\pi \epsilon_a l}{\ln \frac{d}{r}}, \quad (16.16)$$

где l — длина проводов;
 d — расстояние между осями проводов;
 r — радиус провода.

Для того чтобы получить выражение для проводимости между двумя параллельными проводами (цилиндрами), погруженными в среду с проводимостью γ , надо в соответствии с (16.15) заменить в (16.16) ϵ_a на γ . Тогда получим

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (16.17)$$

Или другой пример. Емкость коаксиального кабеля (рис. 16.5, а).

$$C = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Проводимость между двумя соосными цилиндрами длиной l , которые разделены средой с проводимостью γ (рис. 16.5, б),

$$G = \frac{2\pi \gamma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Аналогию можно распространить и на более сложные поля. Например, если в равномерное поле, созданное в среде с проводимостью γ ,

поместить шар с проводимостью γ_i , то в соответствии с (15.67) потенциал внутри шара определим следующим образом:

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 \frac{3\gamma_e}{2\gamma_e + \gamma_i} z.$$

§ 16.10. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ НА РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

Так же как и задачи электростатики, задачи на расчет электрического поля в проводящей среде можно классифицировать по характеру величины, которая определяется в результате расчета, на задачи, в которых определяют точечные характеристики (плотность тока, потенциал), и на задачи, в которых находят интегральные характеристики поля, например сопротивление между электродами или напряжение между некоторыми точками.

В зависимости от того, что задано и что определяется, все задачи на расчет электрического поля в проводящей среде можно разделить на два основных типа.

В первом типе задач заданы форма и расположение электродов (геометрии поля), свойства среды и интенсивность источников, создающих поле. Требуется найти либо точечные, либо интегральные характеристики поля.

Второй тип задач является обратным по отношению к первому. Одной из задач второго типа может быть, например, следующая: при заданной точечной характеристике поля, заданной форме и расположении электродов и свойствах среды найти интенсивность источников, создающих это поле.

Задачи на расчет электрического поля в проводящей среде могут быть решены:

1) путем непосредственного интегрирования уравнений, описывающих поле (см. примеры 195 и 198);

2) путем использования аналитических решений для других статических невихревых полей (см. примеры 194 и 200);

3) экспериментальным (см. § 16.8) или графическим путем; графический метод построения картины поля применительно к плоскопараллельному магнитному полю рассматривается в § 17.20.

Изложенная в этом параграфе методика полностью пригодна и для построения картины плоскопараллельного электрического поля в проводящей среде;

4) методом зеркальных изображений; в соответствии с аналогией, рассмотренной в § 16.7, формулы для расчетных токов I_2 и I_3 в задаче, дуальной задаче § 15.34, следуют из формул для τ_2 и τ_3 , если в них ϵ_{1a} заменить на γ_1 , а ϵ_{2a} на γ_2 . Метод применим и в том случае, когда проводимость $\gamma_2 = 0$.

Применительно к электрическому полю проводящей среды вводят понятия собственных и взаимных проводимостей тел, определяемых по аналогии с собственными и взаимными емкостями тел (частичными емкостями — см. § 15.34);

5) методом конформных преобразований (см. приложение П).

§ 16.11. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ, ОКРУЖАЮЩЕМ ПРОВОДНИКИ С ТОКАМИ

Принято считать, что картина электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами, тождественна картине электрического поля в условиях электростатики.

Строго говоря, это верно лишь приближенно, поскольку в условиях электростатики тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводящего тела равна нулю, тогда как при протекании постоянного тока по проводнику тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводника, хотя и очень мала по сравнению с нормальной составляющей напряженности в той же точке, но не равна нулю. На числовом примере убедимся в том, что тангенциальная составляющая напряженности поля E_t во много раз меньше нормальной составляющей напряженности поля E_n .

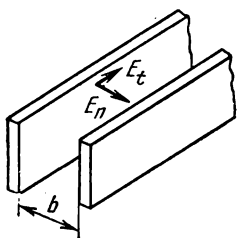


Рис. 16.6

Положим, что разность потенциалов U между двумя параллельными токонесущими медными шинами (рис. 16.6) равна 100 в, расстояние b между шинами 2 см, плотность тока $\delta = 2,5 \cdot 10^6$ а/м², $\gamma = 5,6 \cdot 10^7$. Тогда

$$E_t = \frac{\delta}{\gamma} = 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ в/м}; \quad E_n = \frac{U}{b} = 5 \cdot 10^3 \text{ в/м};$$

$$\frac{E_n}{E_t} \approx 1,12 \cdot 10^5.$$

Пример 195. Определить ток утечки коаксиального кабеля на 1 км длины. Пространство между жилой и оболочкой заполнено неидеальным диэлектриком, который обладает проводимостью $\gamma = 10^{-8} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Радиус жилы r_1 , радиус оболочки $r_2 = e r_1$, где e — основание натуральных логарифмов. Напряжение между жилой и оболочкой 10 кВ.

Решение. Ток утечки $I = UG$. Проводимость

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{1} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ сим.}$$

Ток утечки через несовершенную изоляцию

$$I = 10^4 \cdot 0,628 \cdot 10^{-4} = 0,628 \text{ а/км.}$$

Пример 196. Рассмотрим простейшую задачу на расчет поля заземления. Подвод тока к земле производится с помощью погруженных в землю заземлений. Ток стекает через заземлитель в землю и растекается по толще земли, с тем чтобы собраться у другого электрода заземлителя. Земля выполняет роль обратного провода.

Если погрузить в землю металлическую полусферу, через которую в землю стекает ток I (рис. 16.7), и принять, что второй электрод, к которому ток будет подтекать, находится очень далеко, то плотность тока

в земле на поверхности полусферы радиусом R будет $\delta = \frac{I}{2\pi R^2}$ (поверхность сферы $4\pi R^2$, поверхность полусферы $2\pi R^2$). Напряженность поля

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma R^2}.$$

Напряжение между двумя точками на поверхности земли (точки 1 и 2)

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

На рис. 16.7 изображена кривая изменения потенциала на поверхности земли.

Найдем напряжение между точками 1 и 2, расположенными на расстоянии, примерно равном шагу человека ($R_1 = 22$ м, $R_2 = 23$ м).

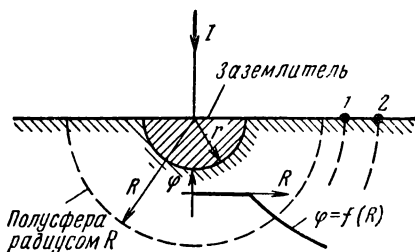


Рис. 16.7

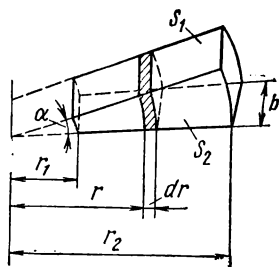


Рис. 16.8

Через заземлитель стекает ток $I = 1000$ а (ток короткого замыкания), проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ ом⁻¹·м⁻¹:

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{10^3}{2\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{23} \right) \approx 31,9 \text{ в.}$$

Пример 197. В морскую воду при $\gamma = 0,1$ ом⁻¹·м⁻¹ вертикально опущены две металлические трубы наружным диаметром 5 см и длиной 3 м. Найти проводимость G между трубами. Оси труб удалены на расстояние $d = 25$ м.

Решение.

$$G = \frac{\pi\gamma l}{\ln \frac{d}{r}} = \frac{\pi \cdot 10^{-1} \cdot 3}{\ln \frac{25}{0,025}} = \frac{\pi \cdot 0,3}{6,907} = 0,130 \text{ сим.}$$

Пример 198. Вывести формулу для определения проводимости G между плоскостями S_1 и S_2 проводящего тела, имеющего форму клина (рис. 16.8).

Р е ш е н и е. Проводимость заштрихованного пояса высотой ra , толщиной dr и шириной b

$$dG = \frac{\gamma b dr}{ar},$$

где γ — удельная проводимость.

Проводимость

$$G = \frac{\gamma b}{a} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\gamma b}{a} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Пример 199. В пластинке из алюминия ($\gamma_e = 3,57 \cdot 10^7 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$) создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 0,1 \text{ в/м}$. Определить плотность тока в медном теле ($\gamma_i = 5,6 \cdot 10^7 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$), имеющем цилиндрическую форму и расположенном перпендикулярно полю.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (15.72) и аналогией, рассмотренной в § 16.9:

$$E_i = E_0 \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + \gamma_i} = 10^{-1} \frac{2 \cdot 3,57}{3,57 + 5,6} = 0,78 \cdot 10^{-1} \text{ в/м};$$

$$\delta_i = \gamma_i E_i = 5,6 \cdot 10^7 \cdot 0,78 \cdot 10^{-1} = 436 \cdot 10^4 \text{ а/м}^2.$$

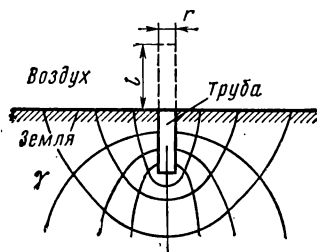


Рис. 16.9

Пример 200. Воспользовавшись результатом примера 191, вывести формулу для определения проводимости заземления, выполненного в виде стальной трубы длиной l , радиусом r , забитой в землю перпендикулярно ее поверхности. Полагать, как и в примере 196, что второй электрод находится в бесконечности, удельная проводимость земли γ .

Р е ш е н и е. Картина поля заземлителя показана на рис. 16.9. Труба длиной l , находящаяся в земле, на рисунке дополнена такой же трубой, находящейся в воздухе. Проводимость заземления равна половине проводимости трубы длиной $2l$. В соответствии с примером 191

$$G = \pi \gamma 2l \left[\operatorname{Arsh} \frac{2l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l} \right)^2} + \frac{r}{2l} \right]^{-1}.$$

Глава семнадцатая

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 17.1. СВЯЗЬ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В гл. III рассматривались методы расчета магнитных цепей и основные понятия, характеризующие магнитное поле. Там отмечалось, что магнитное поле характеризуется индукцией \vec{B} , намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H} .

Эти три величины связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}^*, \quad (17.1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная; в системе СИ

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м};$$

μ_a — абсолютная магнитная проницаемость.

Одним из основных проявлений магнитного поля является воздействие его на проводник с током, помещенный в это поле. Опыт показывает, что сила \vec{F} , с которой магнитное поле действует на элемент проводника длиной $d\vec{l}$ с током I , определяется следующим образом:

$$\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (17.2)$$

Эта сила направлена перпендикулярно индукции в данной точке поля и перпендикулярна элементу тока $I d\vec{l}$ (рис. 17.1). Из выражения (17.2) следует, что индукция может быть определена как сила, действующая на проводник длиной dl , равной единице, если по нему протекает ток I , равный единице.

В СИ единицей измерения индукции является тесла ($1 \text{ тл} = 1 \text{ в} \cdot \text{сек/м}^2$); в системе СГСМ — гаусс (гс).

Если индукция \vec{B} и элемент длиной $d\vec{l}$ параллельны, то элемент тока не испытывает механического воздействия со стороны магнитного поля. Механическое воздействие магнитного поля на элемент тока максимально, когда \vec{B} и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны.

Электромагнитное поле представляет собой совокупность взаимно связанных электрического и магнитного полей. Таким образом, магнитное поле есть одна из сторон электромагнитного поля. Магнитное поле постоянного тока создается неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам (средам), неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю.

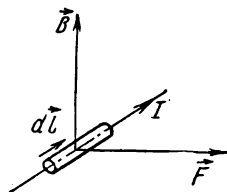


Рис. 17.1

* Пояснения к формуле (17.1) см. в § 3.24.

На помещенный в это поле проводник с током действует сила, прямо пропорциональная величине тока [формула (17.2)].

Если где-либо протекает электрический ток, то он неизбежно создает магнитное поле. Справедливо и обратное заключение: если в какой-либо точке или точках есть магнитное поле, то оно вызвано некоторым током. Этот ток протекает не обязательно в непосредственной близости от точек пространства, в которых им создано магнитное поле.

Магнитное поле создается в равной мере током проводимости и током электрического смещения. В данной главе рассматривается магнитное поле постоянного тока, когда ток смещения отсутствует. О токе электрического смещения, т. е. о токе, вызванном изменением напряженности электрического поля во времени, см. стр. 633.

§ 17.2. ОСНОВНОЙ ЗАКОН МАГНИТНОГО ПОЛЯ — ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Количественная связь между циркуляцией вектора \vec{H} по замкнутому контуру и током внутри контура определяется законом полного тока в интегральной форме — линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура равен полному току, пронизывающему замкнутый контур:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (17.3)$$

Под полным током понимают весь ток (ток проводимости и ток смещения), пронизывающий контур интегрирования.

Интегральную форму закона полного тока применяют, когда может быть использована симметрия в поле. Так, например, напряженность поля в некоторой точке A в поле бесконечного прямого провода с током I (рис. 17.2) по закону полного тока определяют следующим образом. Проведем через точку A окружность радиусом R в плоскости, перпендикулярной оси провода, так что центр ее находится на оси провода. В силу симметрии напряженность поля во всех точках окружности численно одна и та же. Направление напряженности совпадает с касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H \cdot 2\pi R = I; \quad H = \frac{1}{2\pi R}.$$

С увеличением радиуса R напряженность магнитного поля убывает по гиперболическому закону.

Если какое-либо поле имеет сложный характер и не удастся составить замкнутый контур, все точки которого находились бы в симметричных условиях, то хотя интегральная форма записи закона полного тока справедлива и для такого контура, но использовать ее для нахождения напряженности в любой точке поля не удастся (H нельзя вынести из-под знака интеграла).

§ 17.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНА ПОЛНОГО ТОКА

Соотношение (17.3) пригодно для контура любых размеров, в том числе и для весьма малого.

Выделим в какой-либо среде небольшой контур («жирно» обведен на рис. 17.3) и составим вдоль него циркуляцию вектора \vec{H} . Циркуляция напряженности поля вдоль этого контура равна току, пронизывающему обведенную площадку.

Если площадка мала, то можно полагать, что плотность тока $\vec{\delta}$ в пределах этой площадки одинакова и тогда ток, пронизывающий площадку,

$$\Delta i = \vec{\delta} \Delta \vec{s} = \delta_n \Delta s.$$

Здесь δ_n — проекция вектора плотности тока $\vec{\delta}$ на нормаль к площадке, т. е. на направление $\Delta \vec{s}$:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \delta_n \Delta s.$$

За положительное направление нормали к площадке принимают направление движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении, принятом за положительное при обходе контура и составлении циркуляции.

Разделим обе части равенства на Δs и устремим Δs к нулю. Это будет соответствовать стягиванию рассматриваемой площадки к нулю. Предел полученного отношения равен

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta s} = \delta_n.$$

В левой части равенства находится величина, которую в курсе математики называют проекцией ротора \vec{H} на направление нормали к площадке Δs . Следовательно,

$$\text{rot}_n \vec{H} = \delta_n.$$

Если площадку Δs ориентировать в пространстве так, что направление нормали к ней совпадет с направлением вектора плотности тока $\vec{\delta}$ в данной точке поля, то тогда вместо равенства проекций двух векторов ($\text{rot}_n \vec{H}$ и δ_n) можно записать равенство самих векторов

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (17.4)$$

Формула (17.4) и представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Ротор может быть определен как функция, характеризующая поле в рассматриваемой точке в отношении способности к образованию вихрей.

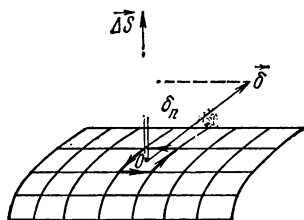


Рис. 17.3

Уравнение (17.4) записано в общей форме, безотносительно к системе координат, и в каждой конкретной системе координат оно раскрывается по-своему.

§ 17.4. РАСКРЫТИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Равенство двух векторов $\text{rot } \vec{H}$ и $\vec{\delta}$ означает, что равны проекции их на ось x , проекции на ось y и проекции на ось z . Проекция $\text{rot } \vec{H}$

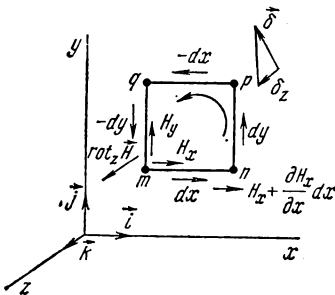


Рис. 17.4

на ось z равна $\text{rot}_z \vec{H} = \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta s_z \rightarrow 0} = \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta s_z}$, проекция вектора $\vec{\delta}$ на ось z есть δ_z и т. д.

На рис. 17.4 в декартовой системе координат изображен малый прямоугольный контур $mnpq$. Обойдем этот контур против часовой стрелки и составим циркуляцию вектора \vec{H} . При составлении циркуляции необходимо учесть изменение вектора \vec{H} от точки к точке.

Обозначим проекции \vec{H} на оси x и y в точке m соответственно через H_x и H_y .

В точке n проекция на ось x изменится по сравнению с проекцией в точке m и станет равной $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx$; проекция на ось y будет $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$.

В точке q $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy$ и $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy$.

В точке p

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx$$

и

$$H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$$

При составлении циркуляции на участках mn и pq необходимо принимать во внимание лишь «иксовые» составляющие \vec{H} («игрековые» составляющие перпендикулярны элементу пути).

Составляющую $\oint \vec{H} d\vec{l}$ на участке mn находят как произведение среднего значения «иксовой» составляющей напряженности на этом участке на длину пути dx :

$$\frac{H_x + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right)}{2} dx = \left(H_x + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right) dx;$$

на участке np

$$\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy\right) dy;$$

на участке pq

$$\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right)(-dx);$$

на участке qm

$$\left(H_y + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy\right)(-dy).$$

Если просуммировать все составляющие циркуляции вдоль контура $mnpq$, то получим

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) dx dy.$$

В соответствии с определением проекции ротора на ось z разделим циркуляцию на площадку $ds_z = dxdy$, после чего проекция ротора на направление оси z будет равна

$$\text{rot}_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

Аналогично,

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x$$

и

$$\text{rot}_y \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y.$$

Таким образом,

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (17.5)$$

§ 17.5. ВЫРАЖЕНИЕ РОТОРА В ВИДЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Формально $\text{rot } \vec{H}$ можно представить в виде векторного произведения оператора пространственного дифференцирования ∇ на вектор \vec{H} , т. е. $\text{rot } \vec{H} = [\nabla \vec{H}]$.

В этом нетрудно убедиться путем непосредственного умножения ∇ на \vec{H} :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) \right] = \\ & = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

§ 17.6. РАСКРЫТИЕ $\text{rot } \vec{H}$ В ВИДЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ

Ротор любого вектора, используемого в теории электромагнитного поля, можно представить в виде определителя третьего порядка.

Так, $\text{rot } \vec{H}$ в декартовой системе записывают в виде следующего определителя:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (17.6)$$

Непосредственное раскрытие определителя показывает, что получается выражение (17.5).

§ 17.7. ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ РОТОРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Без вывода приведем выражение проекций ротора \vec{H} в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \vec{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z}; \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ \text{rot}_z \vec{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\alpha) - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (17.7)$$

в сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_R \vec{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} \right]; \\ \text{rot}_\theta \vec{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial H_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_\alpha); \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R H_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

§ 17.8. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ МАГНИТНОГО ПОТОКА И ЗАПИСЬ ЕГО В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Магнитный поток есть поток вектора магнитной индукции через некоторую поверхность:

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Индекс s под знаком интеграла свидетельствует о том, что интеграл взят по поверхности s . Если поверхность замкнута сама на себя (например, поверхность шара), то поток, пронизывающий замкнутую поверхность,

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Опыт показывает, что вошедший внутрь любого объема магнитный поток равен магнитному потоку, вышедшему из того же объема.

Следовательно, сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема потоков равна нулю:

$$\oint \vec{B} \vec{ds} = 0. \quad (17.9)$$

Выражение (17.9) представляет собой математическую запись принципа непрерывности магнитного потока.

Разделим обе части (17.9) на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности s , и найдем предел отношения, когда объем V стремится к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} \vec{ds}}{V} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (17.10)$$

Соотношение (17.10) можно трактовать как дифференциальную форму принципа непрерывности магнитного потока. Оно пригодно для любой точки магнитного поля. Следовательно, в любой точке магнитного поля нет ни истока, ни стока линий вектора магнитной индукции. Линии вектора \vec{B} нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые сами на себя линии (окружность — пример замкнутой на себя линии).

Но линии \vec{B} в точках, где изменяется \vec{J} (например, на границах сред с разными μ), прерывны. Это следует из (17.10): $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = 0$. Отсюда $\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}$. Сопоставьте с прерывностью линий \vec{E} и непрерывностью линий \vec{D} в электрическом поле (см. § 15.39).

§ 17.9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОБЛАСТЯХ, «ЗАНЯТЫХ» И «НЕ ЗАНЯТЫХ» ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Вихревыми принято называть поля, ротор которых отличен от нуля. Так как для магнитного поля постоянного тока $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, то во всех точках пространства, где $\vec{\delta} \neq 0$, поле вектора \vec{H} является полем вихревым. В областях пространства, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ и магнитное поле можно рассматривать как *потенциальное*.

§ 17.10. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для совокупности точек, где $\delta = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ и магнитное поле можно рассматривать как потенциальное, т. е. как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал φ_m . Следовательно, для таких областей можно принять

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \quad (17.11)$$

Так как $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0$, то при $\mu_a = \operatorname{const}$ $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. В последнее выражение подставим $-\operatorname{grad} \varphi_m$ вместо \vec{H} , получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m = 0.$$

Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля φ_m , о котором может идти речь только для областей, не занятых током, подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (17.12)$$

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 называют *падением магнитного напряжения* между точками 1 и 2 (см. стр. 67):

$$U_{m12} = \varphi_{m1} - \varphi_{m2} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{l}.$$

Падение магнитного напряжения между точками 1 и 2 по какому-то одному пути (например, по пути 132, рис. 17.5, а) равно падению магнитного напряжения между теми же точками по какому-то другому пути (например, по пути 142) в том случае, когда эти пути образуют замкнутый контур, ток внутри которого равен нулю.

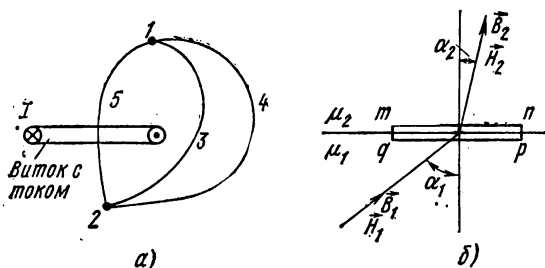


Рис. 17.5

Если же замкнутый контур, образованный двумя путями, охватывает некоторый ток, то падение магнитного напряжения по первому пути не равно падению магнитного напряжения по второму пути — они будут различаться на величину тока, охваченного контуром. Последнее следует из закона полного тока. Так, применительно к рис. 17.5, а $\int_{132} \vec{H} d\vec{l} \neq \int_{142} \vec{H} d\vec{l}$ (ибо из закона полного тока следует, что $\int_{132} \vec{H} d\vec{l} + \int_{251} \vec{H} d\vec{l} = -I$, или $\int_{132} \vec{H} d\vec{l} = -I + \int_{152} \vec{H} d\vec{l}$).

Следует различать понятия «падение магнитного напряжения» и «магнитное напряжение». Первое определяется только линейным интегралом от \vec{H} на $d\vec{l}$ по выбранному пути. Второе — не только этим интегралом, но и м. д. с., имеющейся на пути (см. стр. 75). Здесь имеется полная аналогия с понятиями «падение напряжения» и «напряжение в электрической цепи».

§ 17.11. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Подобно тому как в электростатическом поле и в поле проводящей среды выполнялись определенные граничные условия, в магнитном

поле также имеют место граничные условия:

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad (17.13)$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (17.14)$$

Условие (17.13) означает, что на границе раздела двух однородных и изотропных сред, различных в магнитном отношении (различные μ), равны тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля.

Условие (17.14) свидетельствует о равенстве нормальных составляющих векторов магнитных индукций на границе раздела.

Условие (17.13) выводится путем составления линейного интеграла $\oint \vec{H} d\vec{l}$ по плоскому контуру $mnpq$ (рис. 17.5, б) и приравнивания его нулю (так как он не охватывает тока). Стороны np и qm ничтожно малы по сравнению со сторонами mn и pq . Длину стороны mn и равную ей по величине длину стороны pq обозначим через dl . Тогда

$$H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = 0,$$

но $H_1 \sin \alpha_1 = H_{1t}$, $H_2 \sin \alpha_2 = H_{2t}$, следовательно, $H_{1t} = H_{2t}$.

Условие (17.13) не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый *поверхностный ток*. Под ним понимают ток, протекающий по бесконечно тонкому плоскому проводнику, помещенному на границе раздела.

В этом случае $\oint \vec{H} d\vec{l}$ будет равняться не нулю, а поверхностному току σdl , который оказался внутри замкнутого контура:

$$H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = \sigma dl,$$

и в силу этого $H_{1t} - H_{2t} = \sigma$.

Другими словами, при наличии поверхностного тока с плотностью σ тангенциальная составляющая напряженности поля терпит разрыв. Как правило, поверхностный ток отсутствует, и равенство (17.13) имеет силу.

Равенство нормальных составляющих векторов магнитной индукции следует из принципа непрерывности магнитного потока:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0.$$

Для того чтобы убедиться в справедливости (17.14), выделим на границе раздела небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора \vec{B} через нижнюю грань (рис. 17.6) — $B_{1n} \Delta s$ и через верхнюю грань $B_{2n} \Delta s$.

Сумма потоков равна нулю:

$$-B_{1n} \Delta s + B_{2n} \Delta s = 0.$$

Следовательно,

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

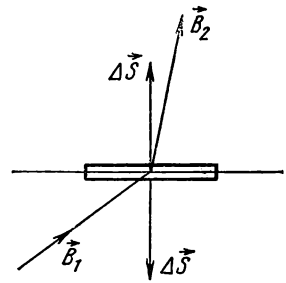


Рис. 17.6

Из (17.13) и (17.14) вытекает соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{1a}}{\mu_{2a}}. \quad (17.15)$$

Оно дает связь между углом падения α_1 и углом преломления α_2 (см. рис. 17.5, б). Если магнитные силовые линии выходят из среды с большой магнитной проницаемостью, например $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$, в среду с малой магнитной проницаемостью, например в воздух $\mu_{2a} = \mu_0$, то

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = 10^4 \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_2 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Следовательно, угол α_2 много меньше угла α_1 .

Пример 201. Найти угол α_2 , под которым силовые линии выходят в среду с магнитной проницаемостью μ_{2a} , если угол $\alpha_1 = 89^\circ$; $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$, $\mu_{2a} = \mu_0$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} 89^\circ = 57,29$;

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,005729; \quad \alpha_2 = 20'.$$

§ 17.12. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для расчета магнитных полей широко используют векторный потенциал, или вектор-потенциал магнитного поля. Его обозначают \vec{A} . Это векторная величина, плавно изменяющаяся от точки к точке, и ротор которой равен магнитной индукции:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (17.16)$$

Основанием для представления индукции в виде ротора от вектора-потенциала служит то, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю.

Известно, что в магнитном поле $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Подстановка в это равенство $\operatorname{rot} \vec{A}$ вместо \vec{B} дает выражение, тождественно равное нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0.$$

Равенство нулю $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$ можно пояснить с помощью оператора ∇ . С этой целью вместо $\operatorname{rot} \vec{A}$ запишем $[\nabla \vec{A}]$. Тогда $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla [\nabla \vec{A}]$. Векторное произведение $[\nabla \vec{A}]$ перпендикулярно и к ∇ и к \vec{A} . Скалярное произведение ∇ на $[\nabla \vec{A}]$, т. е. $\nabla [\nabla \vec{A}]$, равно нулю потому, что равен нулю косинус угла между ∇ и $[\nabla \vec{A}]$.

Если вектор-потенциал как функция координат известен, то индукцию в любой точке поля определяют путем нахождения ротора от вектора-потенциала в соответствии с (17.16). В отличие от скалярного магнитного потенциала φ_m , пользоваться которым можно только для областей, не занятых током (см. § 17.10), векторным потенциалом можно пользоваться как для областей, не занятых током, так и для областей, занятых током.

В электротехнических расчетах векторный потенциал применяют для достижения *двух целей*:

- 1) определения магнитной индукции с помощью формулы (15.16);
- 2) определения магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (см. § 17.14).

Векторный потенциал в произвольной точке поля связан с плотностью тока в этой же точке уравнением Пуассона.

§ 17.13. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ ВЕКТОРА-ПОТЕНЦИАЛА

Умножим обе части (17.4) на магнитную проницаемость среды μ_a :

$$\mu_a \operatorname{rot} \vec{H} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Условимся, что будем иметь дело с полями, которые могут быть подразделены на отдельные области, так что магнитные проницаемости μ_a в каждой отдельной области постоянны. Если μ_a постоянно, то его можно подвести под знак ротора:

$$\operatorname{rot} \mu_a \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (17.17)$$

В (17.17) вместо \vec{B} подставим $\operatorname{rot} \vec{A}$, будем иметь

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (17.18)$$

Операция взятия ротора от ротора есть по сути дела операция раскрытия двойного векторного произведения и выполняется так:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} [\nabla [\nabla \vec{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (17.19)$$

Из курса математики известно, что двойное векторное произведение раскрывается следующим образом:

$$[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}).$$

В нашем случае роль векторов \vec{a} и \vec{b} играет оператор ∇ , а роль вектора \vec{c} играет вектор-потенциал \vec{A} . Таким образом, $[\nabla [\nabla \vec{A}]] = \nabla (\nabla \vec{A}) - \vec{A} (\nabla \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$.

До сих пор к вектору-потенциалу никаких дополнительных требований не предъявлялось, если не считать того, что он должен быть функцией, имеющей пространственные производные. Так как \vec{A} есть расчетная функция, то в магнитном поле постоянного тока ее можно подчинить требованию

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (17.20)$$

Это требование означает, что линии вектора \vec{A} есть замкнутые сами на себя линии. С учетом (17.20) уравнение (17.19) приобретает вид

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (17.21)$$

Равенство (17.21) есть уравнение Пуассона. В отличие от уравнения (15.26), которое составлено относительно скалярной величины φ , оно составлено относительно векторной величины. Вместо \vec{A} в (17.21) подставим $i\vec{A}_x + j\vec{A}_y + k\vec{A}_z$ и плотность тока заменим на $i\delta_x + j\delta_y + k\delta_z$:

$$\nabla^2 \vec{i} A_x + \nabla^2 \vec{j} A_y + \nabla^2 \vec{k} A_z = -\mu_a \vec{i} \delta_x - \mu_a \vec{j} \delta_y - \mu_a \vec{k} \delta_z.$$

Последнее уравнение разбивается на три уравнения, составленные относительно скалярных величин A_x , A_y , A_z :

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \delta_x;$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_a \delta_y;$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_a \delta_z.$$

Общее решение их по аналогии с решением уравнения (15.26) записывают так:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{R}, \quad (17.22a)$$

$$A_y = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y dV}{R}; \quad (17.22б)$$

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z dV}{R}. \quad (17.22в)$$

Если (17.22a) умножить на \vec{i} , (17.22б) — на \vec{j} и (17.22в) — на \vec{k} и сложить, то получим

$$\vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{i} \delta_x + \vec{j} \delta_y + \vec{k} \delta_z) dV}{R},$$

или

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} dV}{R}. \quad (17.23)$$

Единицей измерения для A является *в·сек/м*.

Формула (17.23) дает общее решение уравнения (17.21). Вектор-потенциал в любой точке поля может быть определен путем вычисления объемного интеграла (17.23). Объемный интеграл должен быть взят по всем областям, занятым током.

Несмотря на то что формула (17.23) дает общее решение, пользоваться ею в дальнейшем будем относительно редко ввиду того, что взятие интеграла правой части формулы сопряжено обычно со значительными математическими выкладками.

§ 17.14. ВЫРАЖЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА ЧЕРЕЗ ЦИРКУЛЯЦИЮ ВЕКТОРА-ПОТЕНЦИАЛА

Магнитный поток, пронизывающий какую-либо поверхность s ,

$$\Phi = \int_s \vec{B} \vec{ds}. \quad (17.24)$$

Так как $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, то $\Phi = \int_s \text{rot } \vec{A} \vec{ds}$.

На основании теоремы Стокса поверхностный интеграл может быть преобразован в линейный:

$$\oint_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s} = \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (17.25)$$

Таким образом,

$$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (17.26)$$

Другими словами, для определения магнитного потока, пронизывающего некоторую площадь (поверхность) s , необходимо подсчитать циркуляцию вектора потенциала по замкнутому контуру, на который опирается поверхность s .

Если к плоскому контуру на границе раздела двух сред (подробно изображенному на рис. 17.5, б и у которого размер $np \rightarrow 0$) применить (17.26) и учесть, что поток через этот контур равен нулю, то получим граничные условия для \vec{A} : $A_{1t} = A_{2t}$.

Определение потока по (17.26) часто имеет преимущества по сравнению с определением потока через магнитную индукцию по (17.24). Соотношением (17.24) можно пользоваться в том случае, когда известно значение B в любой точке поверхности s , тогда как для вычисления потока с помощью соотношения (17.26) достаточно знать значение \vec{A} на контуре и не требуется знание \vec{A} в точках внутри контура.

Переход от $\oint_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s}$ к интегралу $\oint \vec{A} d\vec{l}$ можно пояснить следующим образом.

Разобьем площадь s на элементарные площадки (рис. 17.7). Заменим интеграл суммой и под интегралом вместо $\text{rot } \vec{A}$ подставим в соответствии с определением ротора $\oint \frac{\vec{A} d\vec{l}}{\Delta s}$ (предел опущен), тогда

$$\oint_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s} \approx \sum \oint \frac{\vec{A} d\vec{l}}{\Delta s} \Delta s \approx \sum \oint \vec{A} d\vec{l}.$$

Таким образом, для вычисления $\oint_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s}$ необходимо найти составляющие циркуляции вектора \vec{A} по контурам всех элементарных площадок и затем сложить их. Так как при составлении циркуляции обход участков, являющихся смежными между какими-либо двумя соседними площадками, совершается дважды и притом в противоположных направлениях, то составляющие циркуляции на всех смежных участках взаимно уничтожаются и остается циркуляция только по периферийному контуру mpq :

$$\sum \oint \vec{A} d\vec{l} = \oint_{\text{по контуру } mpq} \vec{A} d\vec{l}.$$

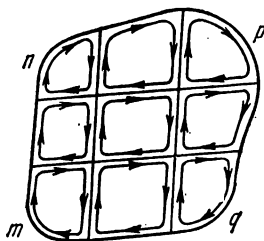


Рис. 17.7

§ 17.15. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕМЕНТА ТОКА

Определим величину и направление составляющей векторного потенциала \vec{A} , создаваемой током i , протекающим по элементу линейного проводника длиной dl . Пусть расстояние от элемента тока до

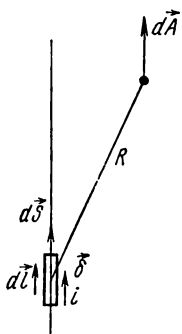


Рис. 17.8

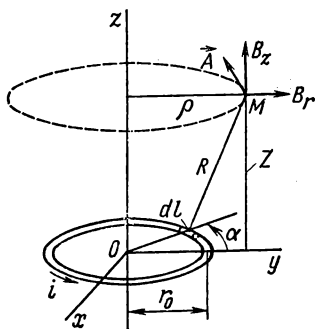


Рис. 17.9

произвольной точки пространства обозначено через R (рис. 17.8) ($R \gg dl$). В соответствии с общим выражением

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{s} dV}{4\pi R}, \text{ но } \vec{s} dV = \vec{s} ds d\vec{l} = i d\vec{l},$$

где ds — площадь поперечного сечения проводника.

Следовательно,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a i d\vec{l}}{4\pi R}. \quad (17.27)$$

Составляющая векторного потенциала от элемента тока имеет такое же направление в пространстве, как и ток в элементе проводника.

Пример 201 а: Вывести формулы для определения \vec{A} и \vec{B} в поле кругового витка рис. 17.9 радиусом r_0 с током i , находящегося в плоскости $хоу$.

Решение. От элемента тока $i d\vec{l}$ (он составляет угол α с осью y) в произвольной точке M , удаленной от оси z на расстояние ρ и на Z от плоскости $хоу$, если полагать, что расстояние R велико по сравнению с линейными размерами поперечного сечения проводника, составляющая векторного потенциала определится формулой (17.27). Полное значение

$$\vec{A} = \frac{\mu_a i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R}.$$

Разложив $d\vec{l}$ на две проекции: $dl_1 = dl \sin \alpha$ и $dl_2 = dl \cos \alpha$ и учитывая, что $dl = r_0 d\alpha$ и что синус — функция нечетная, а косинус — четная, убеждаемся в наличии у \vec{A} только α -компоненты:

$$\vec{A} = \vec{\alpha}_0 A_\alpha = \vec{\alpha}_0 \frac{\mu_a i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos \alpha d\alpha}{R};$$

$$R = (Z^2 + r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos \alpha)^{1/2},$$

$$A_\alpha = \frac{\mu_a i}{\pi k} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{1/2} [(1 - 0,5k^2) K - N].$$

Здесь K и N — полные эллиптические интегралы первого и второго рода — функции табулированные:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2a + 9a^2 + 50a^3 + \frac{1225}{4}a^4 + \dots \right);$$

$$N = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2} d\beta = \frac{\pi}{2} \left(1 - 2a - 3a^2 - 10a^3 - \frac{175}{4}a^4 - \dots \right),$$

где $k^2 = \frac{4\rho r_0}{(r_0 + \rho)^2 + Z^2}$; $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$; $a = \frac{k^2}{8}$.

На основании формулы (17.16) и формул (17.7), заменив в них H на A и опустив выкладки, получаем проекции индукции \vec{B} в точке M на оси α , r , z цилиндрической системы координат:

$$B_\alpha = 0;$$

$$B_r = \frac{i\mu_a}{2\pi\rho} \cdot \frac{Z}{[(r_0 + \rho)^2 + Z^2]^{1/2}} \left[-K + \frac{r_0^2 + \rho^2 + Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} \cdot N \right];$$

$$B_z = \frac{i\mu_a}{2\pi [(r_0 + \rho)^2 + Z^2]^{1/2}} \left[K + \frac{r_0^2 - \rho^2 - Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} \cdot N \right].$$

§ 17.16. ВЗАИМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО (ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО) И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Между картиной электростатического поля и картиной магнитного поля постоянного тока в областях, не занятых током, может быть соответствие двух типов.

Первый тип соответствия — когда одинаково распределение линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле. В этом случае картина магнитного поля (сетка поля) подобна картине соответствующего электростатического. Отличие состоит лишь в том, что силовым линиям электростатического поля отвечают эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалам электростатического поля соответствуют силовые линии магнитного.

В качестве примера на рис. 17.10, а изображена картина электрического поля, образованного уединенным линейным зарядом $+\tau$, а на рис. 17.10, б — картина магнитного поля уединенного проводника с током (для области вне проводника).

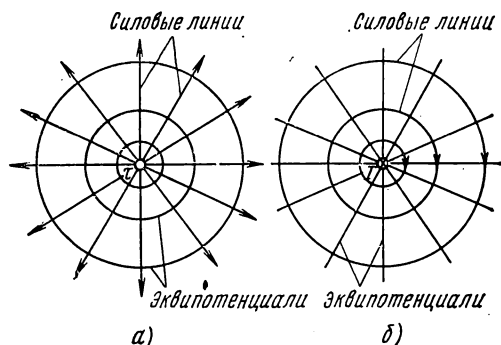


Рис. 17.10

Второй тип соответствия — когда одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом поле и в магнитном поле постоянного тока. В этом случае картина поля оказывается совершенно одинаковой.

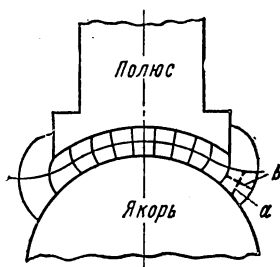


Рис. 17.11

Соответствие второго типа показано на рис. 17.11. На нем изображена картина магнитного поля в воздушном промежутке между полюсом и якорем машины постоянного тока (обмотки не показаны). Если допустить, что полюс и якорь этой машины используются в качестве электродов некоторого конденсатора, то картина электрического поля в воздушном промежутке между электродами соответствовала бы картине магнитного поля —

в обоих случаях силовые линии выходили бы из полюса и входили бы в якорь нормально к поверхности полюса и якоря.

§ 17.17. ЗАДАЧИ НА РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим кратко типы задач на расчет магнитных полей.

Первый тип задач — определение индуктивности какого-либо контура или взаимоиндуктивности двух контуров.

Второй тип задач — определение сил, действующих в магнитном поле на движущийся электрон, на неподвижный проводник с током, на ферромагнитные массы в магнитном поле.

Третий тип задач — расчет магнитных экранов. Магнитными экранами называют устройства, предназначенные для ослабления магнитного поля в заданной области пространства по сравнению с магнитным полем вне экрана. К магнитной экранировке прибегают, например, для защиты чувствительных приборов от влияния посторонних магнитных полей, в частности от влияния магнитного поля земли.

Четвертый тип задач — нахождение распределения токов в некотором объеме для получения заданной картины магнитного поля. Так, например, в морском деле большое значение имеет дегауссировка кораблей: корабль, обладая большой ферромагнитной массой, возмущает магнитное поле земли не только в непосредственной близости от себя, но и на достаточно большом удалении. Соответствующие индикаторы на возмущение магнитного поля земли могут привести в действие находящиеся поблизости самодвижущиеся мины (имеются в виду условия военного времени), и в результате корабль может оказаться подорванным. Чтобы этого не случилось, на кораблях устанавливают специальные намагничивающие обмотки, которые располагают таким образом, чтобы скомпенсировать возмущение магнитного поля земли вблизи корабля.

Много различных задач на расчет магнитных полей возникает при магнитной записи звука, а также при магнитной дефектоскопии.

Магнитная дефектоскопия позволяет по картине магнитного поля судить о наличии раковин, трещин и других дефектов в изделиях из ферромагнитных материалов. Широко распространена она на железнодорожном транспорте при контроле целостности рельсов железнодорожного пути.

§ 17.18. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА И ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Методы расчета и исследования магнитных полей можно подразделить на три группы: аналитическую, графическую и экспериментальную.

Аналитическая группа объединяет все чисто аналитического порядка приемы интегрирования уравнения Пуассона (для областей, занятых током), интегрирование уравнения Лапласа (для областей, не занятых током), применение метода зеркальных изображений, метода конформных отображений и др.

В силу трудностей математического характера классические аналитические методы позволяют решать относительно небольшой круг задач.

В тех случаях, когда расчет поля аналитическими методами вызывает затруднения, прибегают к графическому методу построения картины поля или к исследованию магнитного поля на модели. Графические методы построения картины поля применимы к двумерным безвихревым полям.

За последние годы был развит метод интегральных уравнений (см. приложение О). Этот метод, предполагающий использование ЭВМ, значительно расширяет круг решаемых задач.

§ 17.19. ОПЫТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАРТИНЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Опытное исследование картины магнитного поля производят различными методами.

Первый метод основан на явлении электромагнитной индукции и состоит в следующем. Плоскую очень малых размеров рамку с намотанной на нее обмоткой помещают в исследуемую область поля и соединяют с баллистическим гальванометром. При коммутации тока в обмотках аппарата или машины, поле в воздушном зазоре которого исследуется, или при быстром удалении рамки в область, где магнитное поле заведомо слабое (в последнем случае ток в обмотках не переключается), измеряют количество электричества, протекшее по баллистическому гальванометру, и по нему судят о среднем значении индукции в рамке. Затем рамку помещают в другую точку поля и снова определяют индукцию и т. д. Этот метод дает возможность исследовать магнитные поля практически любой конфигурации в пространстве вне ферромагнетиков.

Второй метод исследования безвихревого поля — метод моделирования полями тока в проводящей среде — основан на аналогии между

полем в проводящей среде и магнитным безвихревым полем. Он состоит в следующем. Для снятия картины плоскопараллельного поля в воздушном зазоре какого-либо аппарата или машины из листа металла (например, из стального листа) изготовляют увеличенную модель исследуемого участка поля. Так, на рис. 17.12 изображена модель для исследования поля рассеяния между полюсами машины постоянного тока. Так как м. д. с. распределена вдоль полюса, то подвод тока к краю полюса производится от нескольких припаянных к листу проводов. Токи в них могут регулироваться и этим может задаваться закон распределения м. д. с. по высоте полюса. Отвод тока от линии *mn*, являющейся эквипотенциальной, производится с помощью массивной проводящей колодки (подробнее см. [68]).

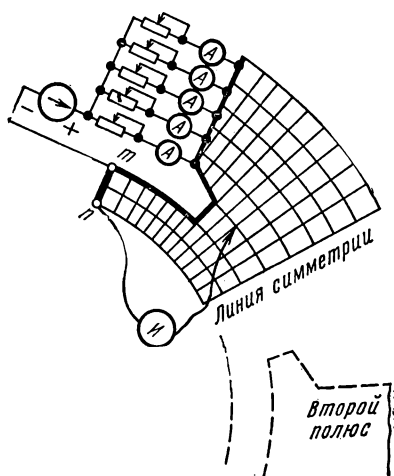


Рис. 17.12

Шуп и индикатор *И* служат для построения эквипотенциалей в поле проводящей среды.

Шуп и индикатор *И* служат для построения эквипотенциалей в поле проводящей среды.

Качественное исследование магнитного поля часто производят с помощью стальных опилок. Опилки насыпают на плоский лист из не-

ферромагнитного материала, помещают в магнитное поле и слегка по листу постукивают. Опилки расположатся вдоль силовых линий. По густоте силовых линий можно качественно судить об интенсивности магнитного поля.

Вместо опилок нередко используют мельчайшие порошки окислов железа, находящихся во взвешенном состоянии в какой-либо жидкости, например керосине. Этот способ широко применяют при магнитной дефектоскопии изделий из ферромагнитных материалов.

§ 17.20. ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ КАРТИНЫ ПОЛЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПО НЕЙ МАГНИТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим методику графического построения картины плоскопараллельного магнитного поля на конкретном примере.

На рис. 17.11 изображены полюс и якорь машины постоянного тока. Размер, перпендикулярный рисунку, принят достаточно большим — только при этом условии поле можно считать плоскопараллельным.

Так как магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости воздуха, то магнитные силовые линии практически перпендикулярны поверхности полюса и якоря. Следовательно, поверхности полюса и якоря являются эквипотенциальными. Построение семейства силовых и эквипотенциальных линий производят «на

глаз», руководствуясь следующим: силовые линии должны быть перпендикулярны поверхностям полюса и якоря и должны быть так расположены по отношению друг к другу, чтобы после проведения эквипотенциалей образовались криволинейные квадраты, для которых *отношение* средней ширины квадрата b к средней длине квадрата a было приблизительно одинаково для всех квадратов. При первом построении это, возможно, не удастся сделать достаточно хорошо, но после нескольких попыток, особенно при наличии некоторого навыка и с учетом симметрии в поле (если она имеется), удастся построить сетку поля так, что

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots$$

При этом потоки во всех силовых трубках одинаковы. Это облегчает подсчет магнитного сопротивления.

Пусть число криволинейных квадратов (прямоугольников) в силовой трубке равно n , а число трубок m (для рис. 17.11 $n = 2$ и $m = 11$).

Магнитное напряжение между полюсом и якорем

$$U_m = \int \vec{H} d\vec{l} \approx H_1 a_1 + H_2 a_2 + H_3 a_3 + \dots = \sum_{k=1}^n H_k a_k.$$

В свою очередь поток в одной силовой трубке

$$\Delta\Phi = l b_1 \mu_a H_1 = l b_2 \mu_a H_2 = \dots,$$

где l — размер в направлении, перпендикулярном чертежу;

μ_a — магнитная проницаемость воздуха (равна μ_0).

Следовательно,

$$H_1 = \frac{\Delta\Phi}{l b_1 \mu_a}, \quad H_2 = \frac{\Delta\Phi}{l b_2 \mu_a} \text{ и т. д.}$$

Магнитное напряжение

$$U_m = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots \right).$$

По построению все слагаемые $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \text{ и т. д.} \right)$ одинаковы. Число слагаемых равно n . Поэтому

$$U_m = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \frac{a}{b} n.$$

Отсюда

$$\Delta\Phi = \frac{U_m \mu_a l b}{n a}.$$

Поскольку для всех квадратов $\frac{b}{a} \approx \text{const}$, то построения оказались осуществлены так, что потоки $\Delta\Phi$ во всех силовых трубках одинаковы.

Полный поток с якоря на полюс равен

$$\Phi = m \Delta\Phi = U_m \mu_a l \frac{b}{a} \frac{m}{n},$$

где m — число силовых трубок.

Магнитное сопротивление

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} = \frac{an}{\mu_a l b m}. \quad (17.28)$$

Магнитная проводимость

$$G_m = \frac{\mu_a l b m}{an}. \quad (17.29)$$

Графический метод построения картины поля применяют *не только* для расчета магнитных полей, но и для других безвихревых полей: для расчета электростатического поля и поля постоянного тока в проводящей среде. Так, электрическую проводимость G между двумя телами определяют по формуле (17.30), которую получают из формулы (17.29), если μ_a заменить на γ :

$$G = \frac{\gamma l b m}{an}. \quad (17.30)$$

Емкость между двумя телами в плоскопараллельном поле

$$C = \frac{\epsilon_a l b m}{an}. \quad (17.31)$$

§ 17.21. МАГНИТНОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

Положим, что в равномерном магнитном поле напряженностью H_0 надо заэкранировать некоторую область пространства, например цилиндрическую, так, чтобы напряженность поля в ней была во много раз меньше, чем напряженность внешнего поля.

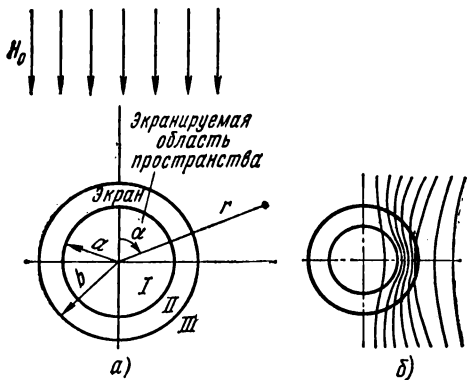


Рис. 17.13

Цилиндрический экран внутренним радиусом a , наружным b имеет относительную магнитную проницаемость μ_2 (рис. 17.13, а). Внутреннюю область обозначим I , область тела экрана — II , область снаружи экрана — III .

В областях I и III относительная магнитная проницаемость равна единице. Так как во всех трех областях нет тока, то магнитное поле в них описывается уравнением Лапласа $\nabla^2 \varphi_m = 0$. Экран будем полагать достаточно протяженным вдоль оси z (ось z перпендикулярна чертежу); φ_m зависит только от координат r и α цилиндрической системы. Раскроем уравнение $\nabla^2 \varphi_m = 0$ в цилиндрической системе:

$$\nabla^2 \varphi_m = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_m}{r^2 \partial \alpha^2} = 0.$$

Решение его методом Фурье — Бернулли (см. раздел электростатики) дает:

для первой области

$$\varphi_M^I = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \alpha;$$

для второй области

$$\varphi_M^{II} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \alpha;$$

для третьей области

$$\varphi_M^{III} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos \alpha.$$

Постоянная интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал, принята здесь равной нулю.

Для определения шести постоянных (C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 и C_6) составим 6 уравнений.

1. Сопоставим φ_M^{III} с выражением «на бесконечности» $\varphi_M = H_0 r \cos \alpha$. Из сопоставления находим, что $C_5 = H_0$.

2. В первой области при $r = 0$ φ_M должен оставаться конечным. Это может быть только в том случае, если в выражении будет отсутствовать слагаемое $\frac{C_2}{r}$. Оно будет отсутствовать при $C_2 = 0$.

3. Равенство φ_M^I и φ_M^{II} при $r = a$ дает уравнение

$$C_1 a = C_3 a + \frac{C_4}{a}.$$

Нетрудно убедиться в том, что условие непрерывности потенциала эквивалентно условию равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела при $r = a$. Действительно *,

$$H_\alpha = - \frac{\partial \varphi_M}{r \partial \alpha}.$$

Следовательно,

$$H_\alpha^I = - C_1 \sin \alpha$$

и

$$H_\alpha^{II} = - \sin \alpha \left(C_3 + \frac{C_4}{a^2} \right).$$

Таким образом,

$$C_1 = C_3 + \frac{C_4}{a^2}.$$

Последнее уравнение совпадает с полученным ранее.

4. Равенство φ_M на границе между второй и третьей (при $r = b$) областями приводит к уравнению

$$C_5 b + \frac{C_6}{b} = C_3 b + \frac{C_4}{b}.$$

* Напомним, что $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$. Формулы, позволяющие определить H_α и H_r через φ_M , следуют из соотношения (15.9) на стр. 528.

5. Равенство нормальных составляющих индукции

$$B_r = -\mu_a \frac{\partial \varphi_m}{\partial r}$$

на границе между первой и второй областями (при $r = a$)

$$C_1 = \left(C_3 - \frac{C_4}{a^2} \right) \mu_2.$$

6. Равенство нормальных составляющих индукции при $r = b$ дает уравнение

$$C_5 - \frac{C_6}{b^2} = \left(C_3 - \frac{C_4}{b^2} \right) \mu_2.$$

Совместное решение всех уравнений приводит к выражению потенциала в первой области

$$\varphi_m^I = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos \alpha,$$

или при переходе к декартовой системе координат (ось x направлена вверх, $x = r \cos \alpha$)

$$\varphi_m^I = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x. \quad (17.32)$$

Здесь

$$q = \frac{2\mu_2}{(1+\mu_2)^2} \approx \frac{2}{\mu_2}, \quad \Delta = b^2 - \beta^2 a^2, \quad \beta = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} \approx 1.$$

Напряженность поля в первой области (по модулю)

$$H^I = \frac{\partial \varphi_m^I}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \quad (17.33)$$

Отношение напряженности поля внутри экрана к напряженности внешнего поля H_0 :

$$\frac{H^I}{H_0} = \frac{2qb^2}{\Delta} \approx \frac{4}{\mu_2} \frac{b^2}{b^2 - a^2}. \quad (17.34)$$

Формула (17.34) приближенна (принято $\beta = 1$ и $q = \frac{2}{\mu_2}$). Из нее можно заключить, что чем больше μ_2 и чем толще стенка экрана, тем сильнее экранирующее действие его.

На рис. 17.13, б качественно показана картина линий магнитной индукции при наличии экрана. Из рисунка видно, что силовые линии магнитного поля в большинстве стремятся пройти по стенкам экрана и лишь небольшая часть их заходит в экранируемую область.

Пример 202. $\mu_2 = 10^4$; $a = 5$ см; $b = 5,5$ см. Найти отношение $\frac{H^I}{H_0}$.

Решение.

$$\frac{H^I}{H_0} = \frac{4}{10^4} \frac{5,5^2}{5,5^2 - 5^2} = 0,0023,$$

т. е. напряженность поля внутри экрана составляет всего 0,23 % от напряженности H_0 .

Без вывода запишем формулу для определения отношения напряженности поля внутри сферического экрана H^1 к напряженности равномерного поля H_0 , в котором помещен экран, полагая, что внутренний радиус экрана R_1 , наружный R_2 и что экран имеет относительную магнитную проницаемость $\mu_2 \gg 1$, а снаружи экрана $\mu_a = \mu_0$:

$$\frac{H^1}{H_0} \cong \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \mu_2 \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)}.$$

§ 17.22. ЭЛЛИПСОИД ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Поместим в однородное магнитное поле напряженностью H_e ферромагнитный эллипсоид относительной магнитной проницаемостью μ . Поле в нем будет однородным. Напряженность поля в эллипсоиде H_i может быть определена на основании принципа наложения как разность внешнего поля H_e и напряженности поля расчетных магнитных зарядов на поверхности эллипсоида, равной NJ (подобно тому как в поляризованном диэлектрике поверхностная плотность заряда равна вектору поляризации P — см. § 15.13):

$$H_i = H_e - NJ, \quad (17.35)$$

где N — некоторый коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом размагничивания.

Оси эллипсоида обозначим a, b, c . Вдоль направления каждой оси свой коэффициент: N_a — вдоль оси a ; N_b — вдоль оси b ; N_c — вдоль оси c . Между ними имеет место зависимость $N_a + N_b + N_c = 1$. Для шара $N_a = N_b = N_c = \frac{1}{3}$.

Положим, что H_e направлена вдоль оси a , а размеры осей b и c одинаковы, тогда

$$H_i = H_e - N_a J. \quad (17.35')$$

Но из соотношения $B = \mu_0 (H + J) = \mu_0 \mu H_i$ следует, что

$$J = (\mu - 1) H_i. \quad (17.36)$$

Подставим (17.36) в (17.35'):

$$H_i = \frac{H_e}{1 + (\mu - 1) N_a}. \quad (17.37)$$

Когда ось a эллипсоида расположена вдоль внешнего поля,

$$N_a = \frac{1 - m^2}{m^2} \left(\frac{1}{2m} \ln \frac{1 + m}{1 - m} - 1 \right),$$

где $m = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$

Когда ось эллипсоида a расположена перпендикулярно внешнему полю,

$$N_a = \frac{1 + n^2}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n} \operatorname{arctg} n \right),$$

где $n = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}.$

Вывод формул N_a дан, например, в [8].

§ 17.23. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для расчета магнитных полей, создаваемых линейными токами, протекающими вблизи стальных масс, широко применяют метод зеркальных изображений. Допустим, что в воздухе или в какой-либо

другой среде с магнитной проницаемостью μ_1 параллельно плоскости раздела сред проходит провод с током I_1 (рис. 17.14, а).

Вторая среда пусть имеет магнитную проницаемость μ_2 . Требуется найти напряженность поля в любой точке первой и второй сред. С этой целью вводят в расчет фиктивные или расчетные токи I_2 и I_3 . Провод с током I_2 помещают зеркально по отношению к проводу с заданным током I_1 , а провод с током I_3 помещают там, где расположен провод с током I_1 .

Двумя пока неизвестными токами I_2 и I_3 распорядимся таким образом, чтобы удовлетворить двум граничным условиям на границе раздела сред.

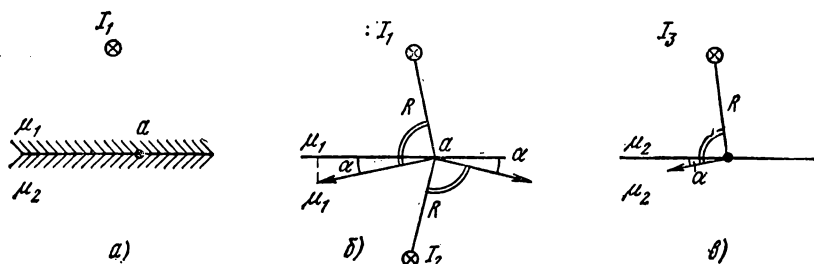


Рис. 17.14

Поле в верхнем полупространстве (там, где расположен ток I_1 рис. 17.14, б) определится от двух токов: от заданного I_1 и от фиктивного I_2 , причем и верхнее и нижнее полупространства при этом заполняет среда с магнитной проницаемостью μ_1 . Поле в любой точке *нижней полуплоскости* определится током I_3 , а верхнее и нижнее пространства имеют $\mu = \mu_2$ (рис. 17.14, в). Составим уравнения для определения токов I_2 и I_3 . Если взять произвольную точку a на границе раздела сред, то ее можно считать принадлежащей как первой, так и второй средам. Если считать ее принадлежащей первой среде, то тангенциальная составляющая напряженности поля в ней будет соответствовать левой части уравнения (17.38'), а если второй среде, то тангенциальная составляющая напряженности поля в ней — правой части (17.38'):

$$\left(\frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2\pi R} \right) \cos \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \cos \alpha. \quad (17.38')$$

Отсюда получаем первую связь между токами:

$$I_1 - I_2 = I_3.$$

Для получения второй связи составим уравнение, выражающее собой равенство нормальных составляющих магнитной индукции в произвольной точке a на границе раздела:

$$\left(\frac{I_2}{2\pi R} + \frac{I_1}{2\pi R} \right) \mu_1 \sin \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \mu_2 \sin \alpha,$$

7. е.

$$I_1 + I_2 = I_3 \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (17.38'')$$

Совместное решение дает:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1; \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1.$$

Пример 203. Найти напряженности поля в точках m и n (рис. 17.15, а). Геометрические размеры в сантиметрах даны на ри-

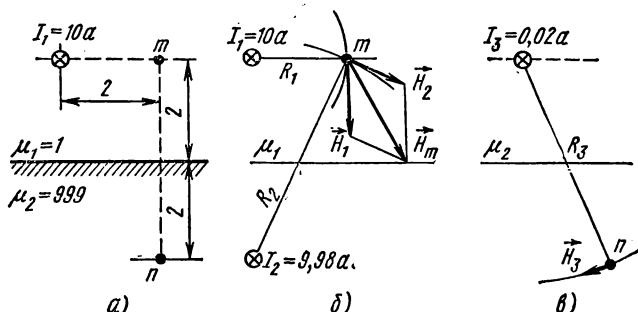


Рис. 17.15

сунке. Относительные магнитные проницаемости $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 999$; $I_1 = 10$ а.

Решение. По формулам § 17.23 находим:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1 = 9,98 \text{ а}; \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1 = 0,02 \text{ а}.$$

Для определения напряженности поля в точке m , расположенной в том же полупространстве (среде), что и ток I_1 , служит рис. 17.15, б:

$$\vec{H}_m = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

По закону полного тока,

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 0,02} = 79,5 \text{ а/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9,98}{2\pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 35,4 \text{ а/м}.$$

Графическим путем находим $H_m = 101$ а/м. Напряженность поля в точке n (рис. 17.15, в)

$$H_3 = H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0,02}{2\pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 0,0715 \text{ а/м}.$$

На рис. 17.16, а качественно изображена картина линий магнитной индукции B для случая, когда провод с током проходит в воздухе параллельно поверхности стальной плиты; на рис. 17.16, б — когда провод с током проходит через узкий канал в стальной плите параллельно поверхности плиты.

Пример 204. По весьма длинному биметаллическому проводу (рис. 17.17) протекает постоянный ток I . Радиус внутренней жилы r_1 , наружного слоя r_2 . Проводимость внутренней жилы γ_1 , наружного слоя γ_2 . Определить закон изменения векторного потенциала \vec{A} и магнитной индукции внутри провода (во внутренней I и наружной II областях и вне провода — область III).

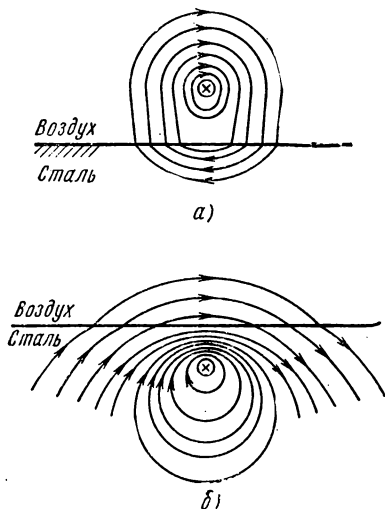


Рис. 17.16

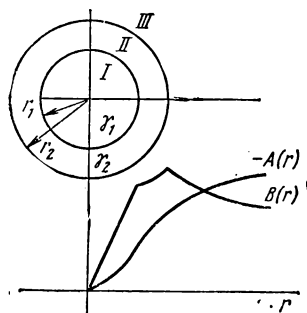


Рис. 17.17

Решение. Определим плотности тока в первой δ_1 и во второй δ_2 областях.

Так как $E_{1r} = E_{2r}$, то $\frac{\delta_1}{\gamma_1} = \frac{\delta_2}{\gamma_2}$. Кроме того,

$$\delta_1 \pi r_1^2 + \delta_2 (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = I.$$

Следовательно,

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi r_1^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \delta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

При раскрытии выражения $\nabla^2 \vec{A}$ в цилиндрической системе координат учтем, что в данной задаче \vec{A} имеет только одну составляющую $\vec{A} = \vec{z}^0 A_z = \vec{z}^0 A$, направленную по оси провода (по оси z), и эта составляющая зависит только от r :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = \begin{cases} -\mu_{1a} \delta_1 & \text{для первой области;} \\ -\mu_{2a} \delta_2 & \text{для второй области;} \\ 0 & \text{для третьей области.} \end{cases}$$

Двукратное интегрирование по r дает:

$$A_I = -\frac{\mu_{1a} \delta_1 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2;$$

$$A_{II} = -\frac{\mu_{2a} \delta_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4;$$

$$A_{III} = C_5 \ln r + C_6.$$

Слагаемое $C_1 \ln r$ должно отсутствовать, так как A не может принимать бесконечно больших значений при $r = 0$; отсюда следует, что $C_1 = 0$.

Вектор-потенциал определяется с точностью до постоянной. Примем эту постоянную равной нулю: $C_2 = 0$. При этом на оси провода $A = 0$. Из граничных условий составим уравнения для определения оставшихся четырех постоянных:

1. При $r = r_1$ $A_I = A_{II}$, следовательно,

$$-\frac{\mu_{1a}\delta_1 r_1^2}{4} = -\frac{\mu_{2a}\delta_2 r_1^2}{4} + C_3 \ln r_1 + C_4.$$

2. При $r = r_2$ $A_{II} = A_{III}$, т. е.

$$-\frac{\mu_{2a}\delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 = C_5 \ln r_2 + C_6.$$

3. При $r = r_1$ $H_{1t} = H_{2t}$ или $-\frac{1}{\mu_{1a}} \frac{dA_I}{dr} = -\frac{1}{\mu_{2a}} \frac{dA_{II}}{dr}$, т. е.

$$\frac{\delta_1 r_1}{2} = \frac{\delta_2 r_1}{2} - \frac{C_3}{\mu_{2a} r_1}.$$

4. При $r = r_2$ должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$\frac{\delta_2 r_2}{2} - \frac{C_3}{\mu_{2a} r_2} = -\frac{C_6}{\mu_{3a} r_2}.$$

Имеем:

$$C_3 = \frac{\mu_{2a} r_1^2}{2} (\delta_2 - \delta_1);$$

$$-C_5 = \frac{\delta_2 (r_2^2 - r_1^2) + \delta_1 r_1^2}{2} \mu_{3a};$$

$$C_4 = -\frac{\mu_{1a}\delta_1 r_1^2}{4} + \frac{\mu_{2a}\delta_2 r_1^2}{4} - C_3 \ln r_1;$$

$$C_6 = -\frac{\mu_{2a}\delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 - C_5 \ln r_2.$$

На рис. 17.17 одна кривая характеризует изменение $A = f(r)$, другая — изменение $B = f(r)$ при $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{5,7}{3,5}$ и $\mu_{1a} = \mu_{2a} = \mu_{3a}$.

Пример 205. Воспользоваться выражением $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}$ и данными примера 204 и найти магнитный поток, пронизывающий биметаллический провод примера 204 на длине $l = 1$ м.

Решение. Разобьем путь интегрирования $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}$ на четыре участка: первый участок — от точки 1 до точки 2 (рис. 17.18, а); второй — от 2 до 3; третий — от 3 до 4; четвертый — от 4 до 1. В соответствии с этим

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{A} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{A} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{A} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{A} d\vec{l}.$$

$\int_1^2 \vec{A} d\vec{l}$ равен нулю, так как значение \vec{A} при $r = 0$ равно нулю.

На втором и четвертом участках $\int \vec{A} d\vec{l}$ также равен нулю, так как угол между \vec{A} и $d\vec{l}$ равен $\pm 90^\circ$, а $\cos 90^\circ = 0$. $\int \vec{A} d\vec{l}$ не равен нулю только на третьем участке, где

$$A = -\frac{\mu_a \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4,$$

а угол между \vec{A} и $d\vec{l}$ равен 180° ($\cos 180^\circ = -1$). Поэтому

$$\Phi = \int_{r=r_2}^4 \vec{A} d\vec{l} = -A \cdot 1.$$

Пример 206. Воспользоваться построениями рис. 17.11 и определить магнитную проводимость воздушного зазора между полюсом и якорем машины постоянного тока на единицу длины якоря (1 м).

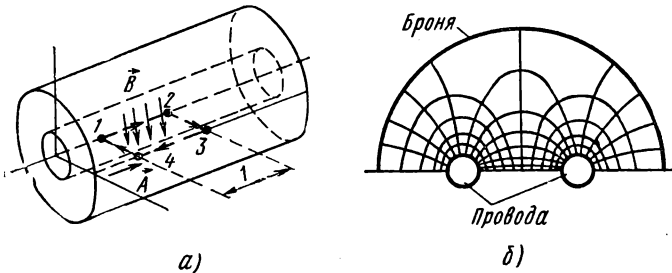


Рис. 17.18

Решение. В соответствии с рис. 17.11 $n = 2$ и $m = 11$; $\frac{b}{a} = 0,9$. По формуле (17.29),

$$G_m = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 0,9 \cdot 11}{2} = 6,23 \cdot 10^{-6} \text{ гн.}$$

Пример 207. Определить емкость и индуктивность на 1 м длины кабельной двухпроводной линии с цилиндрической проводящей броней. Картина поля в сечении кабельной линии дана на рис. 17.18, б ($\epsilon = 2,5$).

Решение. Изображенная на рис. 17.18, б картина поля справедлива и для электрического и для магнитного полей. Причем, согласно § 17.20, силовым линиям электрического поля соответствуют эквипотенциали магнитного поля.

Число силовых трубок электрического поля $m = 10,5 \cdot 2 = 21$. Число ячеек в трубке $n = 10$ (пять от провода до брони, пять от брони до провода). Отношение $\frac{b}{a} \approx 1$. Число силовых трубок магнитного поля $m = 10$, число ячеек в трубке $n = 21$. По формуле (17.31) най-

дем емкость на 1 м длины кабеля ($l = 1$ м):

$$C = \frac{2,5 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21}{10} = 46 \cdot 10^{-12} \text{ ф.}$$

По определению, индуктивность L равна отношению потокосцепления к создающему его току $L = \frac{\Psi}{I}$. В данной задаче имеется всего один виток (прямой и обратный провода). Поэтому потокосцепление Ψ равно потоку Φ между проводами (индуктивностью, обусловленной потокосцеплением в теле проводов, в силу его малости пренебрегаем).

По закону полного тока, ток I может быть заменен на $\oint \vec{H} d\vec{l}$ по замкнутому контуру, окружающему провод. В свою очередь $\oint \vec{H} d\vec{l}$ представляет собой падение магнитного напряжения U_m по этому контуру. Следовательно,

$$L = \frac{\Psi}{I} \approx \frac{\Phi}{\oint \vec{H} d\vec{l}} = \frac{\Phi}{U_m} = G_m.$$

Таким образом, индуктивность L в данном примере равна магнитной проводимости G_m . Для определения последней воспользуемся формулой (17.29) *:

$$G_m = L = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{21} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ гн.}$$

Пример 208. Найти разность скалярных магнитных потенциалов (магнитное напряжение) между точками A и B , расположенными в магнитном поле линейного тока $I = 10$ а (рис. 17.19).

Р е ш е н и е.

$$U_{mAB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{l} = \int_{\text{по пути } AmC} \vec{H} d\vec{l} + \int_{\text{по пути } CnB} \vec{H} d\vec{l};$$

$$\int_{\text{по пути } AmC} \vec{H} d\vec{l} = H \int d\vec{l} = \frac{I}{2\pi R_A} \frac{2\pi R_A}{4} = \frac{I}{4};$$

$$\int_{\text{по пути } CnB} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

так как на этом участке угол между \vec{H} и $d\vec{l}$ равен 90° . Следовательно,

$$U_{mAB} = \frac{I}{4} = 2,5 \text{ а.}$$

Пример 209. В воздухе создано равномерное магнитное поле напряженностью $H_0 = 240$ а/м. В это поле поместили ферромагнитный шарик, относительная магнитная проницаемость которого $\mu_i = 20$. Найти индукцию в шарике.

* При вычислении L по формуле для G_m число ячеек в силовой трубке должно быть взято по замкнутому контуру.

Решение. Воспользуемся аналогией между электростатическим и безвихревым магнитным полями. В формуле (15.69) заменим E_0 на H_0 и ϵ на μ . Получим

$$H_i = H_0 \frac{3\mu_e}{2\mu_e + \mu_i} = 240 \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 + 20} = 32,7 \text{ а/м.}$$

Индукция в шарике

$$B_i = 20 \cdot 32,7 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} = 8,21 \cdot 10^{-4} \text{ тл.}$$

Пример 210. Вдоль трубы с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 (рис. 17.20) протекает постоянный ток I . Вывести формулы для определения напряженности поля H внутренней полости трубы, тела трубы и снаружи трубы.

Решение. Напряженность поля в любой из указанных областей найдем по закону полного тока.

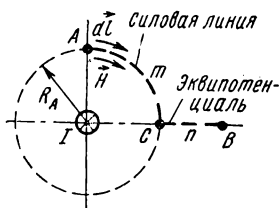


Рис. 17.19

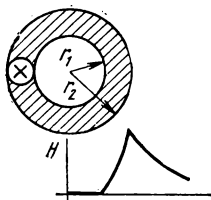


Рис. 17.20

Если провести окружность радиусом $r < r_1$ с центром на оси трубы, то эта окружность не охватит тока. Поэтому при $r \leq r_1$ $H = 0$, т. е. во внутренней полости трубы магнитное поле отсутствует. Плотность тока в трубе

$$\delta = \frac{I}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Окружность радиусом $r_1 \leq r \leq r_2$ охватывает ток $\delta \pi (r^2 - r_1^2)$. Поэтому в этом интервале изменений r

$$H = \frac{I (r^2 - r_1^2)}{2\pi r (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Снаружи трубы при $r \geq r_2$ напряженность поля убывает по гиперболическому закону

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

График $H = f(r)$ изображен на рис. 17.20.

§ 17.24. ЗАКОН БИО—САВАРА—ЛАПЛАСА

Согласно известному из курса физики закону Био — Савара — Лапласа, при отсутствии ферромагнитных сред отрезок линейного провода $d\vec{l}$, по которому течет ток I в направлении $d\vec{l}$, в точке, удален-

пой на расстояние R от элемента тока, создает магнитную индукцию, определяемую следующим образом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^2}, \quad (17.39)$$

где \vec{R}_0 — единичный вектор, проведенный от $d\vec{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция (рис. 17.21). Результирующая индукция в этой точке

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^2}. \quad (17.40)$$

В формуле (17.40) интегрирование производят по всей длине замкнутого контура с током.

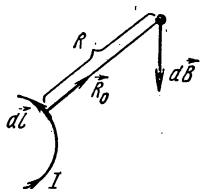


Рис. 17.21

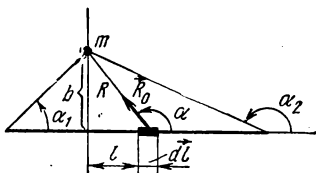


Рис. 17.22

Если в формуле (17.39) ток I как постоянную величину ввести в векторное произведение и заменить $I d\vec{l}$ на $\vec{\delta} dV$, где dV — элемент объема проводника с плотностью тока $\vec{\delta}$, то

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0]}{R^2} dV \quad (17.41)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0]}{R^2} dV. \quad (17.42)$$

Формула (17.41) в литературе встречается под названием *закона Ампера*. В формуле (17.42) интегрирование производят по объему, занятому током.

Обратим внимание на два положения.

1. Структура формул (17.39) и (17.41) в известной мере сходна со структурой формулы для напряженности электрического поля точечного заряда, полученной в § 15.5 из закона Кулона.

2. Полезно сопоставить закон полного тока с законом Био — Савара — Лапласа. Оба эти закона позволяют определять магнитную индукцию, создаваемую током. Однако закон полного тока применим только к замкнутым контурам с токами, тогда как закон Био — Савара — Лапласа применим не только к замкнутым контурам с токами, но и к отрезкам проводников с токами (к элементам тока). Поэтому закон Био — Савара — Лапласа более универсален.

Пример 211. С помощью формулы (17.40) определить магнитную индукцию в точке m , создаваемую отрезком линейного провода с током I (рис. 17.22). Точка m удалена от провода на расстояние b .

Решение. Угол между \vec{dl} и \vec{R}_0 обозначим α . Из геометрических соображений имеем:

$$R = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad l = -b \operatorname{ctg} \alpha.$$

Следовательно,

$$dl = \frac{b da}{\sin^2 \alpha};$$

$$|[\vec{dl} \vec{R}_0]| = dl \cdot 1 \cdot \sin \alpha; \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Вектор \vec{B} направлен к читателю.

Если провод будет бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$, $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 2$ и $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, что совпадает с результатом, получаемым по закону полного тока.

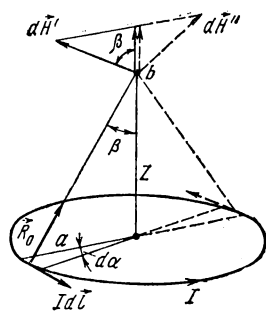


Рис. 17.23

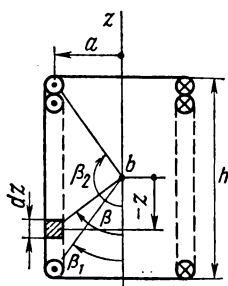


Рис. 17.24

Пример 212. Вывести формулу для определения напряженности магнитного поля на оси кругового витка с током I (рис. 17.23). Радиус витка принять равным a . (Верхний угол β обозначен ошибочно.)

Решение. Выделим элемент тока $I d\vec{l}$. Напряженность поля $d\vec{H}'$, создаваемая этим элементом в точке b на оси витка, находящейся на расстоянии z от плоскости витка, равна

$$\frac{I [\vec{dl} \vec{R}_0]}{4\pi (a^2 + z^2)};$$

напряженность $d\vec{H}'$ перпендикулярна \vec{dl} и \vec{R}_0 . От диаметрально противоположного элемента тока $I d\vec{l}$ в той же точке b будет напряженность $d\vec{H}''$. По модулю $d\vec{H}'$ и $d\vec{H}''$ одинаковы,

При геометрическом суммировании $d\vec{H}'$ и $d\vec{H}''$ будет получен вектор, направленный по оси витка:

$$dl = a d\alpha;$$

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{Ia \sin \beta d\alpha}{4\pi (a^2 + z^2)} = \frac{Ia}{4\pi (a^2 + z^2)} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{Ia^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Пример 212а. Используя решение примера 212, вывести формулу для определения индукции на оси цилиндрической катушки с током I (рис. 17.24). Высота катушки h , средний радиус ее a , число витков w .

Решение. В произвольной точке b на оси от элемента тока dz :

$$dB = \mu_0 \frac{Iw}{h} dz \cdot \frac{a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\cos \beta = \frac{-z}{(a^2 + z^2)^{1/2}}; \quad -d(\cos \beta) = \frac{a^2 dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I w}{2h} d(\cos \beta); \quad B = -\frac{\mu_0 I w}{2h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} d(\cos \beta) = \frac{\mu_0 I w}{2h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

§ 17.25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА КОНТУРА С ТОКОМ ЧЕРЕЗ ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ

На рис. 17.25 изображен контур с током i , который охватывает площадь S . Вертикальная ось расположена перпендикулярно площади. Запишем формулы для магнитного скалярного потенциала (полагая, что на бесконечности $\Phi_m = 0$) и составляющих H_R и H_θ напряженности поля в произвольной точке a , находящейся на расстоянии a от центра площади. Полагаем, что расстояние R значительно больше линейных размеров контура; θ — угол между вертикальной осью и радиусом R .

Воспользуемся аналогией между электростатическим и магнитным безвихревым полями. В примере 192 на стр. 581 были выведены формулы для потенциала Φ и составляющих E_R , E_θ напряженности электрического поля диполя:

$$\Phi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi \epsilon_a R^2}; \quad E_R = \frac{ql \cos \theta}{2\pi \epsilon_a R^3}; \quad E_\theta = \frac{ql \sin \theta}{4\pi \epsilon_a R^3}.$$

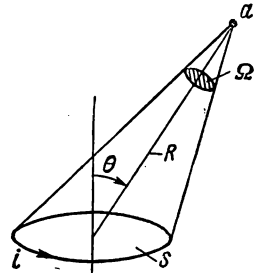


Рис. 17.25

Заменим в этих формулах электрический момент ql на магнитный момент $is\mu_a$, ϵ_a на μ_a , Φ на Φ_m , E_R на H_R , E_θ на H_θ . Учтем, что $\frac{s \cos \theta}{R^2}$ представляет собой телесный угол Ω , под которым площадка s видна из точки наблюдения a . Получим:

$$\Phi_m = \frac{i\Omega}{4\pi} = \frac{is \cos \theta}{4\pi R^2}; \quad H_R = \frac{is \cos \theta}{2\pi R^3}; \quad H_\theta = \frac{is \sin \theta}{4\pi R^3}.$$

Угол θ положителен, если из точки a ток в контуре виден направленным против часовой стрелки,

§ 17.26. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛЕНКИ (ЛЕНТЫ)

Магнитная пленка толщиной в несколько микрон ($2a$ на рис. 17.26) применяется для записи информации (магнитофоны, вычислительные машины). При записи информации пленку намагничивают с помощью записывающей головки либо продольно, когда вектор намагниченности направлен вдоль пленки (рис. 17.26, а), либо поперечно (рис. 17.26, б). После снятия внешнего поля пленка остается намагниченной и потому, что если ее пропустить мимо считывающей головки, то пересечение силовых линий обмоткой считывающей головки будет наводить в ней э. д. с

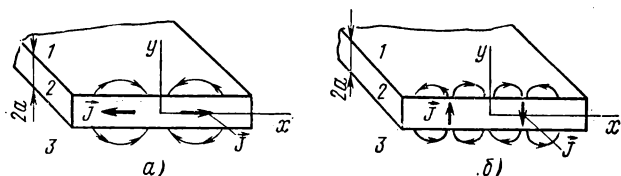


Рис. 17.26

На рис. 17.26, а и б показаны силовые линии. Намагниченность вдоль оси x изменяется. На рисунке область выше пленки обозначена цифрой 1, область самой пленки — 2, область ниже пленки — 3. Области 1 и 3 неферромагнитны, область 2 — ферромагнитная среда.

Во всех областях на рис. 17.26, б поле подчиняется уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi_m = 0$ ($\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$, так как $J_x = 0$, а J_y зависит только от x); $\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m$; $\operatorname{div} \vec{H} = 0$.

Для рис. 17.26, а $\nabla^2 \varphi_m = -\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x}$; $\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m$.

В соответствии с методом Фурье — Бернулли в каждой из областей $\varphi_m = X(x)Y(y)$ (от координаты z поле не зависит).

Задаваясь законом изменения намагниченности, например для рис. 17.26, а в виде $J = J_x = J_0 \sin mx$, а для рис. 17.26, б в виде $J = J_y = J_0 \cos mx$, можно получить решение для φ_m . Так, для рис. 17.26, б:

$$\varphi_m^I = C_1 e^{-my} \cos mx \quad (y \geq a),$$

$$\varphi_m^{II} = (C_2 e^{-my} + C_3 e^{my}) \cos mx \quad (-a \geq y \geq a),$$

$$\varphi_m^{III} = C_4 e^{my} \cos mx \quad (y \leq -a).$$

Четыре постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 определяют из условия непрерывности φ_m и непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции на границе между областями 2 и 1, а также между областями 2 и 3.

Глава восемнадцатая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 18.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Под *переменным электромагнитным полем* понимают совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных друг с другом электрического и магнитного полей.

Переменное электромагнитное поле является одним из видов материи. Оно обладает энергией, массой и количеством движения и может превращаться в другие виды материи. Любые возмущения поля в диэлектрике с огромной скоростью, для вакуума равной примерно $3 \cdot 10^8$ м/сек, передаются на большие расстояния.

При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле пользуются уравнениями Максвелла.

Систему уравнений Максвелла образуют четыре уравнения *:

1) уравнение, выражающее связь между ротором напряженности магнитного поля и плотностью тока в той же точке поля, — первое уравнение Максвелла;

2) уравнение, которое определяет связь между ротором напряженности электрического поля и скоростью изменения магнитного поля в той же точке поля, — второе уравнение Максвелла;

3) уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока [оно следует из (18.4) после взятия от обеих частей его дивергенции];

4) уравнение $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}$, выражающее связь между истоком напряженности электрического поля и плотностью свободных зарядов в той же точке поля.

Эту систему дополняют уравнением непрерывности (см. § 18.3) и теоремой Умова — Пойнтинга (см. § 18.6).

§ 18.2. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (18.1)$$

В правой части его имеются две плотности тока: плотность тока проводимости $\vec{\delta}$ и плотность тока электрического смещения $\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Ток электрического смещения возникает в любом диэлектрике, в том числе и в вакууме, при изменении напряженности электрического поля во времени. Ток смещения порождает магнитное поле так же, как и

* Уравнения были сформулированы английским ученым Д. Максвеллом (1831—1879) в его книге «Трактат об электричестве и магнетизме», изданной в 1873 г.

ток проводимости. Хотя природа тока проводимости и тока смещения не одна и та же, оба они обладают одним и тем же свойством — вызывать магнитное поле.

Таким образом, смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что всякое изменение напряженности электрического поля во времени $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ в некоторой точке поля (т. е. возникновение в ней тока смещения) на таких же правах, как и ток проводимости, вызывает в этой точке вихрь поля магнитного ($\text{rot } \vec{H}$), т. е. вызывает вихревое магнитное поле.

С током смещения в предыдущих разделах (особенно в гл. X) приходилось встречаться неоднократно. Так, известно, что при зарядке какого-либо конденсатора через него протекает ток. Этот ток протекает через диэлектрик и является током смещения.

Таким образом, если в диэлектрике изменяется электрическое поле во времени, то по диэлектрику протекает ток. Если, например, взять незаряженный плоский воздушный конденсатор и подключить его к источнику э. д. с. напряжением U через сопротивление R , то напряжение на обкладках конденсатора будет расти по закону $u_c = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$. Так как напряженность электрического поля в плоском конденсаторе $E = \frac{u_c}{d}$, где d — расстояние между обкладками, то $E = \frac{U}{d} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_a s}{d}$.

Ток смещения, протекающий через один квадратный сантиметр сечения диэлектрика, взятый перпендикулярно силовым линиям,

$$\epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_a \frac{U}{d} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} = \frac{U}{Rs} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Ток смещения через поверхность s равен $\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$, т. е. он равен току проводимости, протекающему по проводникам, соединяющим конденсатор с источником э. д. с.

Отметим, что первое уравнение Максвелла представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Убедимся в том, что из закона полного тока следует уравнение (18.1). С этой целью возьмем произвольный контур и составим для него уравнение по закону полного тока. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную контуром, равен сумме тока проводимости и тока смещения. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}.$$

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_s \text{rot } \vec{H} d\vec{s}$. Следовательно,

$$\int_s \text{rot } \vec{H} d\vec{s} = \int_s \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}. \quad (18.2)$$

Равенство (18.2) должно выполняться при любой площади s .

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

§ 18.3. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Линии полного тока $\left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ являются непрерывными. Физически это означает, что на границе проводящей среды и диэлектрика ток проводимости переходит в ток смещения.

Можно математически сформулировать *принцип непрерывности (замкнутости) линий полного тока*. С этой целью от обеих частей уравнения (18.1) возьмем дивергенцию. Из предыдущего известно, что дивергенция от ротора тождественно равна нулю (см. § 17.12). Поэтому

$$\operatorname{div} \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.3)$$

Уравнение (18.3) можно записать в иной форме. Действительно, из него следует, что

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}. \text{ Но } \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб.}}$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = - \frac{\partial \rho_{\text{своб.}}}{\partial t}.$$

Уравнение непрерывности называется также *законом сохранения заряда*. Этот закон означает, что электрический заряд неуничтожаем, заряд может только перемещаться из одного места в другое.

§ 18.4. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Второе уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (18.4)$$

Физический смысл его состоит в том, что всякое изменение магнитного поля во времени $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ в какой-либо точке поля возбуждает вихрь или ротор электрического поля в той же точке поля, т. е. вызывает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции.

Для того чтобы убедиться в этом, проведем следующие рассуждения. Мысленно возьмем некоторый замкнутый контур, расположенный в переменном электромагнитном поле. Переменный магнитный поток, пронизывающий контур, наведет в нем стороннюю э. д. с.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Но $\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s}$, поэтому

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s},$$

причем площадь s опирается на контур l .

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{E} d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{E} d\vec{s}$, поэтому

$$\int_s \text{rot } \vec{E} d\vec{s} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}. \quad (18.5)$$

Равенство (18.5) должно выполняться при любых площадях s , что возможно только в том случае, когда равны подынтегральные функции обоих интегралов. Следовательно,

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Знак минус в правой части второго уравнения Максвелла (как и в формуле $e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$) объясняется правилом правоходового винта. Если заворачивать правоходовой винт так, что положительное направление вектора магнитной индукции \vec{B} в некоторой точке пространства при возрастании индукции в этой точке совпадет с направлением движения острия винта, то положительное направление для вектора напряженности электрического поля \vec{E} при составлении циркуляции вектора \vec{E} вдоль бесконечно малого контура, окружающего эту точку и лежащего в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , совпадет с направлением вращения головки винта.

Знак минус в правой части (18.4) поставлен для того, чтобы привести в соответствие действительное направление для \vec{E} при оговоренных ранее условиях с направлением, принятым для \vec{E} за положительное.

Как в первом, так и во втором уравнениях Максвелла участвуют частные (не полные) производные во времени. Объясняется это тем, что уравнения Максвелла записаны для таких тел и контуров, которые *неподвижны* по отношению к выбранной системе координат. (Вопросы электродинамики движущихся сред кратко рассмотрены в § 18.9.)

В переменном электромагнитном поле, кроме силовых линий электрического поля, «начинающихся» и «оканчивающихся» на электрических зарядах (как в электростатическом поле), могут быть и замкнутые на себя силовые линии электрического поля, охватывающие замкнутые на себя силовые линии магнитного поля (см., например, рис. 21.5, а).

§ 18.5. УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Уравнения (18.1) и (18.4) записаны для мгновенных значений. Если H и E во времени изменяются синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать уравнения (18.1) и (18.4) в иной форме. Пусть

$$H = H_m \sin(\omega t + \psi_H) \quad \text{и} \quad E = E_m \sin(\omega t + \psi_E).$$

Можно записать $H = \text{Im } \dot{H}_m e^{j\omega t}$ (Im — мнимая часть) или, условно, $H \rightarrow \dot{H}_m e^{j\omega t}$, где комплексная амплитуда

$$\dot{H}_m = H_m e^{j\psi_H}.$$

В свою очередь $E \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}$ (\rightarrow значок соответствия).

Так как напряженности E и H , кроме того, что они меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, т. е. определенным образом ориентированными в пространстве векторами, то над ними ставят стрелку и точку: \vec{E}_m и \vec{H}_m .

Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка — о том, что проекции этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяются синусоидально *. Тогда \vec{E} можно заменить на $\gamma \vec{E} e^{j\omega t}$:

$$\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{на } j\omega \epsilon_a \vec{E} e^{j\omega t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_m e^{j\omega t} = j\omega \vec{E}_m e^{j\omega t} \right)$$

и

$$\text{rot } \vec{H} \rightarrow \text{на } \text{rot } [\vec{H} e^{j\omega t}] = e^{j\omega t} \text{rot } \vec{H}$$

($e^{j\omega t}$ как постоянную величину, не зависящую от координат, можно вынести за знак ротора). При этом первое уравнение Максвелла запишем так:

$$e^{j\omega t} \text{rot } \vec{H} = (\gamma \vec{E} + j\epsilon_a \omega \vec{E}) e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ получим

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + j\omega \epsilon_a \vec{E}. \quad (18.6)$$

Аналогично, второе уравнение Максвелла в комплексной форме

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}. \quad (18.7)$$

§ 18.6. ТЕОРЕМА УМОВА — ПОЙНТИНГА ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Кроме уравнений Максвелла, большое значение в теории электромагнитного поля имеет теорема Умова — Пойнтинга. Она описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова — Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая — комплексная форма — для синусоидально изменяющихся величин.

Из § 15.42 известно, что энергия электрического поля в единице объема равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$. Энергия магнитного поля в единице объема — $-\frac{\mu_a H^2}{2}$. Энергия в объеме dV равна $\left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$.

* В дальнейшем от амплитудных значений переходим к действующим.

Для того чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dV , умножим (18.1) на $\vec{E}dV$, а (18.4) на $\vec{H}dV$. Получим:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} dV = \left(\gamma \vec{E} \vec{E} + \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial \epsilon_a E^2}{\partial t} \right) dV; \quad (18.8)$$

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} dV = \left(-\mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV = \left(-\frac{\partial \mu_a H^2}{\partial t} \right) dV. \quad (18.9)$$

Из (18.8) вычтем (18.9):

$$(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV. \quad (18.10)$$

Так как $\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^*$, то левая часть (18.10) есть $-\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] dV$. Следовательно,

$$-\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV.$$

Обозначим для сокращения записи векторное произведение \vec{E} на \vec{H} через \vec{S} , т. е. примем, что $\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$; \vec{S} — это вектор, называемый *вектором Пойнтинга*; размерность его равна произведению размерностей E и H :

$$[S] = [E] [H] = \frac{e}{m} \cdot \frac{a}{m} = ea/m^2.$$

Таким образом, вектор Пойнтинга имеет размерность мощности (или энергии в единицу времени), отнесенной к единице поверхности, и направление его (рис. 18.1) совпадает с направлением движения острия правоходового винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от \vec{E} к \vec{H} . Итак,

$$-\operatorname{div} \vec{S} dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV. \quad (18.11)$$

Распространим (18.11) на некоторый объем конечных размеров. С этой целью проинтегрируем (18.11) по объему V :

$$-\int_V \operatorname{div} \vec{S} dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right] dV. \quad (18.11')$$

* Напомним вывод этого соотношения. Введем индексы a и b , указывающие, по какой переменной (A или B) производится дифференцирование, и учтем, что можно в циклическом порядке менять множители. Будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{A} \vec{B}] &= \nabla [\vec{A} \vec{B}] = \nabla_a [\vec{A} \vec{B}] + \nabla_b [\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} [\nabla_a \vec{A}] + \vec{A} [\nabla_b \vec{B}] = \\ &= \vec{B} [\nabla_a \vec{A}] - \vec{A} [\nabla_b \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}. \end{aligned}$$

Замена \vec{A} на \vec{E} и \vec{B} на \vec{H} и дает соотношение

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Подобно тому, как поверхностный интеграл по теореме Стокса преобразовывается в линейный (см. § 17.14):

$$\oint_s \text{rot } \vec{A} d\vec{s} = \oint \vec{A} d\vec{l},$$

объемный интеграл в свою очередь может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование осуществляют с помощью теоремы Остроградского — Гаусса

$$\int \text{div } \vec{S} dV = \oint \vec{S} d\vec{s}.$$

Качественно поясним это преобразование. Разобьем объем V (рис. 18.2) на отдельные объемы ΔV , заменим $\text{div } \vec{S}$ на $\frac{\sum \vec{S} \Delta \vec{s}}{\Delta V}$ (строго говоря, надо было бы записать

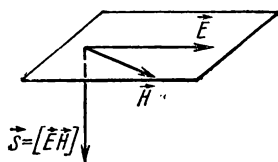


Рис. 18.1

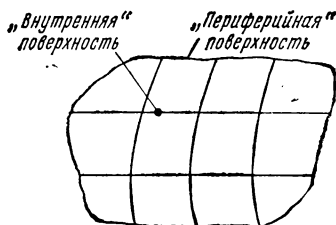


Рис. 18.2

$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint \frac{\vec{S} \Delta \vec{s}}{\Delta V}$), где Δs — элемент поверхности объема ΔV , а знак \sum означает суммирование по всем поверхностям объема ΔV . Тогда

$$\int_V \text{div } \vec{S} dV = \sum \sum \frac{\vec{S} \Delta \vec{s}}{\Delta V} \Delta V = \sum \sum \vec{S} \Delta \vec{s}.$$

Первый знак суммы означает суммирование по поверхностям малого объема, а второй знак суммы — суммирование по отдельным объемам.

Сумма $\sum \sum \vec{S} \Delta \vec{s}$ может быть разбита на две суммы: на сумму выражений $\vec{S} \Delta \vec{s}$ по всем поверхностям, отделяющим один объем от соседнего (по «внутренним» поверхностям), и на сумму $\vec{S} \Delta \vec{s}$ по всем «периферийным» поверхностям. Первая сумма равна нулю, так как для двух смежных объемов внешние нормали к общей поверхности направлены встречно. Рис. 18.3 поясняет это; mn — общая грань двух объемов. Для верхнего объема нормаль к грани направлена вниз ($\Delta \vec{s}_1$), для нижнего объема нормаль к поверхности направлена вверх ($\Delta \vec{s}_2$); вектор \vec{S} , будучи умноженным на $(\Delta \vec{s}_1 + \Delta \vec{s}_2)$, даст нуль.

Сумма $\vec{S} \Delta \vec{s}$ по всем периферийным поверхностям и представляет собой $\oint \vec{S} d\vec{s}$.

Теорему Умова — Пойнтинга для мгновенных значений записывают следующим образом:

$$-\oint_s \vec{S} d\vec{s} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (18.12)$$

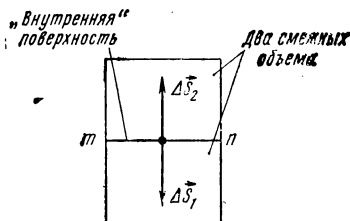


Рис. 18.3

Левая часть (18.12) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность s , ограничивающую некоторый объем V .

Поясним смысл знака минус в левой части формулы (18.12).

Элемент поверхности ds в любой точке ее направлен в сторону внешней по отношению к рассматриваемому объему нормали. Вектор Пойнтинга \vec{S} направлен внутрь этого объема. Поскольку угол между \vec{S} и $d\vec{s}$ больше 90° , то скалярное произведение $\vec{S} d\vec{s} < 0$, а $-\vec{S} d\vec{s} > 0$. Таким образом, за счет знака минус левая часть формулы (18.9) — величина положительная.

В соответствии с уравнением Джоуля — Ленца в дифференциальной форме γE^2 есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени.

Поэтому $\int_V \gamma E^2 dV$ есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме V ; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема.

Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V , равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты, и мощности, идущей на приращение энергии электромагнитного поля.

Теорему Умова — Пойнтинга * следует трактовать как уравнение энергетического баланса; левая часть (18.12) есть мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (18.12) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (18.12) было получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = 0$$

и

$$-\oint \vec{S} d\vec{s} = \int_V \gamma E^2 dV.$$

Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику (*провода же в линиях передачи выполняют двойную роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике*).

* Н. А. Умов (1846—1915) с 1893 по 1911 г. являлся профессором Московского университета. В 1874 г. защитил докторскую диссертацию «О движении энергии в упругих средах», где развил вопрос о потоке энергии в упругих средах и о плотности потока энергии. Применительно к электромагнитному полю понятие о потоке энергии было развито английским физиком Пойнтингом в 1885 г.

Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере. Пусть энергия постоянного тока передается по коаксиальному кабелю (рис. 18.4). Радиус жилы r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 . Примем проводимость материала жилы и оболочки настолько большой (теоретически бесконечно большой), что напряженности поля $E = \frac{\delta}{\gamma}$ в жиле и оболочке стремятся к нулю. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком.

Убедимся, что энергия, передаваемая приемнику в единицу времени, равная UI , действительно канализируется по диэлектрику.

С этой целью подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 . Напряженность магнитного поля в диэлектрике, по закону полного тока

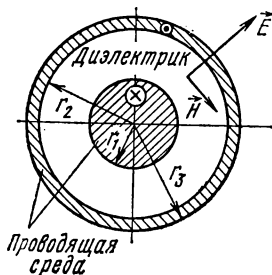


Рис. 18.4

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Напряженность электрического поля в диэлектрике при постоянном токе определяется так же, как и в условиях электростатики:

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_a r l} = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где Q — полный заряд жилы на длине l ; U — напряжение между жилой и оболочкой.

Следовательно, в некоторой точке диэлектрика, расположенной на расстоянии r от оси ($r_1 \leq r \leq r_2$),

$$S = EH = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

(\vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны; см. рис. 18.4). Поток вектора Пойнтинга через кольцо с радиусами r_1 и r_2

$$\int \vec{S} d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} S 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI.$$

Таким образом, вся поступающая к приемнику энергия действительно передается по диэлектрику. По жиле и оболочке энергия к приемнику не передается. Более того, если учесть, что γ конечна и напряженность электрического поля в жиле и оболочке направлена по току и не равна нулю, то нетрудно убедиться в наличии потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность провода внутрь провода, т. е. провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.

Пример 213. Определить тангенс угла, составляемого напряженностью электрического поля с нормалью к поверхности жилы в точке, принадлежащей поверхности жилы коаксиального кабеля (рис. 18.5), а также подсчитать величину потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность жилы на длине в 1 м и сопоставить величину потока вектора Пойнтинга с потерями энергии в жиле на длине в 1 м. Радиус медной жилы $r_1 = 0,3$ см. Внутренний радиус оболочки $r_2 = 1$ см. Протекающий по кабелю постоянный ток $I = 50$ а. Напряжение между жилой и оболочкой $U = 10$ кв.

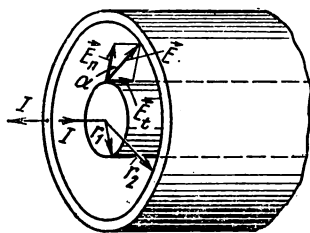


Рис. 18.5

Решение. Нормальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{10^4}{0,003 \cdot \ln \frac{1}{0,3}} = 2,77 \cdot 10^5 \text{ в/м.}$$

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы, по закону Ома,

$$E_t = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 0,003^2 \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ в/м.}$$

Вектор напряженности электрического поля \vec{E} составляет с нормалью к поверхности жилы угол α (см. рис. 18.5), тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Напряженность магнитного поля на поверхности жилы, по закону полного тока,

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi \cdot 0,003} = 2650 \text{ а/м.}$$

Для определения величины потока вектора Пойнтинга внутрь жилы на длине в 1 м следует умножить составляющую вектора Пойнтинга $E_t H$, проникающую внутрь жилы, на величину боковой поверхности жилы на длине в 1 м:

$$E_t H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3,05 \cdot 10^{-2} \cdot 2650 \cdot 2\pi \cdot 0,003 \cdot 1 = 1,523 \text{ вт.}$$

Эта величина равна потерям энергии в жиле кабеля на длине в 1 м:

$$I^2 R = I^2 \frac{l}{\gamma S} = 50^2 \cdot \frac{1}{5,8 \cdot 10^7 \pi \cdot 0,003^2} = 1,523 \text{ вт.}$$

Пример 214. На рис. 18.6 изображено поперечное сечение сердечника трансформатора. Сердечник окружен витком. К разомкнутым концам a и b этого витка присоединены два одинаковых электродинамических вольтметра V_1 и V_2 . На рис. 18.6 показано расположение провода от вольтметра к точкам a и b .

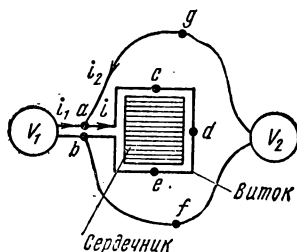


Рис. 18.6

Поток Φ направлен вдоль сердечника трансформатора (перпендикулярно рисунку) и изменяется во времени следующим образом: $\Phi = 0,001 \cos 500t$ вб.

Определить показания вольтметра, полагая, что вне сердечника магнитный поток отсутствует и что сопротивление R_V каждого вольтметра много больше сопротивления самого витка R_B , т. е.

$$\frac{R_B}{R_V} \ll 1.$$

Решение. Обозначим через i_1 ток по вольтметру V_1 ; i_2 — ток по вольтметру V_2 ; i — ток по витку. Положительные направления токов показаны стрелками на рис. 18.6.

По первому закону Кирхгофа,

$$i_1 + i_2 = i. \quad (a)$$

Составим два уравнения по второму закону Кирхгофа. Одно из них для контура, образованного вольтметром V_1 и витком, т. е. для контура $acdebV_1a$ (при записи уравнения учтем, что контур охватывает сердечник и потому контур пронизывается потоком Φ):

$$i_1 R_V + i R_B + \frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (б)$$

Другое уравнение запишем для контура, образованного вольтметром V_2 и витком, т. е. для контура $agV_2fbcdca$ (этот контур не охватывает сердечник и потому магнитный поток его не пронизывает):

$$i_2 R_V + i R_B = 0. \quad (в)$$

Из уравнения (в) найдем $i = -i_2 \frac{R_V}{R_B}$ и подставим его в (а). Получим $i_1 = -i_2 \left(\frac{R_V}{R_B} + 1 \right)$. В силу того что $\frac{R_V}{R_B} \gg 1$, $i_1 \approx -i_2 \frac{R_V}{R_B}$.

Подставим $i = i_1 + i_2$, где $i_2 = -i_1 \frac{R_B}{R_V}$, в уравнение (б). Будем иметь:

$$i_1 R_V \left[1 + \frac{R_B}{R_V} - \left(\frac{R_B}{R_V} \right)^2 \right] \approx i_1 R_V = - \frac{d\Phi}{dt};$$

$$- \frac{d\Phi}{dt} = 0,5 \sin 500t.$$

Показание вольтметра V_1 равно действующему значению величины $i_1 R_V$, т. е. равно $\frac{0,5}{\sqrt{2}} = 0,355$ в. Показание вольтметра V_2 равно действующему значению величины $i_2 R_V \approx 0$.

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что при измерениях в переменном электромагнитном поле показание вольтметра зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения.

§ 18.7. ТЕОРЕМА УМОВА—ПОЙНТИНГА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Перед тем как записать теорему Умова — Пойнтинга в комплексной форме, рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность

$$\tilde{S} = \tilde{U} \tilde{I} = P + jQ.$$

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C .

Тогда реактивная мощность

$$Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega \left[I^2 L - I^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 C \right] = 2\omega (w_m - w_e).$$

Здесь

$$w_m = \frac{LI^2}{2} \text{ и } w_e = \frac{CU_C^2}{2},$$

где U_C — напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной w_m и электрической w_e энергиями цепи, умноженной на 2ω . Подобно тому как в цепи переменного тока для вычисления полной мощности \tilde{S} надо умножить комплекс напряжения \vec{U} на сопряженный комплекс тока \vec{I} , вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга

$$\vec{\tilde{S}} = [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*].$$

Вместо $-\oint \vec{S} d\vec{s}$ теперь будет

$$-\oint \vec{\tilde{S}} d\vec{s} = - \int_V \operatorname{div} \vec{\tilde{S}} dV = \int_V (\dot{\vec{E}} \operatorname{rot} \vec{H}^* - \vec{H}^* \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}) dV.$$

В соответствии с (18.6) и (18.7)

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}$$

и

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot} \vec{H}^* = \gamma \vec{E}^* - j\omega \epsilon_a \vec{E}^*$ и

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} \operatorname{rot} \vec{H}^* - \vec{H}^* \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= \gamma \dot{\vec{E}} \vec{E}^* - j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} \vec{E}^* + j\omega \mu_a \dot{\vec{H}} \vec{H}^* = \\ &= \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$-\oint \vec{\tilde{S}} d\vec{s} = \int_V \gamma E^2 dV + j2\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (18.13)$$

Первое слагаемое правой части (18.13) представляет собой активную мощность, второе — реактивную мощность. Таким образом, теорема Умова — Пойнтинга может быть записана еще следующим образом:

$$-\oint \vec{\tilde{S}} d\vec{s} = P + jQ.$$

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивлений проводников на переменном токе (подробнее см. § 19.7).

§ 18.8. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К § 18.1

Первое замечание. В уравнения Максвелла входят параметры (ϵ_a , γ , μ_a), характеризующие усредненные в пространственном и временном смысле свойства вещества. При низких частотах эти параметры представляют собой действительные (некомплексные) числа — такими и будем их считать в курсе ТОЭ. При высоких частотах в диэлектриках существенную роль начинают играть диэлектрическая вязкость и другие процессы*.

В ферромагнитных веществах резко сказываются явления гистерезиса, магнитной вязкости и ряд других. В силу этих причин ϵ , γ и μ оказываются функциями частоты и комплексами.

Убедимся в том, что вязкостные процессы при поляризации диэлектриков с полярными молекулами приводят к тому, что ϵ становится комплексным числом.

Обозначим E_n — напряженность поля, обусловленную приложенным к конденсатору напряжением u ; например, для плоского конденсатора с расстоянием d между обкладками $E_n = \frac{u}{d}$; E_g — действующая на диполи полярных молекул напряженность поля, вызывающая их поворот.

За счет вязкостных процессов при поляризации (повороте) полярных молекул E_g меньше E_n на величину, пропорциональную скорости поляризации:

$$E_g = E_n - k_1 \frac{dP}{dt}, \quad (18.14)$$

где k_1 — некоторый коэффициент.

Но $P = k_2 E_g$, поэтому

$$E_g + k \frac{dE_g}{dt} = E_n, \text{ где } k = k_1 k_2.$$

При нулевых начальных условиях $E_g = E_n \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$. Коэффициент k называют постоянной времени релаксации.

При переменном токе частотой ω

$$\dot{E}_g = \frac{\dot{E}_n}{1 + j\omega k}; \quad \dot{P} = k_2 \dot{E}_g = \frac{k_2 \dot{E}_n}{1 + j\omega k}$$

и

$$\dot{D} = \epsilon_0 \dot{E}_n + \dot{P} = \dot{E}_n \frac{\epsilon_0 (1 + j\omega k) + k_2}{1 + j\omega k}.$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\epsilon} = \frac{\dot{D}}{\dot{E}_n} = \epsilon' - j\epsilon''$, где

$$\epsilon' = \frac{(\epsilon_0 + k_2) + \omega^2 k \epsilon_0}{1 + (\omega k)^2}; \quad \epsilon'' = \frac{\omega k (\epsilon_0 + k_2) - \omega k \epsilon_0}{1 + (\omega k)^2}.$$

Из формул видно, что ϵ' и ϵ'' являются функциями частоты.

Мгновенное значение плотности тока через диэлектрик, у которого проводимость γ равна нулю, $\delta = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$. При переменном токе частотой ω

$$\delta = j\omega \dot{D} = j\omega \dot{E}_n (\epsilon' - j\epsilon'') = \omega \dot{E}_n (\epsilon'' + j\epsilon').$$

* Зависимость параметров веществ от частоты впервые была обнаружена русским ученым В. К. Аркадьевым в 1908—1911 гг. Физическое объяснение этим явлениям было дано им в 1913 г. в работе «Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле».

Мгновенное значение плотности тока через несовершенный диэлектрик ($\gamma \neq 0$)

$$\delta_n = \gamma E_n + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

При переменном токе частотой ω

$$\delta_n = (\omega \epsilon'' + \gamma) \dot{E}_n + j\omega \epsilon' \dot{E}_n.$$

Первое слагаемое правой части находится в фазе с приложенным напряжением, второе на 90° его опережает. Тангенс угла потерь несовершенного диэлектрика (см.

§ 5.9) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\epsilon'' + \frac{\gamma}{\omega}}{\epsilon'}$. Используя уравнение (3.34) § 3.8 для вязкостных процессов в ферромагнетиках, можно вывести аналогичные формулы и для комплексной магнитной проницаемости в предположении, что вихревые токи отсутствуют.

Заметим, что дифференциальное уравнение, описывающее процесс зарядки конденсатора с вязким диэлектриком через сопротивление R от источника постоянной в. д. с., если учесть вязкостные процессы по уравнению (18.14), будет иметь *второй* (не первый!) порядок.

Второе замечание. В § 18.2 рассматривалось первое уравнение Максвелла (18.1). В правой части этого уравнения записаны две плотности тока — плот-

ность тока проводимости $\vec{\delta}$ и плотность тока электрического смещения $\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Но, кроме тока проводимости и тока электрического смещения, существует третий вид тока — ток переноса. Ток переноса — это собирательное название.

Под *током переноса* понимают ток, природа которого отлична от природы тока проводимости и тока смещения, например ток, возникающий в электронной лампе вследствие явления термоэлектронной эмиссии.

Плотность тока переноса равна объемной плотности переносимых зарядов ρ , умноженной на скорость их переноса \vec{v} . Если ток переноса создается движением со скоростью \vec{v}_+ положительно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_+ и движущихся со скоростью \vec{v}_- отрицательно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_- , то плотность тока переноса равна $\rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$. Ток переноса, так же как и остальные виды токов, создает магнитное поле.

С учетом тока переноса первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho \vec{v}.$$

Для тех задач, которые рассматриваются в ч. III учебника, ток переноса отсутствует, поэтому первое уравнение Максвелла и взято в форме (18.1).

Третье замечание. При чрезвычайно высоких частотах, когда длина электромагнитной волны становится соизмеримой с линейными размерами, характеризующими молекулярную структуру самого вещества, вещество уже нельзя рассматривать как континуум. В этом случае уравнения Максвелла должны быть заменены уравнениями квантовой теории поля.

Четвертое замечание. В § 18.1 упоминалось о том, что электромагнитное поле обладает не только энергией, но и массой и количеством движения. Масса электромагнитного поля в единице объема определяется как частное от деления энергии поля, заключенной в единице объема, на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в пустоте:

$$M = \frac{\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}}{v^2}.$$

Количество движения электромагнитного поля G , отнесенное к единице объема, равно произведению массы поля в единице объема на скорость электромагнитной волны в пустоте:

$$G = Mv.$$

Когда говорят о распространении электромагнитного поля, то имеют в виду, что одновременно с движением потока электромагнитной энергии происходит движение потока массы поля и потока количества движения поля.

Масса электромагнитного поля, заключенная в единице объема, несоизмеримо мала по сравнению с массой (плотностью) всех известных веществ. Даже при максимально достижимых в настоящее время значениях напряженностей электрического и магнитного полей масса электромагнитного поля в единице объема оказывается равной всего 10^{-20} — 10^{-15} г/см³.

Тем не менее наличие массы у электромагнитного поля имеет принципиальное значение: в самом факте наличия массы поля находит свое отражение известная инерционность процессов в электромагнитном поле.

Хотя наличие массы и количества движения у электромагнитного поля и имеет принципиальное значение, но в курсе ТОЭ эти понятия не используются — основное внимание в курсе уделяется энергетическим соотношениям.

Пятое замечание. В курсе ТОЭ рассматривают поля в изотропных линейных средах. В них вектор $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ совпадает по направлению с вектором \vec{H} , вектор $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ совпадает по направлению с \vec{E} и вектор $\vec{\delta} = \gamma \vec{E} - \epsilon \vec{E}$. В *изотропных средах* μ , ϵ и γ представляют собой некоторые постоянные числа, не зависящие от величины H или E (но зависящие от частоты). Если проекции вектора \vec{B} на оси x, y, z обозначить B_x, B_y, B_z , а проекции \vec{H} — через H_x, H_y, H_z , то для изотропных сред $B_x = \mu_a H_x, B_y = \mu_a H_y, B_z = \mu_a H_z$. Аналогично, $D_x = \epsilon_a E_x; D_y = \epsilon_a E_y; D_z = \epsilon_a E_z$ и $\delta_x = \gamma E_x$ и т. д. В *анизотропных средах* $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ не совпадает по направлению с \vec{H} , \vec{D} с \vec{E} , $\vec{\delta}$ с \vec{E} . Любая проекция \vec{B}, \vec{D} и $\vec{\delta}$ зависит не только от одноименной проекции \vec{H} или \vec{E} , но и от разноименных проекций. Так, B_x зависит не только от H_x , но и от H_y и H_z : $B_x = \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z$; аналогично, $B_y = \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z$, где $\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{xz}, \dots$ — составляющие тензора магнитной проницаемости μ_a :

$$\overleftrightarrow{\mu_a} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Подобные выражения существуют и для тензоров ϵ и γ .

Шестое замечание. В литературе можно встретить термин *гиротропная среда*. К числу гиротропных сред относятся намагниченный постоянным магнитным полем напряженностью H_0 феррит и намагниченный постоянным магнитным полем ионизированный газ.

В намагниченном феррите магнитная проницаемость для малых по амплитуде переменных составляющих поля является тензором. Составляющие этого тензора по осям координат являются комплексными числами и зависят от величины H_0 . Зависимости составляющих тензора от H_0 могут иметь резонансный характер.

В намагниченном ионизированном газе электрическая проницаемость для малых по амплитуде переменных составляющих поля является тензором, составляющие которого также зависят от величины H_0 . Среда называется гиротропными (вращающими) потому, что направление вращения плоскости поляризации электромагнитной волны в них при прочих равных условиях зависит от того, распространяется ли волна *согласно* с направлением постоянного магнитного поля или *встречно* ему.

§ 18.9. Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики)

Положим, что имеются две системы отсчета координат и времени. Одна система неподвижна, имеет начало в точке O , координаты произвольной точки в ней x, y, z и время t (система O). Другая система отсчета связана с движущейся по отношению к предыдущей системе отсчета средой, имеет начало в точке O_1 , а координаты той же точки в ней x_1, y_1, z_1 и время t_1 (система O_1). Допустим, что в момент $t = 0$ обе системы координат совпадают и что скорость движения среды \vec{v} направлена по оси x . Тогда

в соответствии с теорией относительности можно записать преобразования Лоренца, связывающие координаты и время в обеих системах отсчета:

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y_1 = y; \quad z_1 = z; \quad t_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (18.15)$$

где c — скорость света.

Обозначим напряженность электрического поля и магнитную индукцию в произвольной точке, которые измерил бы наблюдатель, неподвижный по отношению к системе O , соответственно как \vec{E} и \vec{B} . Физически \vec{E} означает силу, действующую на единичный покоящийся заряд в системе O , а \vec{B} — силу, действующую на единичный элемент тока, неподвижный в системе O :

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z; \quad \vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z.$$

Напряженность электрического поля и магнитную индукцию, которые измерил бы наблюдатель, неподвижный по отношению к системе O_1 (т. е. движущийся со средой со скоростью \vec{v}), обозначим \vec{E}_1 и \vec{B}_1 . Физически \vec{E}_1 означает силу, действующую на единичный покоящийся в системе O_1 заряд; \vec{B}_1 — силу, действующую на единичный элемент тока, покоящийся в движущейся среде;

$$\vec{E}_1 = \vec{i}E_{x1} + \vec{j}E_{y1} + \vec{k}E_{z1}; \quad \vec{B}_1 = \vec{i}B_{x1} + \vec{j}B_{y1} + \vec{k}B_{z1}.$$

Перейдем от системы уравнений Максвелла для неподвижных сред к уравнениям Максвелла для движущихся сред. С этой целью частные производные по x, y, z при взятии ротора и дивергенции и частные производные по t заменим частными производными по x_1, y_1, z_1 и по времени t_1 , имея в виду, что в соответствии с (18.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \right); \quad \frac{\partial}{\partial t} = \alpha \left(-v \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t_1} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x_1} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial}{\partial t_1} = \alpha \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z}; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

После раскрытия ротора и объединения членов с одинаковыми ортами в первом уравнении Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ получим $\text{rot } \vec{H}_1 = \vec{\delta}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t_1}$. (18.16)

Проекции векторов на координатные оси в обеих системах отсчета связаны соотношениями:

$$H_{x1} = H_x; \quad H_{y1} = \alpha (H_y + vD_z); \quad H_{z1} = \alpha (H_z - vD_y). \quad (18.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\delta}_1 &= \vec{i}\delta_{x1} + \vec{j}\delta_{y1} + \vec{k}\delta_{z1}; \\ \delta_{x1} &= \alpha (\delta_x - vp); \quad \delta_{y1} = \delta_y; \quad \delta_{z1} = \delta_z; \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_1 &= \vec{i}D_{x1} + \vec{j}D_{y1} + \vec{k}D_{z1}; \\ D_{x1} &= D_x; \quad D_{y1} = \alpha \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right); \quad D_{z1} = \alpha \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

Аналогичные преобразования второго уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t_1} \quad (18.20)$$

поят связь между проекциями векторов:

$$E_{x1} = E_x; \quad E_{y1} = \alpha (E_y - vB_z); \quad E_{z1} = \alpha (E_z + vB_y). \quad (18.21)$$

$$B_{x1} = B_x; \quad B_{y1} = \alpha \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right); \quad B_{z1} = \alpha \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right). \quad (18.22)$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла в системе O_1 имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{D}_1 = \rho_1; \quad (18.23)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_1 = 0. \quad (18.24)$$

Здесь

$$\rho_1 = \alpha \left(\rho - \frac{v}{c^2} \delta_x \right). \quad (18.25)$$

Обратим внимание еще раз на то, что в системе O_1 операции дифференцирования при взятии ротора и дивергенции производятся по координатам x_1, y_1, z_1 .

В системе O_1 , для которой среда неподвижна, выполняется условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности E_{t1} , тангенциальной составляющей H_{t1} и непрерывность нормальных составляющих D_{n1} и B_{n1} .

В системе O_1

$$\vec{J}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{H}_1; \quad \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1. \quad (18.26)$$

В системе O

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}; \quad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}, \quad (18.27)$$

\vec{J} и \vec{J}_1 — намагниченность и \vec{P} и \vec{P}_1 — поляризация в системах O и O_1 :

$$\vec{J} = \vec{i} J_x + \vec{j} J_y + \vec{k} J_z; \quad \vec{J}_1 = \vec{i} J_{x1} + \vec{j} J_{y1} + \vec{k} J_{z1};$$

$$\vec{P} = \vec{i} P_x + \vec{j} P_y + \vec{k} P_z; \quad \vec{P}_1 = \vec{i} P_{x1} + \vec{j} P_{y1} + \vec{k} P_{z1}.$$

Используя уравнения (18.17), (18.19), (18.21), получим связи между проекциями векторов намагниченности и поляризации в системах O и O_1 :

$$\left. \begin{aligned} J_{x1} &= J_x; & J_{y1} &= \alpha (J_y + vP_z); & J_{z1} &= \alpha (J_z - vP_y); \\ P_{x1} &= P_x; & P_{y1} &= \alpha \left(P_y - \frac{vP_z}{c^2} \right); & P_{z1} &= \alpha \left(P_z + \frac{vP_y}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.28)$$

Из уравнений (18.17) и (18.22) следует, что если в системе O магнитное поле отсутствует ($\vec{B} = 0$), но имеется электрическое ($\vec{E} \neq 0$), то в системе O_1 имеется не только электрическое, но и магнитное поле. Из уравнений (18.19) и (18.21) заключаем, что если в системе O отсутствует электрическое поле ($\vec{E} = 0$), но есть магнитное ($\vec{B} \neq 0$), то в системе O_1 наблюдается не только магнитное, но и электрическое поле. Плотность тока \vec{j} в системе O_1 создается не только током проводимости \vec{j} , но и током переноса $\alpha v \rho$ [см. уравнение (18.18)].

В соответствии с уравнением (18.25) перемещение тока с плотностью δ_x параллельно самому себе с системой O_1 наблюдатель в системе O воспринимает как возникновение объемного заряда $\frac{v}{c^2} \delta_x$, дополнительного к объемной плотности заряда ρ .

В соответствии с уравнением (18.28) движение поляризованной среды со скоростью v воспринимается в системе O как появление дополнительной намагниченности, а движение намагниченной среды со скоростью v воспринимается в системе O как возникновение дополнительной поляризации.

Для поля, связанного с системами O и O_1 , имеют место следующие инварианты:

$$\frac{E_1^2}{c} - B_1^2 c = \frac{E^2}{c} - B^2 c; \quad \vec{E}_1 \vec{B}_1 = \vec{E} \vec{B};$$

$$D_1^2 c - \frac{H_1^2}{c} = D^2 c - \frac{H^2}{c}; \quad \vec{D}_1 \vec{H}_1 = \vec{D} \vec{H}.$$

Если скорость движения среды мала по сравнению со скоростью света, то $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ и $\alpha \approx 1$, при этом преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея $x_1 = x - vt$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $t_1 = t$, а связи между величинами в системах O и O_1 становятся такими:

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]; \quad \vec{B}_1 = \vec{B} - \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2};$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H} - [\vec{v} \vec{D}]; \quad \vec{D}_1 = \vec{D} + \frac{[\vec{v} \vec{H}]}{c^2};$$

$$\vec{\delta}_1 = \vec{\delta} - \vec{v} \rho; \quad \rho_1 = \rho - \frac{\vec{v} \vec{\delta}}{c^2};$$

$$\vec{J}_1 = \vec{J} + [\vec{v} \vec{P}]; \quad \vec{P}_1 = \vec{P} - \frac{[\vec{v} \vec{J}]}{c^2}.$$

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

§ 19.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a .

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени E и H :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + j\omega \epsilon_a \vec{E}$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}.$$

В проводящей среде даже при весьма высоких частотах произведение $\omega \epsilon_a$ много меньше проводимости γ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым $j\omega \epsilon_a \vec{E}$ в первом уравнении Максвелла можно пренебречь.

В настоящее время наука не располагает точными данными о числовом значении относительной диэлектрической проницаемости ϵ для металлов. Имеются лишь сведения, что порядок ϵ для металлов такой же, как и для большинства диэлектриков (т. е. от нескольких единиц до нескольких десятков). В качестве примера возьмем ϵ для меди, равное 10, и найдем, во сколько раз ток проводимости в ней будет больше тока смещения при $\omega = 10^8$ и при $\omega = 10^9$ рад/сек. При $\omega = 10^8$

$$\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} = \frac{5,6 \cdot 10^7}{10^8 \cdot 10 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} = 6,33 \cdot 10^{14};$$

при $\omega = 10^9$

$$\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} = 6,33 \cdot 10^6,$$

т. е. в рассмотренном числовом примере даже при $\omega = 10^9$ ток проводимости больше тока смещения в $6,33 \cdot 10^6$ раз.

Таким образом, первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} \tag{19.1}$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}. \tag{19.2}$$

Эти два уравнения представляют собой уравнения с двумя неизвестными \vec{E} и \vec{H} . Проведем их совместное решение. С этой целью возьмем ротор от уравнения (19.1):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \gamma \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Учтем, что $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, и поэтому $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0$. Вместо $\operatorname{rot} \vec{E}$ в соответствии с (17.2) подставим $-j\omega\mu_a\vec{H}$. Получим

$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega\mu_a\vec{H}. \quad (19.3)$$

Уравнение (19.3) является дифференциальным относительно \vec{H} . В самом общем случае, когда \vec{H} зависит от всех трех или даже только от двух координат, решение (19.3) довольно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением решения уравнения (19.3) для частных случаев — для плоской и для цилиндрической электромагнитных волн.

§ 19.2. ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

Под *плоской электромагнитной волной* понимают такую волну, для которой характерно, что во всех точках плоскости (например, плоскости xoy), перпендикулярной направлению распространения волны (оси z), напряженность электрического

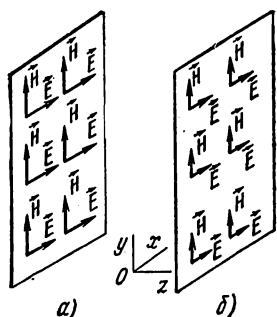


Рис. 19.1

поля \vec{E} в данный момент времени одинакова (по величине и направлению) и лежит в плоскости xoy , точно так же и напряженность магнитного поля во всех точках плоскости xoy одинакова и лежит в плоскости xoy (рис. 19.1 иллюстрирует определение). На рис. 19.1 изображены для одного и того же момента времени векторы \vec{E} и \vec{H} в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных оси z декартовой системы координат. Во всех точках первой плоскости (рис. 19.1, а) напряженность электрического (магнитного) поля одинакова по величине и по направлению. Во всех точках второй плоскости (рис. 19.1, б) напряженность электрического (магнитного) поля также одинакова по величине и по направлению, но она не равна напряженности поля в первой плоскости.

В силу самого определения плоской волны

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0.$$

В плоской волне \vec{E} и \vec{H} являются функциями только одной координаты, в нашем случае функцией только z .

Повернем координатные оси таким образом, чтобы ось y совпала с напряженностью магнитного поля \vec{H} . При этом

$$\vec{H} = \vec{j}H,$$

где \vec{j} — единичный орт оси y декартовой системы координат. Подставим $\vec{H} = \vec{j}H$ в уравнение (19.3) и раскроем ∇^2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{j}H = j\omega\mu_a \vec{j}H. \quad (19.4)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\gamma\mu_a \dot{H}. \quad (19.5)$$

В уравнении (19.5) вместо частной производной написана простая производная. Переход от частной производной к простой для плоской волны вполне естествен, так как \dot{H} является функцией только одной переменной z .

Уравнение (19.5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение записывают следующим образом:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{\rho z} + \dot{C}_2 e^{-\rho z}, \quad (19.6)$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 — постоянные интегрирования; это комплексы, которые определяют из граничных условий; для каждой конкретной задачи свои постоянные.

Из характеристического уравнения $\rho^2 = j\omega\gamma\mu_a$ найдем коэффициент

$$\rho = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}. \quad (19.7)$$

Если γ берется в единицах $(\text{ом} \cdot \text{м})^{-1}$, μ_a в гн/м , то ρ измеряется в м^{-1} .

Так как $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, то ρ можно представить и так:

$$\rho = k(1+j), \quad (19.8)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}. \quad (19.9)$$

Напряженность электрического поля найдем с помощью уравнений (19.1) и (19.6). Из (19.1) следует, что

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \vec{H}.$$

Найдем $\text{rot } \vec{H}$. В соответствии с уравнением (17.6) (учитывая, что $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0$) имеем

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (19.10)$$

Следовательно,

$$\vec{E} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right). \quad (19.10')$$

$$\frac{d\dot{H}}{dz} = p [\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}]. \quad (19.11)$$

Выражение (19.10') показывает, что напряженность электрического поля в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси x , об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси x (орта \vec{i}). Таким образом, в плоской электромагнитной волне между \vec{E} и \vec{H} есть пространственный сдвиг в 90° (\vec{E} направлено по оси x , а \vec{H} — по оси y).

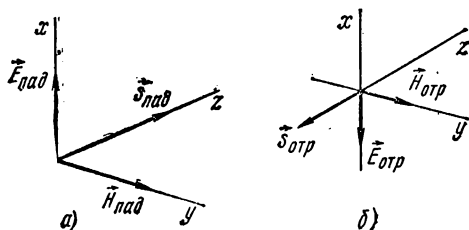


Рис. 19.2

Частное от деления p на γ принято называть *волновым сопротивлением*:

$$Z_{\text{в}} = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\text{в}}}{\gamma}} e^{i45^\circ}. \quad (19.12)$$

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$, измеряемое в омах, зависит от свойств среды (от γ и $\mu_{\text{в}}$) и угловой частоты ω . В соответствии с (19.10') и (19.11) проекция \vec{E} на ось x равна

$$\dot{E} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{E}_{\text{пад}} = Z_{\text{в}} \dot{C}_2 e^{-pz} \text{ и } \dot{E}_{\text{отр}} = -Z_{\text{в}} \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Проекция \vec{H} на ось y в соответствии с (17.6)

$$\dot{H} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{H}_{\text{пад}} = \dot{C}_2 e^{-pz} \text{ и } \dot{H}_{\text{отр}} = \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Составляющие падающей волны $\vec{E}_{\text{пад}}$ и $\vec{H}_{\text{пад}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{S}_{\text{пад}}$ (рис. 19.2, а). Он направлен вдоль положительного направления оси z . Следовательно, движение энергии с падающей волной происходит вдоль положительного направления оси z .

Составляющие отраженной волны $\vec{E}_{\text{отр}}$ и $\vec{H}_{\text{отр}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{S}_{\text{отр}}$ (рис. 19.2, б). Последний направлен вдоль отрицательного

направления оси z . Это означает, что отраженная волна несет с собой энергию вдоль отрицательного направления оси z .

Волновое сопротивление Z_w можно трактовать как отношение $\frac{\dot{E}_{\text{пад}}^*}{\dot{H}_{\text{пад}}}$.

Так как волновое сопротивление является числом комплексным [см. формулу (19.12)] и имеет аргумент 45° , то сдвиг во времени между $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$ для одной и той же точки поля равен 45° .

§ 19.3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОМ ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородной проводящей среде, простирающейся теоретически в бесконечность (рис. 19.3).

Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в проводящую среду и распространяется в последней. Так как среда простирается теоретически в бесконечность и падающая волна в толще проводящей среды не встречает границы, которая «возмутила» бы ее распространение, то отраженной волны в данном случае не возникает.

При наличии только одной падающей волны

$$\dot{H} = \dot{C}_2 e^{-pz} \quad \text{и} \quad \dot{E} = Z_w \dot{C}_2 e^{-pz}.$$

Постоянную интегрирования \dot{C}_2 найдем из граничных условий. Если обозначить напряженность магнитного поля на поверхности проводящей среды через $\dot{H}_a = H_a e^{j\psi_a}$, то при $z = 0$

$$\dot{C}_2 = \dot{H}_a.$$

Поэтому с учетом (19.8)

$$\dot{H} = H_a e^{-kz} e^{-jhz} e^{j\psi_a}. \quad (19.13)$$

В свою очередь

$$\dot{E} = H_a e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-jhz} e^{j\psi_a + j45^\circ}. \quad (19.14)$$

Чтобы записать выражения для мгновенных значений H и E , необходимо правые части (19.13) и (19.14) умножить на $e^{j\omega t}$ и взять мнимые части от получившихся произведений.

Получим:

$$H = H_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a) \quad (19.15)$$

и

$$E = H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \quad (19.16)$$

* Отношение $\dot{E}_{\text{отр}}$ к $\dot{H}_{\text{отр}}$ также равно Z_w .

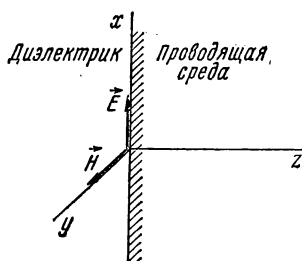


Рис. 19.3

Проанализируем полученные выражения. Амплитуда H равна $H_a e^{-kz}$. Амплитуда E равна $H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz}$. По мере увеличения z множитель e^{-kz} уменьшается по показательному закону. Следовательно, по мере проникновения электромагнитной волны в проводящую среду

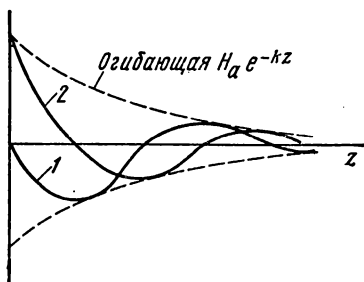


Рис. 19.4

амплитуды E и H уменьшаются по показательному закону. На рис. 19.4 изображены огибающие амплитуд H , построенные на основе $H_a e^{-kz}$. Мгновенное значение H и E определяется аргументом синуса, который в выражении (19.15), например, зависит от z и от ωt . Если принять $\omega t = \text{const}$, то на графике мгновенных значений H в функции от z будет получена кривая 1 (рис. 19.4) при $\omega t + \psi_a = 0$ и кривая 2 при $\omega t + \psi_a = 90^\circ$.

Для того чтобы охарактеризовать, насколько быстро уменьшается амплитуда падающей волны по мере проникновения волны в проводящую среду, вводят понятие глубины проникновения.

§ 19.4. ГЛУБИНА ПРОНИКНОВЕНИЯ И ДЛИНА ВОЛНЫ

Под *глубиной проникновения* Δ понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором амплитуда падающей волны E (или H) уменьшается в $e = 2,7183$ раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения

$$e^{-k\Delta} = e^{-1}.$$

Отсюда следует, что $k\Delta = 1$ или

$$\Delta = \frac{1}{k}. \quad (19.17)$$

Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды (γ и μ) и частоты ω . Так, если электромагнитная волна имеет частоту $f = 5000$ гц и проникает в проводящую среду, у которой $\gamma = 10^7$ (ом \cdot м) $^{-1}$ и $\mu = 10^3$, то *

$$k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14100 \text{ м}^{-1}.$$

Глубина проникновения $\Delta = \frac{1}{k} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м, т. е. на расстоянии в 0,007 см амплитуды H и E снизились в 2,7183 раза.

Под *длиной волны* λ в проводящей среде понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором

* Полагаем, что μ не зависит от величины H . Решение, в котором учтено, что μ является функцией величины H , дано в [52].

фаза колебания изменяется на 2π . Длину волны определяют из уравнения $\lambda k = 2\pi$, откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (19.18)$$

Для рассмотренного числового примера

$$\lambda = \frac{2\pi}{14 \cdot 100} \approx 0,000 \, 445 \, \text{м}.$$

Иногда пользуются понятием фазовой скорости распространения электромагнитной волны в проводящей среде.

Под *фазовой скоростью* понимают скорость, с которой надо было бы перемещаться вдоль оси z , чтобы колебание имело одну и ту же фазу. Фаза колебания определяется выражением $\omega t - kz + \psi_a$.

Производная от постоянной величины есть нуль, поэтому

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0,$$

или

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}};$$

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (19.19)$$

Для рассмотренного числового примера

$$v_{\text{фаз}} = \frac{2\pi \cdot 5 \, 000}{14 \cdot 100} \approx 2,25 \, \text{м/сек}.$$

§ 19.5. МАГНИТНЫЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

В качестве второго примера распространения плоских электромагнитных волн в проводящей среде рассмотрим поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока Φ_m . Лист (рис. 19.5) имеет толщину $2a$, высоту h ($h \gg 2a$) и весьма большую протяженность в направлении, перпендикулярном рисунку. Средняя плотность магнитного потока по сечению листа

$$B_{\text{ср}} = \frac{\Phi_m}{2ah}.$$

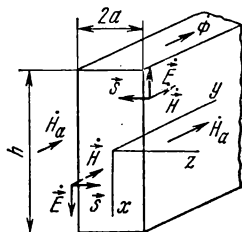


Рис. 19.5

Задача состоит в определении законов изменения \dot{H} и \dot{E} по сечению листа. В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на правой поверхности листа. Обозначим ее через \dot{H}_a и будем полагать известной (в дальнейшем выразим ее через $\dot{B}_{\text{ср}}$).

Так как толщина листа $2a$ много меньше высоты листа h , то искажающим влиянием краев листа на поле можно в первом приближении

пренебречь и считать, что в лист с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна.

Расположим оси координат декартовой системы в соответствии с рис. 19.5. Примем, как и прежде, $\vec{H} = \vec{j}\dot{H}$. Общее решение для \dot{H} таково:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}.$$

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования. При $z = -a$, т. е. для точек, находящихся на левой стороне листа,

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}; \quad (19.20)$$

при $z = +a$

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}. \quad (19.21)$$

Совместное решение (19.20) и (19.21) относительно \dot{C}_1 и \dot{C}_2 дает

$$\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \frac{\dot{H}_a}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_a}{2 \operatorname{ch} pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_a}{2 \operatorname{ch} pa} (e^{pz} + e^{-pz}) = \dot{H}_a \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \quad (19.22)$$

Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = -\vec{i} \left(\frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa} \right) = -\vec{i} \dot{E},$$

где

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}. \quad (19.23)$$

При $z = +a$ напряженность \vec{E} направлена вверх (вдоль оси $-x$); при $z = -a$ — вниз (вдоль оси $+x$, см. рис. 19.5). Вектор Пойнтинга направлен к средней плоскости листа (внутри листа).

Как известно из ч. II учебника, ток, возникающий при прохождении по листу переменного магнитного потока, принято называть вихревым.

Вектор плотности вихревого тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ в любой точке листа коллинеарен с вектором \vec{E} в этой же точке. Магнитная индукция в произвольной точке

$$\vec{B} = \mu_a \dot{H} = \frac{\mu_a \dot{H}_a \operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \quad (19.24)$$

Среднее значение магнитной индукции в листе

$$\vec{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{a} \int_0^a \vec{B} dz = \frac{\mu_a \dot{H}_a \operatorname{sh} pa}{ap \operatorname{ch} pa} = \frac{\mu_a \dot{H}_a \operatorname{th} pa}{ap}. \quad (19.25)$$

Если считать \dot{B}_{cp} известной и равной $\frac{\Phi_m}{2ah}$, то из (19.25) можно найти напряженность поля на поверхности листа:

$$\dot{H}_a = \frac{ap\dot{B}_{cp}}{\mu_a \operatorname{th} pa}. \quad (19.26)$$

Заметим, что аргумент $pa = ka + jka$ является комплексом и $\operatorname{th} pa$ есть гиперболический тангенс от комплексного аргумента; он также является комплексом:

$$\operatorname{th} pa = \operatorname{th}(ka + jka) = \frac{\operatorname{sh} 2ka + j \sin 2ka}{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}. \quad (19.27)$$

Отношение среднего значения магнитной индукции по сечению листа \dot{B}_{cp} к напряженности поля на поверхности листа \dot{H}_a называют *комплексной магнитной проницаемостью*:

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a \operatorname{th} pa}{ap} \quad (\tilde{\mu}_a = \mu_0 \tilde{\mu}).$$

Она зависит от величины μ , частоты ω и толщины листа. При больших значениях аргумента $2ka \quad \operatorname{sh} 2ka \approx \operatorname{ch} 2ka$, значения этих функций намного больше 1. Поэтому при больших значениях $2ka$

$$\operatorname{th} pa \approx \frac{\operatorname{sh} 2ka}{\operatorname{ch} 2ka} \approx 1,$$

и комплексная магнитная проницаемость

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa}.$$

Так, например, при толщине листа $2a = 0,015 \text{ см}$, $\mu = 20\,000$:

$$\gamma = 1,8 \cdot 10^6 \text{ (ом} \cdot \text{м)}^{-1} \quad \text{и} \quad f = 50\,000 \text{ гц};$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}} = 84\,200; \quad p = 84\,200 \sqrt{2} e^{j45^\circ}; \quad ka = 6,31;$$

$$2ka = 12,62;$$

$$\operatorname{th} pa = \frac{\operatorname{sh} 12,62}{\operatorname{ch} 12,62} \approx 1.$$

Следовательно,

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa} = \frac{20\,000 \mu_0}{84\,200 \sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 0,000075} = 2250 e^{-j45^\circ} \cdot \mu_0.$$

Напряженность поля в средней плоскости листа (при $z = 0$) $\dot{H}_{z=0} = \frac{\dot{H}_a}{\operatorname{ch} pa}$. Отношение напряженности поля на краю листа (при $z=a$) к напряженности поля в средней плоскости листа

$$\frac{\dot{H}_a}{\dot{H}_{z=0}} = \operatorname{ch} pa. \quad (19.28)$$

В левой и правой частях (19.28) комплексы. Модуль $\operatorname{ch} pa$ показывает, во сколько раз модуль \dot{H}_a больше модуля $\dot{H}_{z=0}$. Найдем модуль

ch pa. С этой целью запишем два сопряженных комплекса:

$$\text{ch}(ka + jka) = \text{ch } ka \cos ka + j \text{sh } ka \sin ka$$

и

$$\text{ch}(ka - jka) = \text{ch } ka \cos ka - j \text{sh } ka \sin ka.$$

Произведение сопряженных комплексов дает квадрат модуля. Следовательно,

$$|\text{ch } pa|^2 = \text{ch}(ka + jka) \text{ch}(ka - jka) = \frac{1}{2} [\text{ch } 2ka + \cos 2ka]^*.$$

Таким образом,

$$|\text{ch } pa| = \sqrt{\frac{\text{ch } 2ka + \cos 2ka}{2}}. \quad (19.29)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\mu = 100$; $f = 500$ гц, $\gamma = 10^7$ (ом·м)⁻¹. При этом $k = 1410$ м⁻¹.

Найдем отношение напряженности поля в средней плоскости к напряженности поля на поверхности листа при толщине листа:

$$2a = 1 \text{ мм}; 2 \text{ мм}; 4 \text{ мм};$$

$$2ka = 1,41; 2,82; 5,64;$$

$$\frac{1}{|\text{ch } pa|} = 0,91; 0,52; 0,1.$$

Таким образом, напряженность поля в средней плоскости листа может быть много меньше напряженности поля на краю листа.

Явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны, называют *поверхностным эффектом*. Если вдоль листа направлен магнитный поток, то поверхностный эффект часто называют *магнитным*, если вдоль плоской шины направлен переменный ток, то имеющий место при этом поверхностный эффект часто называют *электрическим* поверхностным эффектом. Природа их одна и та же. И дополнительное прилагательное («магнитный» или «электрический») свидетельствует лишь о том, что направлено вдоль листа (шины), поток или ток.

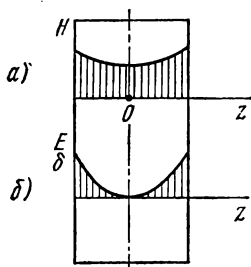


Рис. 19.6

На рис. 19.6 построены две кривые. Кривая рис. 19.6, а характеризует изменение модуля напряженности магнитного поля в функции от z . В средней плоскости листа H до нуля не снижается, так как $\text{ch } 0 \neq 0$. Кривая H строится по уравнению (19.22). Кривая рис. 19.6, б характеризует изменение модуля напряженности электрического поля в функции от z . Эта кривая строится по (19.23); $\text{sh } pz = 0$ и потому $z=0$

* В силу того, что $\text{ch } x + \text{ch } y = 2 \text{ch } \frac{x+y}{2} \text{ch } \frac{x-y}{2}$.

кривая проходит через нуль при $z = 0$. Кривая плотности вихревых токов $\dot{\delta} = \gamma \dot{E}$ качественно повторяет кривую \dot{E} от z (разница только в масштабе).

§ 19.6. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДЕ

По цилиндрическому проводу радиусом a протекает синусоидальный ток I частотой ω . Требуется вывести формулы для определения плотности тока $\dot{\delta}$ и напряженности \dot{H} в любой точке сечения провода. Полагаем обратный провод настолько далеко удаленным от прямого провода, что влияние обратного провода на поле в прямом проводе можно не учитывать.

Решение проведем в цилиндрической системе координат (рис. 19.7). Плотность тока $\dot{\delta}$ направлена по оси z , поэтому $\dot{\delta} = \dot{z}^0 \dot{\delta}$. Воспользуемся уравнениями (19.1) и (19.2), предварительно умножив последнее на γ . Получим:

$$\text{rot } \dot{H} = \dot{\delta}; \quad (19.30)$$

$$\text{rot } \dot{\delta} = -j\omega\gamma\mu_a \dot{H}, \quad (19.31)$$

или

$$\text{rot rot } \dot{\delta} = -j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta},$$

т. е.

$$(\text{grad div } \dot{\delta} - \nabla^2 \dot{\delta}) \dot{z}^0 = (-j\omega\gamma\mu_a) \dot{\delta} \dot{z}^0.$$

В установившемся режиме $\text{div } \dot{\delta} = 0$. Поэтому

$$\nabla^2 \dot{\delta} = j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta}.$$

Раскроем $\nabla^2 \dot{\delta}$ в цилиндрической системе координат [см. формулу (15.30)] и учтем, что $\dot{\delta}$ от α и от z не зависят. Получим

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\dot{\delta}}{dr} + r \frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} \right) = j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta},$$

или

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta}.$$

Обозначим

$$q^2 = -j\omega\gamma\mu_a. \quad (19.32)$$

Тогда

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} + q^2 \dot{\delta} = 0,$$

или

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0 \quad (19.33)$$

Уравнение (19.33) является частным случаем уравнения Бесселя (9.4) при $p = 0$. Роль x играет qr , роль y играет δ .

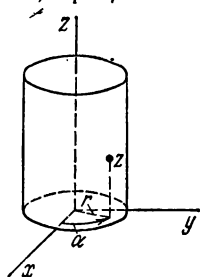


Рис. 19.7

Как известно из курса математики, решение уравнения (19.33) можно записать следующим образом:

$$\delta = \dot{A} J_0(qr) + \dot{B} N_0(qr). \quad (19.34)$$

где \dot{A} и \dot{B} — постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)$ обладает той особенностью, что при $qr = 0$ (т. е. на оси провода при $r = 0$) она обращается в бесконечность. Но из физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому слагаемое $\dot{B} N_0(qr)$ в решении отбрасываем (принимая $\dot{B} = 0$). Следовательно,

$$\delta = \dot{A} J_0(qr). \quad (19.35)$$

В соответствии с уравнением (19.31) и формулами (19.32) и (17.7):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \frac{1}{q^2} \operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = \vec{\alpha}^0 \left(-\frac{1}{q^2} \frac{d\delta}{dr} \right) = \vec{\alpha}^0 \dot{H}; \\ \dot{H} &= -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} [\dot{A} J_0(qr)] = -\frac{\dot{A}}{q^2} \frac{d[J_0(qr)]}{dqr} \frac{dqr}{dr} = \\ &= -\frac{\dot{A}}{q^2} q [-J_1(qr)] = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \quad (19.36)$$

где $J_1(qr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования \dot{A} . С этой целью по закону полного тока найдем \dot{H} на поверхности провода (при $r = a$) и приравняем его значению \dot{H} , которое получается из формулы (19.36):

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi a} &= \frac{\dot{A}}{q} J_1(qa); \\ \dot{A} &= \frac{qi}{2\pi a J_1(qa)}. \end{aligned} \quad (19.37)$$

Подставим найденное значение \dot{A} в формулы (19.35) и (19.36). Получим:

$$\delta = \frac{qi J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)}; \quad (19.38)$$

$$\dot{H} = \frac{i J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (19.39)$$

С помощью формул (19.38) и (19.39) можно определить комплекс плотности тока δ и комплекс напряженности поля \dot{H} в любой точке сечения провода.

Радиус r может принимать значения от 0 до a . Для точки на оси провода $r = 0$; для точек на поверхности $r = a$. Так как $J_0(0) = 1$ (см.

табл. 19.1), то плотность тока на оси провода

$$\delta_0 = \frac{qj}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (19.40)$$

Сопоставление (19.40) с (19.38) дает

$$\delta = \delta_0 J_0(qr). \quad (19.41)$$

Из формулы (19.41) следует, что плотность тока на поверхности провода

$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa). \quad (19.41')$$

Из предыдущего известно, что произведение qr есть комплексное число:

$$qr = r \sqrt{\omega \gamma \mu_a} \sqrt{-j}. \quad (19.42)$$

Бесселевы функции $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$ от комплексного аргумента qr тоже являются комплексами и могут быть представлены в показательной форме:

$$J_0(qr) = b_0 e^{i\beta_0}; \quad (19.43)$$

$$J_1(qr) = b_1 e^{i\beta_1}, \quad (19.44)$$

где b_0 — модуль, а β_0 — аргумент функции $J_0(qr)$; b_1 — модуль, а β_1 — аргумент функции $J_1(qr)$; b_0 , b_1 , β_0 , β_1 , (β_0 и β_1 в градусах) определяют по значению $r\sqrt{\omega \gamma \mu_a}$ с помощью табл. 19.1. При составлении этой таблицы наличие множителя $\sqrt{-j}$ в составе аргумента qr уже учтено.

Т а б л и ц а 19.1

Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$

$r \sqrt{\omega \gamma \mu_a}$	b_0	β_0	b_1	β_1
0	1	0	0	-45,00
1	1,015	14,22	0,501	-37,84
2	1,229	52,28	1,041	-16,73
3	1,95	96,52	1,80	+15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

Пример 215. По стальному проводу [$\gamma = 10^7$ (ом·м) $^{-1}$; $\mu = 10^3$] диаметром 6,04 мм течет синусоидальный ток $I = 100$ а частотой 50 гц. Определить плотность тока на поверхности и на оси провода.

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{\omega \gamma \mu_a} = \sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} = 1985 \text{ м}^{-1};$$

$$q = 1985 \sqrt{-j} = 1985 e^{-j45^\circ};$$

$$a \sqrt{\omega \gamma \mu_a} = 0,00302 \cdot 1985 = 6.$$

По табл. 19.1 находим:

$$J_0(qa) = J_0(6\sqrt{-j}) = 11,5 \cdot e^{j219,6^\circ}, \quad b_0 = 11,5, \quad \beta_0 = 219,6^\circ;$$

$$J_1(qa) = J_1(6\sqrt{-j}) = 10,85 \cdot e^{j133,45^\circ}, \quad b_1 = 10,85, \quad \beta_1 = 133,45^\circ.$$

По формуле (19.40) определяем плотность на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{qj}{2\pi a J_1(qa)} = 96,5 \cdot 10^4 e^{-j178^\circ 30'} \text{ а/м}^2.$$

По формуле (19.42), плотность тока на поверхности провода

$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa) = 111 \cdot 10^5 e^{j41,1^\circ} \text{ а/м}^2.$$

§ 19.7. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ УОМВА—ПОЙНТИНГА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АКТИВНОГО И ВНУТРЕННЕГО ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРОВОДНИКОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

Определение активного и внутреннего индуктивного сопротивлений проводников при переменном токе часто производят с помощью теоремы Уомва — Пойнтинга в комплексной форме. С этой целью подсчитывают поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника на длине в 1 м и делят его на квадрат тока, протекающего по проводнику; получают комплексное сопротивление проводника на единицу длины.

Действительно,

$$-\oint [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*] d\vec{s} = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 Z$$

и

$$Z = R + jX = \frac{-\oint [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*] d\vec{s}}{I^2}.$$

В качестве примера определим активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндрического провода рис. 19.7 на длине 1 м:

$$Z = \frac{\dot{E}_a \vec{H}_a^* \cdot 2\pi a \cdot 1}{I^2} = \frac{V \omega \gamma \mu_a b_0 e^{-j45^\circ} e^{j\beta_0}}{2\pi \gamma \cdot b_1 \cdot e^{j\beta_1}};$$

$$R = \frac{V \omega \gamma \mu_a b_0}{2\pi a \gamma b_1} \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ);$$

$$X = \frac{V \omega \gamma \mu_a b_0}{2\pi a \gamma b_1} \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ).$$

Если два проводника с переменным током расположены близко друг от друга, то магнитное поле одного из них влияет на распределение тока по сечению другого. Это влияние называют *эффектом близости*. Оно приводит к тому, что комплексное сопротивление каждого проводника становится отличным от комплексного сопротивления уединенного проводника.

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКАХ.
ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ**

**§ 20.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКАХ**

Проводимость γ идеального диэлектрика равна нулю. Поэтому в первом уравнении Максвелла (18.1) первое слагаемое правой части ($\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$) выпадает, и уравнения Максвелла для диэлектрика получают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \epsilon_a \vec{E}; \quad (20.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}; \quad (20.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб.}}}{\epsilon_a}.$$

Для однородных и изотропных диэлектриков $\mu_a = \text{const}$ и условие $\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0$ равносильно условию $\operatorname{div} \vec{H} = 0$.

Проведем совместное решение уравнений (20.1) и (20.2). С этой целью возьмем ротор от уравнения (20.1). Получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = j\omega \epsilon_a \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Так как $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, то и $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0$. В свою очередь $\operatorname{rot} \vec{E}$ на основании второго уравнения Максвелла равен $-j\omega \mu_a \vec{H}$. Поэтому

$$-\nabla^2 \vec{H} = j\omega \epsilon_a [-j\omega \mu_a \vec{H}],$$

или

$$\nabla^2 \vec{H} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{H}. \quad (20.3')$$

Произведение $\epsilon_a \mu_a$ измеряется в $\text{сек}^2/\text{м}^2$:

$$[\epsilon_a] [\mu_a] = \frac{a \cdot \text{сек}}{b \cdot \text{м}} \cdot \frac{b \cdot \text{сек}}{a \cdot \text{м}} = \text{сек}^2/\text{м}^2,$$

т. е. $\epsilon_a \mu_a$ имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости, и потому можно принять $\epsilon_a \mu_a = \frac{1}{v^2}$. После введения такого обозначения уравнение (20.3') получает следующий вид:

$$\nabla^2 \vec{H} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \vec{H}. \quad (20.3)$$

Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси z , в соответствии с предыдущим можно принять, что

напряженность магнитного поля направлена вдоль оси y , т. е. принять, что

$$\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}. \quad (20.4)$$

Так как для плоской волны \dot{H} зависит только от координаты z и не зависит от координат x и y , то уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\vec{j}\dot{H}$$

приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2\dot{H}}{dz^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\dot{H}. \quad (20.5)$$

Уравнению (20.5) соответствует характеристическое уравнение $\rho^2 = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2$, корни которого $\rho_1 = j\frac{\omega}{v}$ и $\rho_2 = -j\frac{\omega}{v}$.

Общее решение уравнения (20.5):

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} + \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}, \quad (20.6)$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 — комплексные коэффициенты, зависящие от граничных условий. Как и всякое комплексное число, их можно представить в показательной форме:

$$C_1 = C_1 e^{j\psi_0} \quad \text{и} \quad C_2 = C_2 e^{j\psi_n}.$$

Слагаемое $\dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ представляет собой падающую волну, продвигающуюся в положительном направлении оси z ; слагаемое $\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}$ — отраженную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z .

Напряженность электрического поля \vec{E} найдем по уравнению (20.1):

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \text{rot } \vec{H}.$$

Как следует из предыдущего [см. формулу (19.10)], для плоской волны

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} \left(-\frac{d\dot{H}}{dz} \right).$$

Поэтому

$$\vec{E} = \vec{i} \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left[\left(-j\frac{\omega}{v} \right) \left(\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} - \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} \right) \right] \right\}.$$

Величину $\frac{1}{\epsilon_a v} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\epsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ называют *волновым сопротивлением диэлектрика*:

$$Z_v = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Волновое сопротивление является чисто действительным числом (измеряется в омах):

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{а}}}{\epsilon_{\text{а}}}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} = \sqrt{\frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м} \cdot \mu}{8,86 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м} \cdot \epsilon}} = 377 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ ом.}$$

Оно не зависит от угловой частоты колебаний ω . Для вакуума $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$, поэтому $Z_{\text{в}} = 377 \text{ ом}$. Следовательно,

$$\vec{E} = \vec{i} \dot{E}, \quad (20.7)$$

где

$$\dot{E} = Z_{\text{в}} \dot{C}_2 e^{-i \frac{\omega}{v} z} - Z_{\text{в}} \dot{C}_1 e^{i \frac{\omega}{v} z}.$$

Присутствие единичного орта оси x (орта \vec{i}) в уравнении (20.7) свидетельствует о том, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x .

Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в диэлектрике, как и для проводящей среды, \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны: \vec{H} направлено по оси y , \vec{E} — по оси x .

Запишем выражения для мгновенных значений H и E падающей волны. Чтобы получить мгновенное значение падающей волны H , необходимо комплекс $\dot{H} = C_2 e^{i\psi_n} e^{-i \frac{\omega}{v} z}$ умножить на $e^{j\omega t}$ и от произведения взять мнимую часть. В результате получим

$$H = C_2 \sin \left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z \right); \quad (20.8)$$

аналогично,

$$E = C_2 Z_{\text{в}} \sin \left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z \right). \quad (20.9)$$

По мере продвижения падающей волны вдоль оси z амплитуда E и амплитуда H остаются неизменными, т. е. затухания волны не проис-

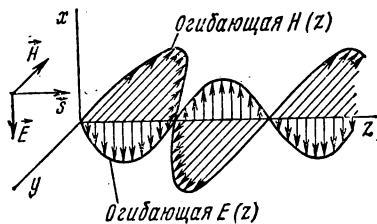


Рис. 20.1

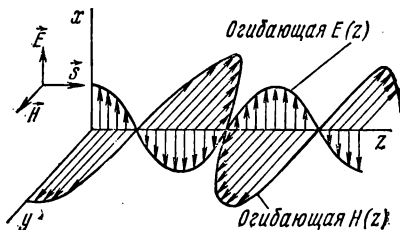


Рис. 20.2

ходит, так как в диэлектрике нет токов проводимости и нет выделения энергии в виде теплоты.

На рис. 20.1 изображены пространственные кривые, представляющие собой графики мгновенных значений H и E . Эти графики построены по уравнениям (20.8) и (20.9) для момента времени $\omega t + \psi_n = 0$.

Для более позднего момента времени, например для $\omega t + \psi_n = 90^\circ$, аналогичные кривые изображены на рис. 20.2.

Как видно из рис. 20.1 и 20.2, вектор \vec{E} при его изменении остается направленным в плоской волне вдоль оси x , а вектор \vec{H} — вдоль оси y , сдвига по фазе между H и E нет.

Проверим правильность построения графика $E = f(z)$ на рис. 20.1. Кривые на рис. 20.1 построены при $\omega t + \psi_n = 0$, поэтому уравнением кривой $E = f(z)$ является выражение [в соответствии с (20.9)]

$$E_{\text{при } \omega t + \psi_n = 0} = C_2 Z_B \sin\left(-\frac{\omega}{v} z\right).$$

При $z = 0$ $E = 0$. В интервале от $\frac{\omega}{v} z = 0$ до $\frac{\omega}{v} z = \pi$ E отрицательно.

При $\frac{\omega}{v} z = \pi$ $E = 0$ и т. д.

Вектор Пойнтинга падающей волны направлен вдоль оси z . Модуль S изменяется по закону

$$S = C_2^2 Z_B \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_n\right).$$

Так как

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

то

$$S = \frac{C_2^2 Z_B}{2} \left[1 - \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega}{v} z + 2\psi_n\right) \right],$$

т. е. вектор Пойнтинга имеет постоянную составляющую $\frac{C_2^2 Z_B}{2}$ и переменную, изменяющуюся во времени с двойной угловой частотой.

Фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике

$$v_{\text{фаз}} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}. \quad (20.10)$$

Если волна распространяется в вакууме, то $\epsilon_a = \epsilon_0$ и $\mu_a = \mu_0$ и тогда фазовая скорость равна скорости света:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}}} \approx 300\,000 \text{ км/сек.}$$

Таким образом, фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике очень велика, и она несоизмеримо больше фазовой скорости плоской электромагнитной волны в проводящей среде.

Длина волны λ есть расстояние вдоль оси z , на котором фаза колебания изменится на 2π . Ее находят из соотношения

$$\frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{v}{f}. \quad (20.11)$$

Из (20.11) видно, что длина волны в диэлектрике обратно пропорциональна частоте f . Так, при $f = 10^8$ Гц

$$\lambda = \frac{300\,000 \text{ км/сек}}{10^8 \text{ сек}^{-1}} = 300 \text{ м.}$$

Пример 216. В плоскости $z = 0$ напряженность электрического поля плоской волны изменяется по закону $E = E_m \sin(\omega t + \psi_n)$, где $E_m = 0,2$ В/м , $\omega = 10^8 \text{ сек}^{-1}$ и $\psi_n = 30^\circ$; диэлектрик — воздух.

Записать выражения для мгновенного значения напряженности магнитного поля и вектора Пойнтинга в плоскости $z = 0,5$ км .

Решение.

$$H = \frac{E_m}{Z_n} \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right); \quad \frac{E_m}{Z_n} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{377} = 5,315 \cdot 10^{-4} \text{ А/м};$$

$$\frac{\omega}{v} z = \frac{10^8 \cdot 0,5}{3 \cdot 10^8} = 1,665 \text{ рад} \approx 95^\circ 20'.$$

Следовательно,

$$H = 5,315 \cdot 10^{-4} \sin(10^8 t - 65^\circ 20') \text{ А/м.}$$

Мгновенное значение вектора Пойнтинга при $z = 0,5$ км

$$S = \frac{E_m H_m}{2} \left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\psi_n - \frac{2\omega z}{v}\right) \right] =$$

$$= 5,315 \cdot 10^{-5} [1 - \cos(2 \cdot 10^8 t - 130^\circ 40')] \text{ Вт/м}^2.$$

§ 20.2. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ ПОЛУПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Кратко рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородных и изотропных полупроводящих средах (морской воде, почве, ионосфере, ферритах). При достаточно высоких частотах токи проводимости и токи смещения в полупроводящих средах оказываются соизмеримыми. Уравнения $\text{rot } \vec{H} = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \vec{E}$ и $\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}$ после введения обозначений $\epsilon_1 = \epsilon_a - j\frac{\gamma}{\omega} = \epsilon_a - j\epsilon'$, где $\epsilon' = \frac{\gamma}{\omega}$, для плоской волны приводятся к следующему:

$$\frac{d^2 \vec{H}}{dz^2} = -\omega^2 \epsilon_1 \mu_a \vec{H}. \quad (\text{а})$$

Последнему соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -\omega^2 \epsilon_1 \mu_a$. Решение уравнения (а)

$$\vec{H} = C_1 e^{p_1 z} + C_2 e^{p_2 z},$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий:

$$p_1 = \beta + j\frac{\omega}{v_1} \text{ и } p_2 = \beta - j\frac{\omega}{v_1}.$$

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}\right)^2}}$$

и фазовая скорость

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}\right)^2}}}$$

зависят от величины $\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}$.

Напряженность электрического поля для падающей волны

$$\dot{E} = H Z_B,$$

где волновое сопротивление

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\epsilon'}{\epsilon_a}}}.$$

Заметим, что параметры ϵ , γ , μ полупроводящих сред являются функцией частоты и комплексными числами (ср. с § 18.8). Эти зависимости должны быть известны перед проведением расчета. Для ферритов решение приближенно, так как μ ферритов зависит еще и от величины напряженности магнитного поля.

Среды с потерями, для которых фазовая скорость и коэффициент затухания зависят от частоты, называют *диспергирующими*.

В заключение коснемся понятия групповой скорости. Оно используется главным образом при рассмотрении вопроса о распространении радиосигналов в среде с потерями. Так как радиосигнал образован совокупностью волн, имеющих разные частоты, а β и v_1 зависят от ω , то огибающая импульса при его движении в среде с потерями непрерывно деформируется. *Групповой скоростью* называют скорость перемещения максимума огибающей сигнала (импульса), так как скорость перемещения этого максимума характеризует скорость перемещения энергии группы волн.

§ 20.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ПОЛУПРОВОДЯЩИХ СРЕД

Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред обобщают граничные условия на границе раздела двух идеальных диэлектриков (см. § 15.24) и граничные условия на границе раздела двух проводящих сред (см. § 16.6).

Запишем граничные условия для синусоидально изменяющегося поля (потому над \dot{E} ставим точку), частным случаем которого является поле, неизменное во времени. Формула (15.34), совпадающая с формулой (16.10), справедлива и для полупроводящей среды; только, учитывая синусоидальный характер поля во времени, ставим точки над \dot{E} :

$$\dot{E}_{1t} = \dot{E}_{2t}. \quad (20.12)$$

Формулы (15.35) и (16.11) различны и потому следует образовать более общее выражение, частными случаями которого были бы эти формулы. С этой целью возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{\vec{E}}.$$

Так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} \equiv 0$, то и

$$\operatorname{div} (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{\vec{E}} = 0. \quad (20.13)$$

На границе раздела двух полупроводящих сред выделим прямой сплюснутый параллелепипед очень малых размеров. Донышко его находится в одной среде, а крышка — в другой. Из (20.13) следует, что

$$(\gamma_1 + j\omega\epsilon_{a1}) \dot{E}_{1n} = (\gamma_2 + j\omega\epsilon_{a2}) \dot{E}_{2n}. \quad (20.14)$$

Формулы (20.12) и (20.14) представляют собой искомые граничные условия.

§ 20.4. ПЕРЕХОДНЫЕ И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕСОВЕРШЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Процессы в полупроводящих средах должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} \quad (20.15)$$

и теореме Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}. \quad (20.16)$$

В соответствии с законом Ома в уравнение (20.15) подставим $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$:

$$\vec{E} \operatorname{grad} \gamma + \gamma \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t}. \quad (20.15')$$

В уравнении (20.16) заменим \vec{D} на $\epsilon_a \vec{E}$:

$$\operatorname{grad} \epsilon_a \vec{E} + \epsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}}. \quad (20.16')$$

Из (20.16') найдем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_a}{\epsilon_a}. \quad (20.17)$$

Подставим (20.17) в (20.15'):

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_a - \vec{E} \operatorname{grad} \gamma. \quad (20.18)$$

Преобразуем правую часть (20.18):

$$\vec{E} \gamma \frac{1}{\epsilon_a} \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{grad} \epsilon_a - \frac{\epsilon_a}{\gamma^2} \operatorname{grad} \gamma \right) = \vec{\delta} \frac{\gamma}{\epsilon_a} \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} \right),$$

или

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \vec{\delta} \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} \right). \quad (20.18')$$

Уравнение (20.18') является дифференциальным уравнением относительно свободного объемного заряда. Оно описывает и переходные и установившиеся процессы в самой полупроводящей среде (не идеальном диэлектрике).

В установившемся режиме $\rho_{\text{своб}} = \vec{\delta} \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} \right)$. Если среда однородна $\left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} = \text{const} \right)$, то в установившемся режиме свободный объемный заряд не накапливается, т. е. $\rho_{\text{своб}} = 0$. Переходные процессы в однородной полупроводящей среде описываются уравнением $\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = 0$. Если к началу переходного процесса при $t = 0_-$ $\rho_{\text{своб}} = \rho_{\text{своб}}(0_-)$, то объемный заряд в этой точке поля рассасывается по экспоненте

$$\rho_{\text{своб}} = \rho_{\text{своб}}(0_-) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_a} t}.$$

Время уменьшения $\rho_{\text{своб}}$ в $e = 2,73$ раза называют *временем релаксации*. В несовершенной изоляции время релаксации может составлять от нескольких единиц до нескольких десятков секунд. Если находящийся под напряжением конденсатор с несовершенной изоляцией отключить от источника напряжения, затем на некоторое время замкнуть проводником накоротко и затем этот проводник убрать, то на зажимах отключенного от сети конденсатора вновь появится напряжение за счет рассасывания объемного заряда. В металлах время релаксации составляет около 10^{-17} сек., т. е. рассасывание объемного заряда происходит практически мгновенно.

**§ 20.5. О РАСЧЕТЕ ПОЛЕЙ В НЕСОВЕРШЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ
И ВЯЗКИХ СРЕДАХ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ
СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ**

В соответствии с § 20.3 в синусоидально изменяющемся поле проводимость является комплексным числом $\tilde{\gamma} = \gamma + j\omega\epsilon_a$.

Изменяющийся во времени ток, протекающий по несовершенному диэлектрику, создает в нем изменяющееся во времени магнитное поле. Однако если последнее слабо, то его влиянием на электрическое поле в первом приближении можно пренебречь и рассчитывать электрическое поле в полупроводящих средах по формулам для статических полей в проводящих средах, вводя в соответствующие формулы комплексную $\tilde{\gamma}$ вместо вещественной γ . А так как формулы для расчета электрических полей в проводящих средах в условиях статики следуют из формул для расчета соответствующих электростатических задач (см. § 15.32—15.36, 15.39, 15.40 и др.), то надлежит использовать формулы электростатики, заменяя в них ϵ на $\tilde{\gamma}$.

Аналогичный подход применяют при расчетах квазистатических электрических полей в вязких диэлектриках, вводя комплексное $\tilde{\epsilon}_a$, и при расчетах квазистатических магнитных полей в магнитно вязких материалах при отсутствии вихревых токов (в ферритах), вводя комплексное $\tilde{\mu}_a$.

Глава двадцать первая

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

§ 21.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ \vec{A} И φ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ И ИХ РЕШЕНИЕ

Переменное электромагнитное поле создается токами и зарядами, зависящими не только от координат, но и от времени. Рассмотрим, каким уравнениям подчиняются векторный потенциал \vec{A} и скалярный потенциал φ в переменном электромагнитном поле. С этой целью выпишем систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (21.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (21.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (21.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}^*}{\epsilon_a}. \quad (21.4)$$

Дополним ее уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (21.5)$$

и выражением магнитной индукции через векторный потенциал

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (21.6)$$

Для того чтобы составить уравнение относительно векторного потенциала, необходимо проделать ряд выкладок. Умножив (21.1) на μ_a , получим

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} + \mu_a \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В последнем уравнении заменим $\mu_a \epsilon_a$ на $\frac{1}{v^2}$:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (21.7)$$

В (21.7) вместо \vec{B} подставим \vec{A} , получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

* В дальнейшем индекс «своб» писать не будем.

или

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (21.8)$$

Затем в (21.2) вместо $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ подставим $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (операция взятия ротора и дифференцирование во времени не зависят друг от друга и потому взаимно переместимы). Тогда (21.2) приобретает следующий вид:

$$\text{rot } \vec{E} = - \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (21.9)$$

Если равны роторы от двух функций (от \vec{E} и от $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$), то сами функции равны с точностью до градиента от некоторой скалярной функции. Последнее потому, что ротор от градиента скалярной функции тождественно равен нулю ($\text{rot grad } \varphi \equiv 0$).

Таким образом,

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (21.10)$$

В (21.10) в качестве градиента скалярной функции взят $\text{grad } \varphi$. Объясняется это тем, что уравнение (21.10) должно быть справедливо и для статического поля. А так как в статическом поле $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, то выражение, которое получается из (21.10) для статического поля, должно совпадать с известным из электростатики выражением

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi.$$

В соответствии с (21.10) можно сказать, что в переменном электромагнитном поле напряженность электрического поля имеет две составляющие. Одна из них $(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ обусловлена переменным магнитным полем, другая $(-\text{grad } \varphi)$ — неподвижными зарядами *. Возьмем циркуляцию от вектора \vec{E} по любому замкнутому контуру:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A} d\vec{l} - \oint \text{grad } \varphi d\vec{l}.$$

Циркуляция от градиента φ тождественно равна нулю, а $\oint \vec{A} d\vec{l}$ в соответствии с уравнением (17.26) есть магнитный поток Φ , пронизывающий выбранный контур. Таким образом,

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (21.10')$$

т. е. из (21.10) получили (21.10') — закон электромагнитной индукции.

* Первую из них можно назвать вихревой составляющей, вторую — потенциальной (или кулоновой).

В уравнении (21.8) участвует производная $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Найдем ее из (21.10):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и подставим в (21.8):

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.11)$$

Вектор-потенциал представляет собой функцию, ротор которой равен \vec{B} . В гл. XVII отмечалось, что вектор-потенциал \vec{A} должен быть подчинен определенному условию, а именно: в постоянном магнитном поле $\text{div} \vec{A} = 0$, т. е. линии вектора представляют собой замкнутые сами на себя линии.

В переменном электромагнитном поле таким требованием к вектору-потенциалу является требование

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для неизменного во времени поля условие (21.12) сводится к условию $\text{div} \vec{A} = 0$. В дальнейшем будет показано, что условие (21.12) является уравнением непрерывности $\text{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (§ 18.3), записанным в иной форме.

Вместе с тем уравнение (21.12) свидетельствует о том, что в переменном электромагнитном поле между векторным потенциалом \vec{A} и скалярным потенциалом φ существует определенная связь и что функции A и φ являются зависящими друг от друга.

С учетом (21.12) уравнение (21.11) приобретает вид *

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (21.13)$$

Если \vec{A} не является функцией t , то $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ и уравнение (21.13) переходит в уравнение Пуассона.

Уравнение (21.13) является неоднородным векторным волновым уравнением. Его часто записывают в иной форме:

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (21.13')$$

Оператор $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют четырехмерным лапласианом (за четвертое измерение принимают время t).

* Уравнение (21.13) принято называть уравнением Даламбера.

Выясним, какому уравнению в переменном электромагнитном поле подчиняется потенциал φ . С этой целью в уравнение (21.4) вместо напряженности \vec{E} подставим ее эквивалент по (21.10):

$$\operatorname{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_a} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Но $\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и, следовательно, $-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

В свою очередь $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$. Поэтому уравнение (21.4) приобретает следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (21.14)$$

Таким образом, в переменном электромагнитном поле скалярный потенциал φ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (21.14). Если поле статическое и потенциал не является функцией времени, то $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ и уравнение (21.14) переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$, обсуждавшееся в разделе электростатики.

Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (21.12) совпадает с уравнением непрерывности (18.3), сделаем следующие выкладки.

Применим оператор \square^2 к обеим частям уравнения (21.12):

$$\square^2 \operatorname{div} \vec{A} = -\square^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Внесем оператор \square^2 под знак дивергенции и под знак производной по времени. Получим

$$\operatorname{div} \square^2 \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \square^2 \varphi. \quad (21.15)$$

В соответствии с (21.13') в (21.15) вместо $\square^2 \vec{A}$ подставим $-\mu_a \vec{\delta}$, а вместо $\square^2 \varphi$ подставим $-\frac{\rho}{\epsilon_a}$. Будем иметь

$$-\operatorname{div} \mu_a \vec{\delta} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (21.15')$$

Вынесем μ_a из-под знака дивергенции, а ϵ_a — из-под знака производной по времени, поменяем знаки и разделим обе части равенства на μ_a :

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{1}{v^2 \epsilon_a \mu_a} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (21.16)$$

Так как $\frac{1}{v^2 \epsilon_a \mu_a} = 1$, то уравнение (21.16) есть уравнение непрерывности $\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Обсудим вопрос о решении уравнения (21.14). Запишем решение уравнения для двух частных случаев: для случая, когда $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$,

но $\frac{\rho}{\epsilon_a} \neq 0$, и когда $\frac{\rho}{\epsilon_a} = 0$, но $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \neq 0$. После этого на основании физических соображений запишем решение уравнения (21.14) в общем виде, так что оно будет переходить в известные решения для частных случаев.

Если $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$, то уравнение (21.14) переходит в уравнение Пуассона, общее решение которого известно из раздела электростатики (см. § 15.19):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{R}.$$

Составляющая потенциала φ от элементарного заряда ρdV равна

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{\rho dV}{R}.$$

При $\rho = 0$ уравнение (21.14) приобретает вид волнового уравнения

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (21.17)$$

В частном случае для плоской волны φ зависит только от пространственной координаты z :

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (21.17')$$

Решением (21.17') является выражение

$$\varphi = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right).$$

Причем функции f_1 и f_2 могут быть любыми, лишь бы они позволяли производить над собой двукратное дифференцирование по t и по z . Вид функций определяется граничными условиями.

Напомним, что о волновом уравнении (21.17') уже говорилось при рассмотрении вопроса о переходных процессах в линиях с распределенными параметрами в гл. XIV.

$f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ представляет собой падающую волну, распространяющуюся в направлении оси $+z$, функция $f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$ есть отраженная волна,двигающаяся в направлении оси $-z$.

Чтобы определить, в каком направлении перемещается волна $f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$, надо выяснить, как должно изменяться z с увеличением времени t , чтобы аргумент функции $f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ оставался постоянным, например равным нулю. Если принять $t - \frac{z}{v} = 0$, то $z = vt$, т. е. с ростом t увеличивается z . Это означает, что волна распространяется вдоль положительного направления оси z .

Покажем, что в сферической системе координат уравнению (21.17) удовлетворяет функция $\frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}$, где R — координата сферической си-

стемы; v — скорость распространения волны. Действительно, в сферической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Так как в силу сферической симметрии φ является функцией только R , то $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$. Поэтому

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right). \quad (21.17'')$$

Если в (21.17'') подставить $\frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}$, то окажется, что

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{Rv^2} f'' \left(t - \frac{R}{v} \right);$$

$\frac{d^2 \varphi}{dR^2}$ также равно $\frac{1}{Rv^2} f'' \left(t - \frac{R}{v} \right)$.

Таким образом, функция $\frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}$ удовлетворяет уравнению (21.17) в сферической системе координат.

Для неизменного во времени поля (см. § 15.19) $\varphi = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R}$ и в то же время решение для φ в пространстве, не занятом зарядами,

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}.$$

Сопоставляя эти два выражения, находим

$$f\left(t - \frac{R}{v}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi\epsilon_a}.$$

Таким образом, составляющая потенциала от заряда $\rho(t)dV$, изменяющегося во времени, равна

$$\frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (21.18)$$

Выражение $\rho\left(t - \frac{R}{v}\right)$ следует понимать так: объемный заряд ρ является функцией аргумента $\left(t - \frac{R}{v}\right)$. Результирующее значение потенциала получим, если просуммируем составляющие потенциала от зарядов, распределенных в объеме V :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (21.19)$$

Обсудим решение уравнения (21.13). В общем случае уравнение (21.13) можно разбить на три уравнения для трех проекций вектора-потенциала *. Каждое из уравнений в проекциях будет составлено относительно скалярной величины (проекция вектора есть величина скалярная). Общее решение для каждой из проекций проводится точно так же, как проводилось решение для скалярной величины φ , но вместо объемного заряда будет участвовать соответствующая проекция плотности тока и μ_a вместо $\frac{1}{\epsilon_a}$.

После умножения решений на соответствующие орты и сложения окажется, что составляющая вектора потенциала от элемента тока $\vec{\delta}dV$ в некоторой точке пространства, удаленной от элемента тока на расстояние R ,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta} \left(t - \frac{R}{v} \right) dV}{4\pi R}. \quad (21.20)$$

Для получения результирующего значения \vec{A} необходимо геометрически просуммировать составляющие от всех элементов тока:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} \left(t - \frac{R}{v} \right) dV}{R}. \quad (21.21)$$

§ 21.2. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обсудим, в чем состоит физический смысл выражений (21.18) и (21.20). Электромагнитная волна распространяется со скоростью v . Расстояние R она пройдет за время $\frac{R}{v}$. Поэтому значение составляющей потенциала φ в переменном электромагнитном поле в некоторой точке, удаленной от заряда на расстояние R в момент времени t , определяется значением заряда в момент времени $\left(t - \frac{R}{v} \right)$. Точно так же следует понимать и выражение

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta} \left(t - \frac{R}{v} \right) dV}{4\pi R}.$$

В силу конечной скорости распространения электромагнитной волны значение вектора-потенциала от элемента тока $\vec{\delta}dV$ в точке, удаленной от элемента тока на расстояние R , изменяется с запаздыванием во времени на величину $\frac{R}{v}$. Поэтому потенциалы переменного электромагнитного поля называют *запаздывающими потенциалами*.

* Подобно тому, как это сделано на стр. 610.

Так как скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике очень велика ($v = 300\,000$ км/сек), то запаздывание проявляется заметно только при значительных R . При малых R запаздывание настолько незначительно, что им практически можно пренебречь.

Наиболее часто понятием запаздывающих потенциалов пользуются в радиотехнике при изучении вопросов, связанных с излучением электромагнитной энергии.

§ 21.3. КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В гл. XVII [см. уравнение (17.27)] отмечалось, что составляющая векторного потенциала от элемента линейного тока $i \vec{dl}$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i \vec{dl}}{R}.$$

В переменном электромагнитном поле с учетом явления запаздывания

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i \left(t - \frac{R}{v} \right)}{R} \vec{dl}.$$

Ток i может изменяться во времени по любому закону. Наиболее интересен с практической точки зрения синусоидальный закон изменения тока во времени, поэтому полагаем

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Ток можно представить в показательной форме $I_m e^{j\omega t}$, где $I_m = I_m e^{j\psi}$ (строго говоря, надо было бы написать еще символ взятия мнимой части, но его часто опускают).

Ток $i \left(t - \frac{R}{v} \right) = I_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) + \psi \right]$ или в показательной форме $I_m e^{j\omega \left(t - \frac{R}{v} \right)}$.

Следовательно, комплексную амплитуду вектор-потенциала от элемента тока $\vec{dl} I_m \sin(\omega t + \psi)$ записывают так:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \cdot \frac{I_m e^{j\omega \left(t - \frac{R}{v} \right)}}{R} \vec{dl}. \quad (21.22)$$

Аналогичным образом, если электрические заряды, создающие поле, меняются во времени по синусоидальному закону, то комплексная амплитуда потенциала ϕ от объемного заряда $\rho_m e^{j\omega t} dV$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{\rho_m e^{j\omega \left(t - \frac{R}{v} \right)}}{R} dV. \quad (21.23)$$

Пример 217а. Найти закон изменения векторного потенциала от тока $100 \sin(10^5 t + 30^\circ)$ а, протекающего по элементу проводника

длиной $dl = 30$ см, в точке, удаленной от элемента тока на расстояние $R = 100$ км; $\mu_a = \mu_0$.

Решение.

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\mu_0 I_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) + \psi \right] dl}{4\pi R} = \\ &= \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 0,3 \cdot 100 \sin \left[10^5 \left(t - \frac{100}{300\,000} \right) + 30^\circ \right]}{4\pi \cdot 100 \cdot 10^3} = \\ &= 3 \cdot 10^{-11} \sin (10^5 t - 80^\circ) \text{ в} \cdot \text{сек/м} \\ (33,3 \text{ рад} \approx 110^\circ; \quad -110^\circ + 30^\circ = -80^\circ). \end{aligned}$$

§ 21.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим вопрос об излучении электромагнитной энергии элементом тока. Пусть по отрезку проводника длиной dl , находящемуся в воздухе ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$), протекает ток $I_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 21.1). Далее будем пользоваться цилиндрической и отчасти сферической системами координат. Ось z цилиндрической системы направим вдоль проводника. Положительное направление тока по проводнику пусть совпадает с положительным направлением оси z .

Найдем значение вектора-потенциала в произвольной точке, удаленной от элемента тока на расстояние R . В соответствии с (21.22)

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{i}_m e^{j\omega \left(t - \frac{R}{v} \right)} d\vec{l}}{R}$$

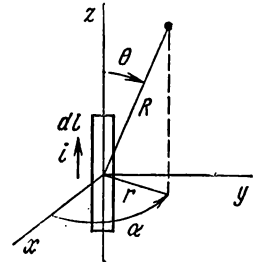


Рис. 21.1

или, если исключить множитель $e^{j\omega t}$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{i}_m e^{-j\frac{R}{v}\omega} d\vec{l}}{R}.$$

Направление $d\vec{A}^*$ совпадает с направлением вектора $d\vec{l}$ (вдоль оси z).

Найдем магнитную индукцию в произвольной точке поля:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Раскроем ротор в цилиндрической системе координат:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \vec{r}^\circ \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{r \partial \alpha} - \frac{\partial \dot{A}_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{\alpha}^\circ \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial (r \dot{A}_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_r}{r \partial \alpha} \right).$$

* В дальнейшем для сокращения записи вместо $d\vec{A}$ будем писать \vec{A} .

Так как $\dot{\vec{A}}$ имеет единственную составляющую \dot{A}_z и она зависит только от R и в силу симметрии поля не зависит от α , то

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\alpha} \circ \left(-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right). \quad (21.24)$$

Выражение (21.24) означает, что магнитная индукция имеет α -е направление.

Для нахождения комплекса магнитной индукции надо вычислить $-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r}$; A_z зависит в явном виде от R , а не от r . Поэтому

$$-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (21.25)$$

Для любой точки пространства справедливо, очевидно, соотношение, вытекающее из теоремы Пифагора,

$$z^2 + r^2 = R^2. \quad (21.26)$$

Продифференцируем (21.26) по r , получим

$$2r = 2R \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin \theta. \quad (21.27)$$

Составляющая A_z состоит из произведения двух функций R : функции $e^{-j\omega \frac{R}{v}}$ и функции $\frac{1}{R}$. Поэтому

$$\dot{B} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \dot{I}_m dl}{4\pi} \sin \theta \left[-\frac{1}{R^2} e^{-j\omega \frac{R}{v}} - j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right],$$

или

$$\dot{B} = \frac{\mu_0 \dot{I}_m dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{R^2} + \frac{j\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right]. \quad (21.28)$$

Выражение (21.28) можно переписать и в ином виде, перейдя к мгновенным значениям:

$$B = \frac{\mu_0 I_m dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{\sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right)}{R^2} + \frac{\omega}{vR} \cos \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) \right]. \quad (21.28')$$

Выражение (21.28') позволяет сделать вывод, что в любой точке пространства магнитная индукция от элемента переменного тока имеет две составляющие, одна из них убывает обратно пропорционально квадрату радиуса и изменяется по закону синуса во времени, другая убывает обратно пропорционально первой степени радиуса и изменяется по закону косинуса во времени.

Найдем закон изменения напряженности электрического поля. В соответствии с первым уравнением Максвелла

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (21.29)$$

Так как $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, то

$$\vec{H} = \vec{\alpha} \circ \left[\frac{j_m dl \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{-j\omega \frac{R}{v}}{R^2} + \frac{j\omega e \frac{R}{v}}{vR} \right) \right]. \quad (21.30)$$

Далее целесообразно перейти к сферической системе координат. Проекция $\operatorname{rot} \vec{H}$ в сферической системе таковы:

$$\operatorname{rot}_R \vec{H} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} \right];$$

$$\operatorname{rot}_\theta \vec{H} = \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial H_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\alpha);$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{H} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right].$$

Так как $\dot{H}_\theta = 0$, $\dot{H}_R = 0$, то

$$\operatorname{rot}_R \vec{H} = \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\alpha); \quad (21.31)$$

$$\operatorname{rot}_\theta \vec{H} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\alpha); \quad (21.32)$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{H} = 0.$$

Найдем проекции $\operatorname{rot} \vec{H}$ на направление R :

$$\operatorname{rot}_R \vec{H} = \frac{j_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^3} + \frac{j_m dl \cos \theta j\omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v}. \quad (21.33)$$

В свою очередь проекция $\operatorname{rot} \vec{H}$ на направление θ по формуле (21.32)

$$\operatorname{rot}_\theta \vec{H} = \frac{j_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^3} + \frac{j_m dl \sin \theta j\omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^2 v} - \frac{j_m dl \sin \theta \omega^2 e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R v^3}. \quad (21.34)$$

Для того чтобы получить проекции \vec{E} на направление R и θ , необходимо соответствующие проекции $\operatorname{rot} \vec{H}$ разделить на $j\omega\epsilon_0$ [см. уравнение (21.29)]:

$$\dot{E}_\theta = \frac{-j j_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^3 \omega \epsilon_0} + \frac{j_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi \epsilon_0 R^2 v} + \frac{j j_m dl \sin \theta \omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R v^2 \epsilon_0} \quad (21.35)$$

и

$$\dot{E}_R = \frac{-j j_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^3 \omega \epsilon_0} + \frac{j_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v \epsilon_0}. \quad (21.36)$$

Таким образом, напряженность электрического поля имеет две составляющие: одна из них направлена по θ , другая — по R ; E_θ содержит три слагаемых [см. уравнение (21.35)], изменяющихся обратно пропорционально соответственно третьей, второй и первой степени расстояния R ; E_R состоит из двух слагаемых, изменяющихся обратно пропорционально R^3 и R^2 . Частное $\frac{v}{\omega} = \frac{v}{2\pi f} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Отношение модуля первого слагаемого в (21.33) к модулю второго равно $\frac{\lambda}{2\pi R}$.

Если $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, то первым слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым; если $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$, то, наоборот, можно пренебречь вторым слагаемым. Аналогичные соотношения имеют место между модулями слагаемых в (21.34).

Принято все поле делить на ближнюю, среднюю и дальнюю зоны. Для ближней зоны $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$. Для дальней зоны $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$. В средней зоне R соизмеримо с $\frac{\lambda}{2\pi}$. В соответствии с этим для ближней зоны

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= \vec{\alpha}^\circ \frac{I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^2}; \\ \dot{E}_\theta &= -j \frac{I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^3 \omega \epsilon_0}; \\ \dot{E}_R &= -j \frac{I_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^3 \omega \epsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (21.37)$$

Для дальней зоны

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= \vec{\alpha}^\circ \frac{j I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2R\lambda}; \\ \dot{E}_\theta &= \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} j I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2R\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (21.38)$$

Запишем мгновенные значения H и E для дальней зоны:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I_m dl \sin \theta}{2R\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi\right); \\ E_\theta &= \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_m dl \sin \theta}{2R\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi\right). \end{aligned} \right\} \quad (21.39)$$

Таким образом, в дальней зоне, т. е. в зоне, для которой $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, напряженность магнитного поля имеет только одну α -ю составляющую, а напряженность электрического поля — только одну θ -ю составляющую [см. уравнение (21.38)]. Если провести сферу радиусом R ,

то во всех точках этой сферы H имеет одну и ту же фазу колебания в какой-то конкретный момент времени (фаза колебания определяется аргументом косинуса). Амплитуда H для точек сферы $R = \text{const}$ различна, она зависит от угла θ ; на «полюсах» при $\theta = 0$ и при $\theta = 180^\circ$ амплитуда колебания для любого момента времени равна нулю, так как

$$\sin \theta = \sin 180^\circ = 0,$$

амплитуда колебания максимальна на «экваторе» сферы при $\theta = 90^\circ$. По фазе H и E совпадают [см. уравнение (21.39)]. Модуль E в $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_B$ раз больше модуля H , т. е. $E = H Z_B$.

Полярную диаграмму зависимости модуля E или H в дальней зоне от угла θ принято называть *диаграммой направленности*. В рассматриваемом случае она будет представлять две соприкасающихся окружности (рис. 21.2, а).

Составим выражение вектора Пойнтинга для дальней зоны:

$$\vec{S} = [\vec{E}_\theta \vec{H}_\alpha] = \vec{S}_R.$$

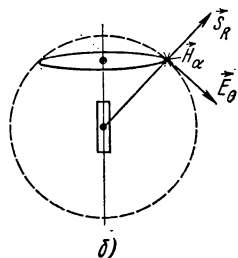
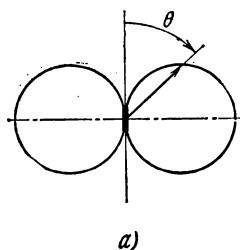


Рис. 21.2

Векторное произведение двух векторов, один из которых имеет θ -е направление, а другой — α -е, дает вектор, направленный по радиусу (рис. 21.2, б).

Так как H и E в дальней зоне совпадают, то с изменением направления H на противоположное (H изменяется во времени по косинусоиду) одновременно меняется на противоположное и направление вектора E . Но вектор \vec{S} своего направления не меняет, он все время направлен вдоль радиуса.

Найдем величину модуля вектора Пойнтинга. С этой целью умножим модуль E на модуль H :

$$S = \frac{Z_B (dl)^2 I_m^2 \sin^2 \theta \cos^2 \omega \left(t - \frac{R}{v} + \psi \right)}{4R^2 \lambda^2}. \quad (21.40)$$

Среднее значение модуля вектора Пойнтинга за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$S_{\text{ср за период}} = \frac{Z_B (dl)^2 I_m^2 \sin^2 \theta}{8R^2 \lambda^2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) dt = \frac{1}{2} \right].$$

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R . Элемент $d\vec{s}$ сферической поверхности радиусом R направлен по радиусу. Вектор Пойнтинга \vec{S} также направлен по радиусу. Угол между ними равен нулю (рис. 21.3). Элемент сфериче-

ской поверхности можно рассматривать как криволинейный квадрат, площадь его (рис. 21.3)

$$ds = R d\theta R \sin \theta d\alpha = R^2 \sin \theta d\theta d\alpha;$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = - \int_1^{-1} \sin^2 \theta d \cos \theta = \int_1^{-1} (\cos^2 \theta - 1) d \cos \theta = \frac{4}{3};$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi.$$

Далее заменим I_m^2 на $2I^2$ (I — действующее значение тока). В результате окажется, что поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R , представляющий собой мощность P_s , излученную элементом тока, не зависит от радиуса и будет равен

$$\oint \vec{S} d\vec{s} = P_s = R_s I^2, \quad (21.41)$$

где

$$R_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi Z_n (dl)^2}{\lambda^2}; \quad (21.42)$$

R_s называют *сопротивлением излучения*. Чем больше R_s , тем больше излученная мощность при том же токе I . Сопротивление излучения прямо пропорционально квадрату длины излучателя и, что особенно важно, обратно пропорционально квадрату длины волны λ .

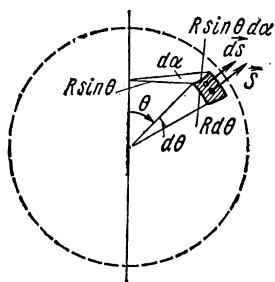


Рис. 21.3

Так как длина волны $\lambda = \frac{v}{f}$, то *излученная мощность прямо пропорциональна квадрату частоты*. Если частота мала, например всего 50 гц, то излучения практически нет. При радиочастоте излучение значительно. Например, при частоте $50 \cdot 10^6$ гц излучение больше, чем при частоте 50 гц, в 10^{12} раз.

Пример 217 б. По отрезку линейного провода длиной $\Delta l = 3$ см протекает переменный ток $I = 0,2$ а. Частота тока $f = 10^9$ гц. Найти сопротивление излучения и мощность излучения.

Решение. Длина волны $\lambda = 30$ см. По формуле (21.42),

$$R_s = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{377 \cdot 3^2}{30^2} = 7,8 \text{ ом.}$$

По формуле (21.41)

$$P_s = R_s I^2 = 7,8 \cdot 0,2^2 = 0,312 \text{ вт.}$$

§ 21.5. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗЛУЧАЮЩЕМ ДИПОЛЕ

При выводе формул § 21.4 в качестве излучателя электромагнитной энергии был взят небольшой отрезок провода, по которому протекал синусоидальный ток. Но точно такие же формулы были бы по-

лучены, если бы вместо элемента тока был взят излучающий диполь. Под излучающим диполем понимают отрезок линейного провода с сосредоточенными на концах его емкостями в виде шаров (рис. 21.4, а)

Полагают, что длина диполя l много меньше длины волны λ и сечение провода ничтожно мало. При этих условиях распределенную емкость самого проводника можно в первом приближении и не принимать во внимание и учитывать только емкости шаров.

На рис. 21.4, б показана схема, в которой генератор синусоидального напряжения высокой частоты через коаксиальный кабель присоединен к двум вертикально расположенным проводникам (изображены «жирными» линиями), соединенным в свою очередь с двумя шарами (шариками) диполя.

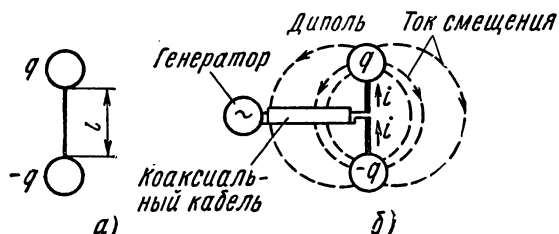


Рис. 21.4

Под воздействием напряжения генератора шарики диполя периодически перезаряжаются.

Положим, что заряд верхнего шарика q изменяется по закону $-Q_m \cos \omega t$, а заряд нижнего шарика $-q$ — по закону $Q_m \cos \omega t$. Тогда по вертикальным проводникам при периодической перезарядке шариков будет протекать ток проводимости

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega Q_m \sin \omega t.$$

Этот ток замыкается через диэлектрик в виде тока смещения, как показано на рис. 21.4, б.

Важно обратить внимание на то, что по двум вертикальным проводникам длиной $\frac{l}{2}$ каждый при периодической перезарядке шариков протекает ток проводимости i , т. е. два вертикальных проводника длиной $\frac{l}{2}$ (или $\frac{dl}{2}$) с током i , которыми соединены шарики диполя, представляют собой элемент тока $\vec{i}l$ (или $i\vec{dl}$), о котором шла речь в § 21.4.

Посредине элемента тока на рис. 21.4, б есть разрыв, а в элементе тока рис. 21.1 разрыва нет. Но это не имеет существенного значения, так как разрыв может быть весьма малым по сравнению с длиной l (dl).

Таким образом, все выводы § 21.4, сделанные применительно к излучателю в виде элемента тока $i\vec{dl}$, применимы и к излучателю в виде диполя, т. е. к излучателю, составленному двумя периодически перезаряжающимися шариками, соединенными тонким проводником.

§ 21.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Как уже говорилось в § 21.4, в ближней зоне излучателя основную роль играют составляющие напряженности электрического поля E_θ и E_R , обратно пропорциональные третьей степени расстояния рассматриваемой точки до излучателя.

Эти составляющие на 90° отстают по фазе от протекающего по проводнику тока или, другими словами, по фазе совпадают с зарядом одного из шаров излучающего диполя.

Из предыдущего [см. формулы (15.74), (15.75)] известно, что напряженность электрического поля, созданного диполем, заряды которого неизменны во времени, также обратно пропорциональна третьей степени расстояния рассматриваемой точки до центра диполя.

Следовательно, для определения мгновенного значения напряженности электрического поля излучающего диполя в ближней зоне практически можно пользоваться формулами, вытекающими из закона Кулона. В свою очередь, напряженность магнитного поля в ближней зоне излучателя [см. формулу (21.37)] обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока и по фазе совпадает с током.

Из закона Био — Савара — Лапласа [см. формулу (17.36)] следует, что напряженность магнитного поля, создаваемого элементом постоянного тока, также обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока.

На основании этого можно сделать вывод, что в ближней зоне (при $R \ll \lambda$) для определения мгновенного значения напряженности магнитного поля практически можно пользоваться формулой Био — Савара — Лапласа. Применимость формул, описывающих статические поля, для подсчета мгновенных значений E и H переменных полей в ближней зоне (при $R \ll \lambda$) объясняется тем, что в ближней зоне можно пренебречь запаздыванием.

Границы ближней зоны зависят от частоты. Так, например, при $f = 50$ гц $\lambda = 6 \cdot 10^6$ м; при $f = 10^{10}$ гц $\lambda = 3$ см. Следовательно, при частоте 50 гц законами Кулона и Био — Савара — Лапласа можно пользоваться практически при любом расстоянии точки до элемента тока или диполя. Совершенно иная картина будет при частоте 10^{10} гц. В этом случае границы ближней зоны удалены от излучателя всего на доли сантиметра и все пространство вокруг излучателя следует рассматривать как дальнюю зону. В дальней зоне «кулонова» составляющая напряженности электрического поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей A , а «био — саварова» составляющая напряженности магнитного поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей H .

В ближней зоне поток вектора Пойнтинга имеет две составляющие: первая изменяется во времени по закону $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$; вторая — по закону $\sin^2 \omega t$ или $\cos^2 \omega t$.

При подсчете потока вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R в ближней зоне за период переменного тока оказывается, что поток от первой составляющей равен нулю, поскольку среднее за период значение функции $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$ равно нулю; поток от второй составляющей отличен от нуля. Физически это означает, что в ближней зоне происходит два качественно различных в энергетическом отношении процесса.

Первый процесс — это процесс периодического обмена энергией между источником энергии, к которому присоединен излучатель,

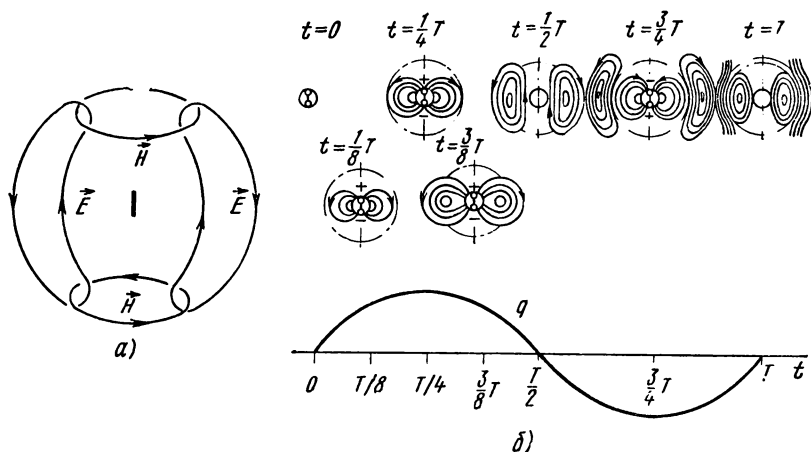


Рис. 21.5

и ближней зоной. Энергия то забирается от источника и накапливается в электромагнитном поле ближней зоной, то отдается обратно источнику. Этот процесс характерен для «кулонова» и «био — саварова» полей ближней зоны.

Второй процесс — это процесс излучения энергии, характеризующий волновой процесс в ближней зоне. Излученная энергия составляет относительно небольшую величину по сравнению с энергией, периодически накапливаемой в электромагнитном поле ближней зоны и затем отдаваемой источнику питания.

От излучателя распространяются в пространство электромагнитные волны *. Эти волны для фиксированного момента времени схема-

* Существование электромагнитных волн экспериментально было доказано Г. Герцем в 1887—1888 гг. Справедливость электромагнитной теории света была подтверждена опытами П. Н. Лебедева в 1895 г., который измерил световое давление, теоретически предсказанное Д. Максвеллом.

А. С. Поповым 7 мая 1895 г. на заседании Русского физико-химического общества был прочитан доклад об успешно проведенных опытах по приему и передаче радиосигналов. Поэтому 7 мая отмечают как День радио.

тически можно представить рис. 21.5, *а*. На нем линии E образуют замкнутые фигуры, лежащие в меридиональных плоскостях. Линии E охвачены линиями H , которые представляют собой окружности с центром на оси элемента тока. Чтобы не загромождать рис. 21.5, *а*, на нем изображены всего две линии E и две линии H .

Характер электрического поля в меридиональной плоскости для волновой зоны излучателя при различных моментах времени показан на рис. 21.5, *б*, где изображена также кривая изменения заряда излучающего диполя в функции времени. Чем больше по абсолютной величине становятся заряды диполя, тем большее количество линий E начинается или соответственно оканчивается на них.

По мере распространения электромагнитной волны в окружающее пространство форма линий E непрерывно меняется. Когда заряды диполя по абсолютной величине начинают уменьшаться, начинает уменьшаться и число исходящих из них линий E . При этом образуются замкнутые на себя линии E . Пакет замкнутых на себя линий E сцеплен с пронизывающими этот пакет линиями H (см. рис. 21.5, *а*). В следующий полупериод, когда заряды шаров меняют знаки на противоположные, образуется аналогичный пакет замкнутых на себя линий E , отличающийся от предыдущего лишь направлением вихря E .

§ 21.7. РАСЧЕТ ПОЛЯ РЕАЛЬНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Практически в качестве излучателей используют антенны. Простейшая антенна представляет собой отрезок провода длиной l , расположенный вертикально по отношению к поверхности земли (рис. 21.6, *а*).

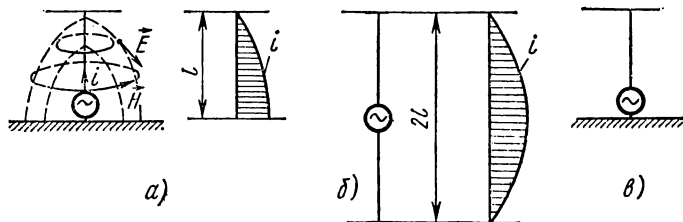


Рис. 21.6

Генератор высокой частоты включают между антенной и землей. За счет наличия распределенных емкостей антенны и проходящих через них токов смещения ток по высоте антенны меняется по амплитуде и фазе (см. эпюру изменения амплитуд на рис. 21.6, *а*). Антенна обладает высокой способностью к излучению вследствие того, что создаваемые ею электрическое поле и магнитное поле распределены в одной и той же области пространств, окружающего антенну (см. рис. 21.6, *а*).

Влияние земли на поле учитывают, вводя в расчет зеркальное изображение антенны (полагая, что земля является идеальным проводником). При этом длина антенны оказывается равной $2l$, а эпюра

тока дополняется второй половиной (рис. 21.6, б) *. Для расчета поля, создаваемого антенной, ее заменяют совокупностью малых отрезков длиной dl , на каждом из которых ток принимают неизменным по амплитуде и фазе. Тогда напряженность поля в произвольной точке пространства может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей, создаваемых всеми малыми отрезками антенны.

Для увеличения емкости антенны, а следовательно, и проходящего по ней тока при том же напряжении генератора антенну часто дополняют горизонтальным участком (рис. 21.6, в).

§ 21.8. ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ И ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

В § 15.11 и 21.5 шла речь об электрическом диполе, обладающем электрическим моментом $\vec{p}_э = q\vec{l}$. В теории поля пользуются также понятием магнитного диполя. Магнитный диполь образован двумя магнитными зарядами q_m и $-q_m$, расположенными на расстоянии l . Диполь обладает магнитным моментом $\vec{p}_m = q_m \vec{l}$ (рис. 21.7, а).

Из § 3.24 известно, что виток (рамка) с током i , охватывающим площадь s , также обладает магнитным моментом $\vec{p}_m = i\vec{s}$ (рис. 21.7, б). Магнитный диполь можно рас-

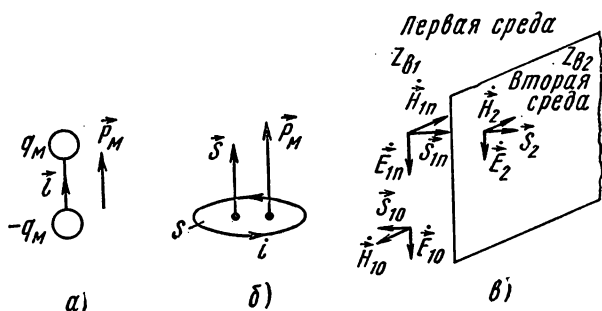


Рис. 21.7

смаживать как расчетный эквивалент витка с током, если равны их магнитные моменты, т. е. если $q_m l = i s$. Изменение тока в рамке соответствует изменению магнитных зарядов диполя во времени и протеканию между зарядами «магнитного тока смещения». Излучение энергии рамкой с током можно в расчетном смысле представить как излучение магнитного диполя.

Если обратиться к уравнениям Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и $\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, то нетрудно заметить, что первое уравнение получается из второго, а второе — из первого, если заменить \vec{H} на \vec{E} , а ϵ_a на $-\mu_a$. Это свойство уравнений Максвелла называют *принципом двойственности*. Его применяют для решения задач электродинамики, двойственных уже решенным.

Так, имея решение для поля, создаваемого электрическим диполем, получают решение для поля, создаваемого магнитным диполем, т. е. рамкой с синусоидально

* Мощность, излученная в пространство над землей таким излучателем, равна половине мощности излучателя удвоенной длины с током i .

изменяющимся током (считая, что оси $\vec{R}, \vec{\alpha}, \vec{\theta}$ расположены в соответствии с рис. 21.1). Так как в случае электрического диполя $i = \frac{dq}{dt}$, то при $i = I_m \sin \omega t$

$$I_m = j\omega \dot{q}_m, \quad \text{а} \quad I_m dl = j\omega \dot{q}_m dl = j\omega \dot{p}.$$

Подставив в (21.38) $j\omega \dot{p}$ вместо $I_m dl$, запишем формулу для напряженности магнитного поля в дальней зоне через электрический момент диполя \dot{p} :

$$\dot{H}_\alpha = - \frac{\omega \dot{p} \sin \theta e^{-j \frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda}.$$

В соответствии с принципом двойственности в этой формуле заменим H_α на \dot{E}_α и \dot{p} на $\dot{p}'_m = \mu_a I_m s$. Получим формулы для комплекса напряженности электрического поля в дальней зоне магнитного диполя:

$$\dot{E}_\alpha = - \frac{\omega \mu_a \dot{I}_m s \sin \theta e^{-j \frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda}$$

и для напряженности магнитного поля:

$$\dot{H}_\theta = - \frac{\omega \mu_a \dot{I}_m s \sin \theta e^{-j \frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda Z_B}.$$

§ 21.9. ПЕРЕХОД ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ИЗ ОДНОЙ СРЕДЫ В ДРУГУЮ

Рассмотрим условия перехода плоской синусоидально изменяющейся электромагнитной волны из первой среды с волновым сопротивлением Z_{B1} во вторую среду с волновым сопротивлением Z_{B2} . Примем, что волна падает перпендикулярно границе раздела сред (рис. 21.7, в). Волна частично пройдет во вторую среду, частично отразится.

В первой среде будут падающая (индекс «п») и отраженная (индекс «о») волны, во второй — только падающая (поэтому индекс «п» у нее не будем ставить). Падающую во второй среде волну называют также преломленной.

Для удобства чтения рис. 21.7, в векторы, характеризующие падающую и отраженную волны в первой среде, смещены по вертикали и несколько отодвинуты от границы раздела сред. На границе раздела сред должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности электрического поля и тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля:

$$\dot{E}_{1п} + \dot{E}_{1о} = \dot{E}_2; \quad (21.43)$$

$$\dot{H}_{1п} + \dot{H}_{1о} = \dot{H}_2. \quad (21.44)$$

Уравнения (21.43) и (21.44) полностью тождественны уравнениям, которыми связаны напряжения и токи падающей, отраженной и преломленной волн при переходе волны с одной линии с распределенными параметрами на другую (см. § 14.6, ч. II).

Комплекс напряженности электрического поля $\dot{E}_{1п}$ равен комплексу напряженности магнитного поля $\dot{H}_{1п}$, умноженному на Z_{B1} :

$$\dot{E}_{1п} = \dot{H}_{1п} Z_{B1}.$$

Для отраженной волны в соответствии с изменением направления движения энергии на противоположное

$$\dot{E}_{10} = -\dot{H}_{10} Z_{B1}.$$

Для преломленной волны

$$\dot{E}_2 = \dot{H}_2 Z_{B2}.$$

Из уравнений (21.43) и (21.44) с учетом предыдущих строчек получим:

$$\dot{E}_{10} = \frac{Z_{B2} - Z_{B1}}{Z_{B2} + Z_{B1}} \dot{E}_{1n}; \quad (21.45)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{2Z_{B1}}{Z_{B1} + Z_{B2}} \dot{H}_{1n}; \quad (21.46)$$

$$\dot{H}_{10} = \frac{Z_{B1} - Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}} \dot{H}_{1n}. \quad (21.47)$$

Проанализируем полученные результаты. Значения \dot{E}_{10} , \dot{H}_{10} и \dot{E}_2 , \dot{H}_2 зависят от соотношения между волновыми сопротивлениями обеих сред. Наибольший практический интерес представляет случай, когда волна падает из воздуха на поверхность металла. В этом случае первой средой является воздух, а второй средой — металл. Так как волновое сопротивление проводящей среды зависит не только от ее проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты [см. формулу (19.12)], то для определенности положим, что проводящей средой является медь, а частота $f = 10^8$ гц. Сопоставим значения волновых сопротивлений для диэлектрика и для металла (см. формулы для Z_B на стр. 667 и 654). Для воздуха $Z_{B1} = 377$ ом. Для меди ($\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ ом⁻¹·м⁻¹) при $f = 10^8$ гц $Z_{B2} = 0,00357 e^{j45^\circ}$ ом. Если подставить значения Z_{B1} и Z_{B2} в (21.45), то получим

$$\dot{E}_{10} \approx -\dot{E}_{1n}; \quad \dot{H}_{10} \approx \dot{H}_{1n},$$

т. е. от поверхности металла электромагнитная волна почти полностью отражается с переменной знака у напряженности электрического поля. Та часть волны, которая все же проникнет в металл, быстро в нем затухнет. Если бы проводящая среда имела γ , стремящуюся к бесконечности, то тогда она являлась бы идеальным зеркалом для электромагнитной волны.

Явление отражения электромагнитных волн от проводящих сред лежит в основе радиолокации.

В заключение упомянем о явлении дифракции. Дифракцией называют явление отражения и преломления электромагнитных волн от проводящего или диэлектрического тела, а также изменение структуры и направления волн при прохождении их через отверстие (щель) в каком-либо теле, например в пластинке, когда размеры тела или щели соизмеримы с длиной электромагнитной волны.

Рассмотрение задач дифракции выходит за рамки курса ТОЭ. Для ознакомления с ними рекомендуется обратиться, например, к [43].

§ 21.10. ЭКРАНИРОВАНИЕ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Явление затухания электромагнитной волны в поверхностном слое металла используется для экранировки в переменном электромагнитном поле.

Электромагнитные экраны представляют собой полые цилиндрические, сферические или прямоугольные оболочки, внутрь которых помещается экранируемое устройство (например, катушка индуктивности, измерительный прибор и т. п.).

Экран выполняет две функции: 1) он защищает устройство, заключенное в экран, от влияния внешнего по отношению к экрану электромагнитного поля; 2) он защищает внешнее по отношению к экрану пространство от электромагнитного поля, создаваемого устройством, заключенным в экране.

Поскольку на расстоянии, равном длине волны, в металле электромагнитная волна почти полностью затухает, то для хорошей экранировки толщина стенки экрана должна быть примерно равна длине волны в металле. Практически приходится учитывать и другие факторы (механическую прочность экрана, его стоимость и т. д.).

§ 21.11. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИНЦИПОВ ЭКРАНИРОВАНИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ, МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Экранирование в переменном электромагнитном поле основано главным образом на том, что электромагнитная волна, проникающая в стенки экрана, быстро затухает, расходуя энергию на покрытие потерь, обусловленных вихревыми токами в стенках экрана.

Электростатическое экранирование основано на компенсации внешнего поля полем зарядов, выявившихся на стенках экрана из проводящего материала вследствие электростатической индукции (см. § 15.21). Толщина стенок экрана при электростатическом экранировании в отличие от экранирования в магнитном и электромагнитном полях может быть сколь угодно малой.

Экранирование в магнитном поле постоянного тока (см. § 17.21) основано, грубо говоря, на том, что силовые линии магнитного поля преимущественно проходят по участкам с меньшим магнитным сопротивлением (по стенкам экрана).

§ 21.12. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ НАГРЕВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ И НЕСОВЕРШЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Нагрев металлических деталей перед ковкой и штамповкой, *сушку* древесины, *наплавку и реставрацию* инструментов часто производят путем помещения этих предметов (деталей) в электромагнитное поле сравнительно невысокой частоты (1—20 кгц). Стальные изделия (на-

пример, валы, шестеренки) нередко подвергают *поверхностной закалке*, помещая их в электромагнитное поле более высокой частоты (порядка 10—500 кГц).

В соответствии с § 18.7 энергия, выделяющаяся в виде тепла в проводящем теле, равна $\operatorname{Re} \left\{ -\oint_s [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*] d\vec{s} \right\}$.

Как известно из предыдущего (см. § 19.3), электромагнитная волна, проникая в толщу металла, быстро затухает. Поэтому теплота выделяется практически лишь в относительно тонком поверхностном слое стального изделия.

Под действием теплоты, выделившейся в поверхностном слое, последний быстро разогревается до температуры, необходимой для поверхностной закалки. Область еще более высоких частот (1—30 МГц) используется для высокочастотного *нагрева пластмасс* перед штамповкой, для *термической обработки* пищевых продуктов, *вулканизации* резины и для других целей.

§ 21.13. ПОНЯТИЕ О ВОЛНОВОДАХ И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

Канализация энергии очень высокой частоты по обычным двухпроводным линиям передачи практически невозможна ввиду того, что: 1) провода линии играют роль антенн и, вместо того чтобы передавать энергию потребителю, излучают ее в пространство; 2) активное сопротивление проводов линии при сверхвысоких частотах в силу резко выраженного поверхностного эффекта оказывается настолько большим, что весьма значительная часть энергии затрачивается на нагрев проводов.

Применение коаксиального кабеля (коаксиальной линии) рис. 18.4 для канализации энергии весьма высокой частоты также невыгодно. Хотя в этом случае энергия в окружающее пространство и не излучается (так как оболочка кабеля одновременно является и экраном), однако в кабеле велики потери энергии в жиле и в диэлектрических шайбах из полистирола или полиэтилена, с помощью которых жила крепится внутри кабеля. Практически коаксиальный кабель применяют в диапазоне частот от нуля до нескольких мегагерц. Его используют в силовых, телефонных и телевизионных устройствах.

При частотах больше 10^9 гц энергию передают по волноводам. *Волновод* представляет собой полую трубу прямоугольного или круглого сечения.

На рис. 21.8, а изображен прямоугольный волновод. Размеры a и b находятся в определенном соотношении с длиной волны. Так, например, при длине волны $\lambda = 10$ см берут $b = 3,4$ см и $a = 7,2$ см.

Энергия внутрь волновода доставляется с помощью небольшого стерженька, помещенного в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (см. рис. 21.8, а), или с помощью петли с током, помещаемой в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 21.8, б).

Отвод энергии с другого конца волновода производят также с помощью стерженька или петли.

Энергия передается вдоль волновода, отражаясь от его стенок (рис. 21.8, *в*). Стенки волновода являются как бы направляющими для потока энергии. Небольшая часть энергии проникает в стенки волновода и выделяется в них в виде теплоты. Для уменьшения потерь энергии в стенках волновода внутреннюю поверхность труб полируют и покрывают слоем хорошо проводящего металла, например серебра. Элементы теории волновода рассмотрены в приложении Р.

В качестве резонансных контуров при не очень высоких частотах применяют контуры с сосредоточенными индуктивностями и емкостями или отрезки линий с распределенными параметрами. При сверхвысоких частотах (при длинах волн сантиметрового диапазона) контуры с сосредоточенными параметрами L и C и отрезки линий с распределенными параметрами оказываются малопригодными, так как они

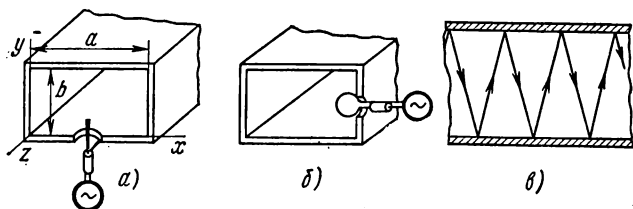


Рис. 21.8

излучают электромагнитную энергию и вследствие этого, а также в силу резко выраженного поверхностного эффекта обладают малой добротностью.

При сверхвысоких частотах в качестве устройства, выполняющего функции резонансного контура с высокой добротностью, применяют объемный резонатор.

Объемный резонатор обычно представляет собой полый прямоугольный параллелепипед, стенки которого выполняют из хорошо проводящего материала. Длины его трех ребер находятся, как и у волновода, в определенном соотношении с длиной волны и составляют несколько сантиметров. Возбуждают его так же, как и волновод, т. е. с помощью стерженька или петли с током. В полости объемного резонатора возникают стоячие электромагнитные волны по осям x , y , z , так как со всех сторон полость ограничена хорошо проводящими стенками.

Качественно переход от обычного колебательного контура L , C к прямоугольному объемному резонатору иллюстрируют рис. 21.9, *а*—21.9, *г*. На рис. 21.9, *а* изображены две пластины конденсатора, соединенные двумя индуктивностями, на рис. 21.9, *б* индуктивности заменены на две полоски, на рис. 21.9, *в* — на четыре полоски; на рис. 21.9, *г* полоски заменены проводящими стенками.

Если через a , b , c обозначить длины трех ребер резонатора в направлении осей x , y , z (см. рис. 21.9, *г*), а через m , n , p — характеристиче-

ские числа, которые могут принимать значения 0, 1, 2 и т. д., то собственная частота объемного резонатора

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}.$$

Так, при $m = n = 1, p = 0, a = b = c = 5 \text{ см}$, $\omega = 2,66 \cdot 10^{10} \text{ рад/сек}$, $f = 4,23 \cdot 10^9 \text{ гц}$.

Частота колебаний возбуждателя, т. е. частота тока в стерженьке или петле, должна равняться собственной частоте резонатора. Для настройки резонатора изменяют один из его размеров, например, с помощью поршня (винта) — рис. 21.9, д.

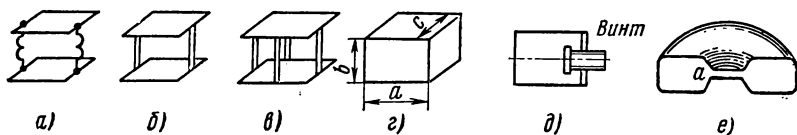


Рис. 21.9

При колебательном процессе в резонаторе энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и обратно. В прямоугольном и цилиндрическом резонаторах энергия каждого из полей распределена по всей полости резонатора. В других устройствах сверхвысоких частот (клистронах, магнетронах) энергии этих полей распределены преимущественно в различных областях. Так, в резонансной полости клистрона (рис. 21.9, е) электрическое поле сосредоточено преимущественно в узком зазоре a (как бы в плоском конденсаторе), а магнитное поле связано с индуктивностью, роль которой выполняет полость резонатора, примыкающая к узкому зазору.

Под добротностью резонатора понимают величину $Q = \frac{\omega_0 W_0}{P}$. Здесь W_0 — энергия электромагнитного поля, запасенная в резонаторе, P — активная мощность, затрачиваемая на потери от вихревых токов в стенках резонатора, на потери через щель в виде излучения, а если диэлектрик, имеющийся в полости резонатора, не идеальный, то и на потери в диэлектрике. Q достигает величины 10^4 и более.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧАСТИ III

Приложение М

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ СЕТОК И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТОК

Довольно широкое распространение получили: а) числовой расчет электрических и магнитных полей по методу сеток; б) моделирование электрических и различных неэлектрических полей по методу электрических сеток. Несмотря на близость названий, содержание методов существенно различно.

§ М.1. РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ СЕТОК

Метод сеток представляет собой числовой метод интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к уравнениям в конечных разностях.

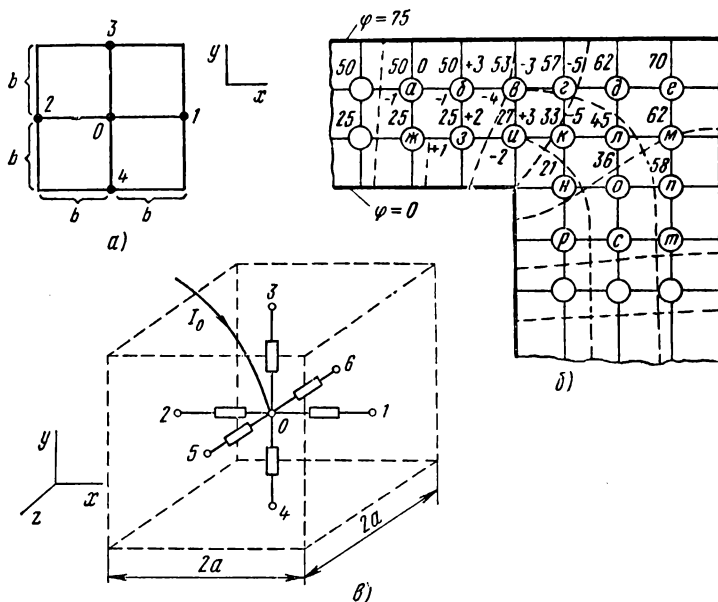


Рис. М.1

На рис. М.1, а изображен участок двухмерного поля. На нем показаны оси x и y декартовой системы и квадратная сетка со стороной b . Точки (узлы) сетки обозначены цифрами 0, 1, 2, 3, 4. Примем φ_0 — потенциал точки 0, φ_1 — потенциал точки 1

и т. д. Выведем приближенное соотношение между потенциалами $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, вытекающее из уравнения Пуассона. Среднее значение первой производной $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ на участке $1-0$ приближенно равно

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_{1-0} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{b};$$

на участке $0-2$

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_{0-2} = \frac{\Phi_0 - \Phi_2}{b}.$$

Вторая производная $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ в точке 0 приближенно равна разности средних значений первых производных $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ на участках $1-0$ и $0-2$, отнесенных к расстоянию b между серединами отрезков $1-0$ и $0-2$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2 \Phi}{\Delta x^2} = \frac{\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_{1-0} - \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_{0-2}}{b} = \frac{\frac{\Phi_1 - \Phi_0}{b} - \frac{\Phi_0 - \Phi_2}{b}}{b} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - 2\Phi_0}{b^2}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_3 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{b^2}.$$

Запишем уравнение Пуассона для двухмерного электростатического поля:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a},$$

где $\rho_{\text{своб}}$ — свободный заряд в точке 0 .

Подставим в уравнение Пуассона приближенные выражения для $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$. Получим

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4\Phi_0 = -\frac{\rho_{\text{своб}} b^2}{\epsilon_a}. \quad (\text{М.1})$$

Если поле описывается уравнением Лапласа, то $\rho_{\text{своб}} = 0$ и

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - 4\Phi_0 = 0. \quad (\text{М.2})$$

Уравнения (М.1) и (М.2) определяют связь между потенциалами квадратной сетки. Они являются основными в методе сеток. Чем меньше шаг сетки b , тем меньше погрешность от замены уравнений Пуассона или Лапласа соответственно на уравнения (М.1) или (М.2). При расчете по методу сеток применяют не только квадратные, но и иные виды сеток, например полярные. Для них имеются свои формулы в конечных разностях, в общем случае отличные от формул (М.1) и (М.2).

Допустим, что двухмерное поле, подчиняющееся уравнению Лапласа, ограничено некоторыми поверхностями и известны потенциалы этих поверхностей (задача Дирихле) либо известны значения производной от потенциала по нормали к каждой граничной поверхности во всех их точках (задача Неймана). Возможны и комбинированные типы задач, когда для одной части граничных поверхностей известны значения потенциалов, а для другой — значения нормальной производной от потенциала.

Требуется найти значения потенциалов прямоугольной сетки этого поля. Последовательность расчета для задачи Дирихле проиллюстрируем на примере расчета поля, образованного двумя параллельными прямыми углами рис. М.1, б. В месте поворота расстояния между параллельными сторонами угла изменяется. Потенциал верхней границы положим равным 75 единицам, нижней — нулю. Будем полагать, что объемные заряды отсутствуют.

1. Тонкими сплошными линиями нанесем квадратную сетку. Обозначим узлы получившихся квадратов буквами $a, б, в, г, д, \dots$ (расположены в кружках).

2. Произвольно выберем значения потенциалов узлов $a, б, в, \dots$. Объем дальнейшей вычислительной работы в значительной мере зависит от того, насколько близко к действительному выбрано первоначальное распределение потенциала. Поэтому следует стремиться к возможно более правдоподобию первоначальному распределению потенциала.

Для этой цели нанесем на рис. М.1 примерный ход силовых и эквипотенциальных линий и, руководствуясь этими линиями, запишем начальные значения потенциалов узлов (цифры слева и вверху у каждого узла).

3. Для каждого узла находим величину остатка в формуле (М.2). Так, остаток для точки $б$ равен $53 + 50 + 75 + 25 - 4 \cdot 50 = 3$. Записываем величину остатка в правом верхнем углу у каждого узла.

4. Так как в каждом узле остаток должен быть равен нулю, то дальнейший и наиболее трудоемкий этап расчета состоит в таком изменении потенциалов узлов, чтобы остатки во всех узлах не превышали некоторой заданной величины (скажем, 1 или 2).

Поэтому в одной из точек с наибольшим значением остатка изменяем потенциал приблизительно на $1/4$ от остатка (в нашем случае в точке $б$ уменьшаем потенциал на 1) и затем пересчитываем остатки во всех остальных узлах. Вновь полученные остатки записываем в левом нижнем углу у каждого узла (на рисунке они выписаны не для всех узлов). Такая операция выполняется несколько раз до тех пор, пока все остатки не станут равны или меньше заданной величины. Процесс является сходящимся. При расчетах используют счетные машины.

Метод применим для магнитных и электрических полей, для линейных и нелинейных сред, для неизменных и изменяющихся во времени полей. Более подробные сведения о методе сеток даны, например, в [42].

§ М.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТОК

Моделирование полей с помощью электрических сеток представляет собой метод экспериментального исследования полей, подчиняющихся уравнению Пуассона, путем измерения потенциалов узлов электрической сетки, которой заменяется сплошная среда. Положим, что требуется выяснить распределение потенциалов в некоторой области (сплошной среде). Потенциалы границ области заданы. Кроме того, известны электрическая или соответственно магнитная проницаемость среды, а также плотность распределенных источников в исследуемом поле (например, плотность свободных зарядов $\rho_{\text{своб}}$ в моделируемом электростатическом поле).

Исследуемое поле заменим полем в проводящей среде с проводимостью γ . Моделируемую область подразделим на элементарные объемы, например на кубы. Каждый элементарный объем заменим электрической схемой замещения в соответствии с рис. М.1, а.

Пусть ребро куба имеет длину $2a$. Центр куба обозначим цифрой 0, а точки, лежащие в серединах его граней, — цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Шаг сетки в направлении осей x, y, z обозначим $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$). Проводимость между любой из точек 1—6 и центральной точкой 0

$$g = \gamma \frac{2a \cdot 2a}{a} = 4\gamma a.$$

К узлу 0 от источника тока подтекает ток $I_0 = 4\delta(x, y, z) a^3$. К остальным узлам, не показанным на рис. М.1, а, подтекают свои токи. Эти токи, подводимые в центры кубов, выполняются функциями распределенных источников в исходном поле. Значения токов определяются по заданной плотности распределенных источников. По первому закону Кирхгофа, сумма токов, подтекающих к узлу 0, должна быть равна нулю, т. е.

$$(\varphi_1 - \varphi_0)g + (\varphi_2 - \varphi_0)g + (\varphi_3 - \varphi_0)g + (\varphi_4 - \varphi_0)g + \\ + (\varphi_5 - \varphi_0)g + (\varphi_6 - \varphi_0)g + I_0 = 0. \quad (\text{М.3})$$

Потенциал точки 0

$$\varphi_0 = \varphi(x, y, z).$$

Потенциал точки 1

$$\varphi_1 = \varphi(x + \Delta x, y, z) \approx \varphi(x, y, z) + \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

Потенциал точки 2

$$\varphi_2 = \varphi(x - \Delta x, y, z) \approx \varphi(x, y, z) - \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

Следовательно,

$$(\varphi_1 - \varphi_0) g + (\varphi_2 - \varphi_0) g = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} g = 4 \gamma a^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Проделав аналогичные выкладки с остальными слагаемыми уравнения (М.3), подставив в него выражение для I_0 и сократив на $4a^3$, получим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\delta(x, y, z)}{\gamma}.$$

Таким образом, распределение потенциалов в электрической сетке с точностью до частных производных четвертого порядка от φ , умноженных на $\frac{a^2}{4!}$, удовлетворяет тому же уравнению, что и распределение потенциалов в сплошной среде.

Распределение потенциалов в узлах 0 элементарных объемов измеряется компенсационным способом.

Приложение Н МЕТОД ГРИНА

§ Н.1. ФОРМУЛЫ ГРИНА

Формулы Грина получают из теоремы Остроградского — Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_s \vec{D} \vec{ds} = \oint_s D_n ds, \quad (\text{Н.1})$$

где D_n — нормальная составляющая некоторого вектора \vec{D} на поверхности s , ограничивающей объем V ; D_n направлена в сторону внешней нормали \vec{n} по отношению к объему V .

Положим, $\vec{D} = \alpha \vec{F}$, где α — произвольный скаляр, а вектор \vec{F} представим как градиент некоторой скалярной функции φ : $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\alpha \operatorname{grad} \varphi) = \nabla (\alpha \nabla \varphi) = \alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha.$$

Подстановка в (Н.1) дает

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha) dV = \oint_s D_n ds.$$

Учтем, что проекция вектора \vec{D} на направление нормали \vec{n} есть $\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}$:

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha) dV = \oint_s \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds. \quad (\text{Н.2})$$

Формулу (Н.2) называют *первой формулой Грина*.

Поменяв местами скаляры α и φ и вычтя одно равенство из другого, получим вторую формулу Грина:

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \alpha) = \oint_s \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) ds. \quad (\text{H.3})$$

§ Н.2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Гармонической называют функцию, непрерывную в рассматриваемой области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющую уравнению Лапласа в этой области. Центральная симметричная функция $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от фиксированной точки объема (например, от точки A рис. Н.1, а)

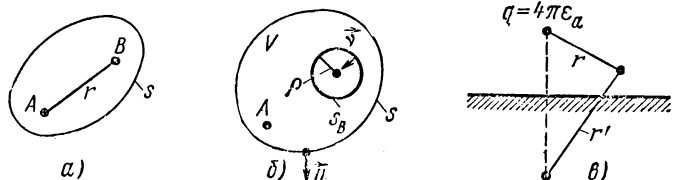


Рис. Н.1

до текущей точки B , является гармонической функцией. Для плоскопараллельного поля гармоническая функция равна $\ln r$. Примем в формуле (Н.3), что α и φ — гармонические функции, $\alpha = \frac{1}{r}$ и функция φ выполняет роль потенциала φ . Тогда $\nabla^2 \varphi = 0$, $\nabla^2 \alpha = 0$ и для поверхности, ограничивающей область V , имеет место соотношение

$$\oint_s \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right] ds = 0. \quad (\text{H.4})$$

§ Н.3. ИНТЕГРАЛ ГРИНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Применим формулу (Н.4) для определения потенциала в произвольной точке B объема V . С этой целью окружим точку B сферой s_B малого радиуса ρ (рис. Н.1, б) и применим формулу (Н.4) к поверхностям s и s_B :

$$\int_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) ds + \int_{s_B} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} \right) ds = 0;$$

\vec{n} — нормаль к поверхности s ; \vec{v} — нормаль к поверхности s_B ; обе они внешние к объему V .

Устремим радиус ρ к нулю. При этом

$$\lim_{s_B} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial v} ds = 0,$$

так как $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ величина ограниченная (функция φ непрерывна в области V), s_B стремится к нулю как ρ^2 , а $\frac{1}{r}$ возрастает как $\frac{1}{\rho}$. При $\rho \rightarrow 0$ потенциал точек поверхности s_B примерно равен потенциалу φ_B точки B :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = \frac{1}{r^2}.$$

Кроме того, учтем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{s_B} \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} ds \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi_B \int_{s_B} \frac{ds}{r^2} = \varphi_B \cdot \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \varphi_B.$$

Таким образом, потенциал произвольной точки B внутри области V

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi} \left[\int_s \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] ds. \quad (\text{H.5})$$

Он определяется значением потенциала и нормальной производной потенциала на поверхности, ограничивающей область V . Физически первое слагаемое формулы (H.5) обусловлено поверхностными зарядами, как бы вкрапленными в поверхность s , а второе — зарядами диполей на поверхности, т. е. двойным заряженным слоем.

§ Н.4. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Положим, что в точке A рис. Н.1, ϑ находится точечный заряд $q = 4\pi\epsilon_a$, а поверхность s является проводящей и заземлена, т. е. потенциал ее равен нулю. Вследствие электростатической индукции на внутренней стороне поверхности возникают отрицательные наведенные заряды плотностью $-\sigma$, а на наружной заряды $+\sigma$. Суммарный отрицательный заряд на внутренней поверхности равен суммарному положительному заряду на внешней поверхности и каждый из них численно равен q .

Обозначим расстояние произвольной точки B до точки A через r , а до произвольной точки на поверхности — через R . Тогда

$$\varphi_B = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_s \frac{\sigma ds}{R}.$$

Если точка B будет находиться на поверхности s , то потенциал ее по условию задачи должен быть равен нулю.

Функцией Грина $G = \frac{1}{r} + g$ называют функцию, которая обладает свойством потенциала произвольной точки B в рассматриваемой задаче, т. е. она является гармонической функцией и принимает нулевое значение на поверхности s . Функция G определена через функцию g . Функция g представляет собой решение уравнения Лапласа для рассматриваемой задачи. Основная трудность решения методом функций Грина заключается в отыскании функции g . Она найдена лишь для некоторых частных случаев: например, в поле точечного заряда $q = 4\pi\epsilon_a$, расположенного на расстоянии h от проводящей плоскости (рис. Н.1, ϑ), $G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$.

§ Н.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА φ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ ГРИНА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В объеме V , ограниченном поверхностью s , имеются объемные заряды ρ , распределенные с заданной плотностью, известны потенциалы поверхностей и известна функция Грина. Положим в формуле (Н.4) $\alpha = g = G - \frac{1}{r}$, учтем, что $\nabla^2 \alpha = 0$, а $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$. Тогда

$$\int_V \left(G - \frac{1}{r} \right) \frac{\rho}{\epsilon_a} dV = \oint_s \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(G - \frac{1}{r} \right) - \left(G - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] ds. \quad (\text{Н.6})$$

Кроме того, из физических соображений следует, что потенциал произвольной точки B определяется объемными и поверхностными зарядами, а также двойным заряженным слоем (диполями) на границе:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds. \quad (\text{Н.7})$$

Вычтем (Н.6) из (Н.7), учтем, что функция Грина на поверхности s равна нулю. Получим формулу для нормальной производной потенциала произвольной точки φ_B через функцию Грина и ее нормальную производную:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V G \rho dV - \frac{1}{4\pi} \oint_s \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad (\text{Н.8})$$

где n — внешняя нормаль к объему. Примеры на применение формулы (Н.8) см. в [56].

Приложение О

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод интегральных уравнений * представляет собой метод расчета магнитных и электрических полей путем сведения задачи к интегральным уравнениям и числового решения их на ЭВМ. В настоящее время его применяют для двухмерных полей, но с увеличением объема памяти применяемых ЭВМ он будет распространен и на трехмерные поля.

Идею метода рассмотрим применительно к магнитному полю, образованному намагничивающими обмотками, геометрия и ток в которых известны, и намагниченными ферромагнитными телами. Однородно намагниченные ферромагнитные тела в расчетном смысле можно заменить вакуумом (воздухом), поместив на поверхность ферромагнитных тел поверхностные токи с плотностью σ на единицу длины (пояснения о поверхностных токах см. в § 3.24, где они были обозначены δ_m). Значение σ в различных точках поверхности неизвестно и подлежит определению. Значение плотности тока проводимости δ в обмотках известно.

Рассмотрим условия на границе между ферромагнитным телом (среда e) и воздухом (среда i) — рис. О.1, а. На рис. О.1, б показана та же граница, что и на рис. О.1, а, но ферромагнитное (ф. м.) тело заменено воздухом, а на границе помещен поверхностный ток с плотностью σ на единицу длины.

* Идея метода предложена Г. А. Гринбергом [41]. Дальнейшее развитие метода и доведение его до практических расчетов осуществлено О. В. Тозони [48, 53], Э. В. Колесниковым, В. М. Алехиным и др.

Тангенциальные (о чем свидетельствует индекс t) составляющие напряженности поля на границе H_t^i в среде i и H_t^e в среде e состоят каждая из двух компонент: из составляющей H_t^i , обусловленной всеми токами проводимости, протекающими по обмоткам электрического аппарата, и всеми поверхностными токами (их называют связанными токами) на границе ферромагнитной области, кроме поверхностного

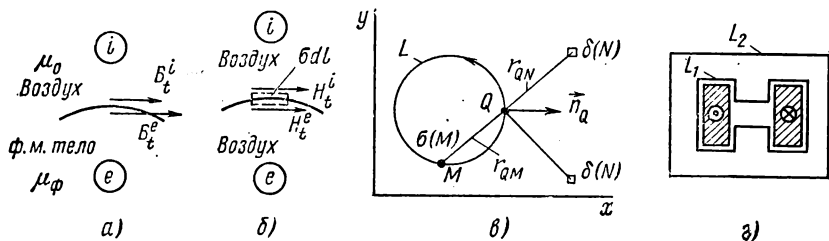


Рис. О.1

тока σdl , протекающего по рассматриваемому элементу поверхности, и из составляющей H_t^e , обусловленной поверхностным током σdl в рассматриваемом элементе поверхности ферромагнитного тела (выбран направленным к читателю).

Тангенциальные составляющие индукции на границе

$$B_t^i = \mu_0 H_t^i; \quad B_t^e = \mu_\phi H_t^e.$$

Каждая из них состоит из двух компонент:

$$B_t^i = B_t' - B_t''; \quad B_t^e = B_t' + B_t'', \quad (\text{O.1})$$

$$\text{но } B_t' = H_t' \mu_0 \quad \text{и} \quad B_t'' = H_t'' \mu_0, \quad (\text{O.2})$$

так как они определены, когда среда — неферромагнитна.

Применим закон полного тока к пунктирному контуру на рис. О.1, б, охватывающему кусочек границы длиной dl . Получим

$$2H_t'' = \sigma. \quad (\text{O.3})$$

При составлении циркуляции по этому контуру учли, что по верхней и по нижней границам контура составляющих H_t' в соответствии с рис. О.1, б нет. Так как тангенциальные составляющие напряженности поля на границе воздух — ферромагнитное тело равны, то

$$\frac{B_t^i}{\mu_0} = \frac{B_t^e}{\mu_\phi}, \quad (\text{O.4})$$

где μ_ϕ — магнитная проницаемость ферромагнитного тела.

Имея в виду (O.2), (O.3) и (O.1), из (O.4) получаем

$$H_t' = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\mu_\phi + \mu_0}{\mu_\phi - \mu_0}.$$

Следовательно,

$$B_t' = \mu_0 H_t' = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \cdot \frac{\mu_\phi + \mu_0}{\mu_\phi - \mu_0}.$$

Отсюда находим поверхностную плотность тока для гладких участков поверхности ферромагнитного тела через B_t' , μ_ϕ и μ_0 :

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_\phi - \mu_0}{\mu_\phi + \mu_0} \cdot B_t'. \quad (\text{O.5})$$

Но B'_i можно найти как ротор от векторного потенциала A , который определяется всеми токами проводимости δ в обмотках и поверхностными токами σ на поверхностях ферромагнитных тел.

Для плоскопараллельного поля

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_s \delta(N) \ln \frac{1}{r_{QN}} ds_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_L \sigma(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M,$$

где A — значение вектора потенциала в произвольной точке наблюдения Q , расположенной на контуре ферромагнитного тела L ;

N — произвольная точка сечения обмотки с током, плотность тока в которой $\delta(N)$;

r_{QN} — расстояние от точки Q до точки N (рис. О.1, θ);

M — произвольная точка на контуре L с плотностью поверхностного тока $\sigma(M)$.

Обход контура выберем против часовой стрелки, а нормаль n направим во внешнюю область по отношению к контуру L . Тогда $B'_i = -\frac{\partial A}{\partial n}$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{QN}} = -\frac{d}{dr_{QN}} \ln r_{QN} \cdot \frac{\partial r_{QM}}{\partial n} = \frac{1}{r_{QN}} \cos(r_{QN}, n),$$

$$\text{то } B'_i = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_s \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} ds_N - \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_M. \quad (\text{О.6})$$

Подставив формулу (О.6) в (О.5), получим интегральное уравнение второго рода Фредгольма относительно плотности поверхностного тока на контуре L ферромагнитного тела:

$$\sigma(Q) + \frac{1}{\pi} \cdot \lambda \oint_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_M = -F(Q). \quad (\text{О.7})$$

$$\text{Здесь } \lambda = \frac{\mu_F - \mu_0}{\mu_F + \mu_0};$$

$$F(Q) = \frac{1}{\pi} \lambda \int_s \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} ds_N. \quad (\text{О.8})$$

Для каждой точки Q контура L функция $F(Q)$ может быть подсчитана заранее [до решения уравнения (О.7)], так как распределение тока проводимости $\delta(N)$ и геометрия магнитной системы известны. Если контуров, ограничивающих ферромагнитную область, несколько (т. е. область многосвязна) — например, на рис. О.1, g область ограничивают два контура L_1 и L_2 , — то уравнение (О.7) заменяют системой уравнений (число уравнений равно числу контуров). В каждое уравнение входят слаженные от поверхностных токов и в других контурах (а не только от поверхностных токов в своем контуре).

Уравнение типа (О.7) решают на ЭВМ итерационным методом, заменяя интегралы конечными суммами. Чтобы итерационный процесс сходил, используют интегральные соотношения для контуров L , вытекающие из закона полного тока. После нахождения $\sigma(Q)$ определяют B'_i , а по ним и по A — любую точечную или интегральную характеристику поля.

Подробное рассмотрение метода, составление программ для ЭВМ, числовые примеры и распространение метода на нелинейные магнитные системы читатель найдет в [53]. Метод имеет большое будущее, так как позволяет рассчитывать поля, не поддающиеся решению классическими методами.

О применении метода к электростатическим полям см. [56].

Приложение П

МЕТОД КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОТОБРАЖЕНИЙ)

Метод конформных преобразований представляет собой метод анализа и расчета неизменных во времени двумерных электрических и магнитных полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа.

§ П.1. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Расположим оси декартовой системы в исследуемом поле так, что ось z будет перпендикулярна полю *. Плоскость xoy будем называть плоскостью z . Каждая точка поля имеет некоторые координаты x и y . Плоскость xoy можно считать комплексной плоскостью. Тогда положение точки на плоскости будет характеризоваться комплексным числом $z = x + jy$.

Совокупность точек x, y , принадлежащих эквипотенциальной линии, обозначим $U(x, y) = U$, а совокупность точек, принадлежащих силовой линии, назовем $V(x, y) = V$. Из предыдущего (см. § 15.5) известно, что в любой точке поля силовые и эквипотенциальные линии взаимно перпендикулярны, т. е. отрезок линии U и отрезок линии V в любой точке поля взаимно перпендикулярны. Следовательно, одну из функций, например U , можно принять в качестве действительной, а другую, например V , — в качестве мнимой части некоторого комплексного числа $\omega = U + jV$.

ω называют *комплексным потенциалом*. Он описывает совокупность силовых и эквипотенциальных линий поля, т. е. ортогональную сетку или картину поля. U называют *потенциальной функцией*, а V — *функцией потока* (так как через нее может быть найден поток вектора, характеризующего это поле).

Можно придать функции U и V противоположный смысл, т. е. U считать функцией потока, а V — потенциальной функцией. Если считать U потенциальной функцией, то проекции вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y$ на оси x и y соответственно равны:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{и} \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{П.1})$$

[ср. с формулами (15.8)].

Отсюда следует, что модуль напряженности поля

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \left| \frac{d\omega}{dz} \right|.$$

Аналогичные формулы можно записать и для магнитного поля.

§ П.2. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Конформными называют преобразования совокупности точек плоскости $z = x + jy$ в совокупность точек плоскости $\omega = U + jV$, осуществляемых с помощью аналитической функции $\omega = f(z)$.

Функцию $\omega = U + jV = f(x + jy) = f(z)$ называют аналитической, если производная $\frac{d\omega}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$ не зависит от направления, вдоль которого взято приращение Δz , т. е. производная $\frac{d\omega}{dz}$ аналитической функции должна быть одна и та же, если приращение dz один раз взять вдоль оси x ($dz = dx$), а другой раз — вдоль оси y ($dz = jdy$). Так, когда приращение Δz взято вдоль оси x , приращение функции

* Картина поля будет повторяться во всех плоскостях, перпендикулярных оси z .

$\Delta_x w = \Delta_x U + j \Delta_x V$. Если же приращение dz взять вдоль оси y , то приращение функции

$$\Delta_y w = \Delta_y U + j \Delta_y V.$$

Учитывая сказанное, имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x}; \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial w}{j \partial y} = - \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (\text{П.3})$$

Приравнявая правые части (П.2) и (П.3), получим уравнения, называемые уравнениями Коши — Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (\text{П.4})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (\text{П.5})$$

Можно доказать, что функции U и V удовлетворяют уравнению Лапласа. Чтобы убедиться в том, что функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, продифференцируем (П.4) по x , а (П.5) — по y :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}.$$

Если сложить эти равенства, то получим уравнение Лапласа относительно U . Аналогичное доказательство можно провести и по отношению к функции V .

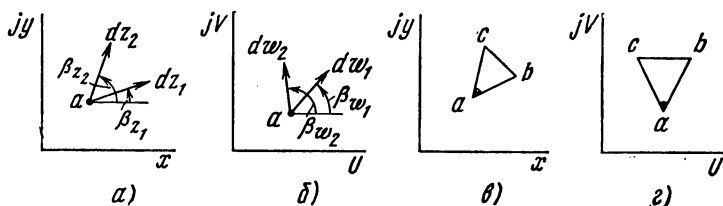


Рис. П.1

Если в произвольной точке a плоскости z (рис. П.1, а) взять два приращения: $dz_1 = |dz_1| e^{j\beta_{z_1}}$ и $dz_2 = |dz_2| e^{j\beta_{z_2}}$, то в точке a плоскости w (каждой точке плоскости z соответствует некоторая точка в плоскости w , рис. П.1, б) им будут соответствовать приращения $dw_1 = |dw_1| e^{j\beta_{w_1}}$ и $dw_2 = |dw_2| e^{j\beta_{w_2}}$. В силу аналитичности функции w

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$$

при $dz = dz_1$ при $dz = dz_2$

Поэтому

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} e^{j(\beta_{w_1} - \beta_{z_1})} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} e^{j(\beta_{w_2} - \beta_{z_2})}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} \quad \text{и} \quad \beta_{w_2} - \beta_{w_1} = \beta_{z_2} - \beta_{z_1},$$

т. е. бесконечно малой фигуре на плоскости z (рис. П.1, в) соответствует подобная бесконечно малая фигура на плоскости w (рис. П.1, г).

Если за потенциальную функцию принять функцию U , то в соответствии с формулой (П.1) $E = Ee^{j\psi}$, где

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \quad \text{и} \quad \psi = 180^\circ + \arctg \left(\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial U}{\partial x}} \right).$$

§ П.3. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ НА РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Прямая задача формулируется следующим образом. Известны эквипотенциальные линии плоскости z (обычно известны две линии в соответствии с тем, что поле создается двумя электродами — поверхность каждого электрода является эквипотенциалью). Требуется найти такую функцию $w = f(z)$, действительная U или мнимая V часть которой удовлетворяла бы уравнению $U(x, y) = \text{const}$ [или соответственно уравнению $V(x, y) = \text{const}$ на поверхности каждого электрода]*.

Если такая функция будет найдена, то на основании теоремы единственности она будет правильно описывать поле во всех его точках.

Очертания электродов в плоскости z могут быть самыми различными. Если очертания электродов таковы, что их можно представить кусочно-ломаными прямыми, то задачу нахождения функции $w = f(z)$ можно решить в общем виде (по крайней мере принципиально) с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца (см. § П.5). Если же очертания электродов в плоскости z таковы, что не могут быть представлены кусочно-ломаными прямыми, то общий метод нахождения функции $w = f(z)$ для таких задач в настоящее время не известен. Тем не менее метод конформных отображений часто стремятся применить и в этом случае, решая задачу обходным путем — просматривают уже известные решения, имеющиеся в учебной и специальной литературе, и пытаются разыскать такое, в котором форма двух эквипотенциалей, если и не полностью совпадает с формой (очертаниями) электродов исследуемого поля, то достаточно близка к ним. Это решение и принимают в качестве искомого.

Обратная задача формулируется так. Задана некоторая аналитическая функция $w = f(z)$. Требуется выяснить, взаимное конформное преобразование каких полей может быть осуществлено с помощью этой функции. В качестве примера обратной задачи рассмотрим преобразование, осуществляемое функцией

$$w = mAr \operatorname{ch} \frac{z}{k}, \quad (\text{П.6})$$

где m и k — некоторые числовые коэффициенты.

Разрешив (П.6) относительно z , будем иметь

$$z = x + jy = k \operatorname{ch} \frac{U + jV}{m} = k \operatorname{ch} \frac{U}{m} \cos \frac{V}{m} + jk \operatorname{sh} \frac{U}{m} \sin \frac{V}{m}.$$

Следовательно,

$$x = k \operatorname{ch} \frac{U}{m} \cos \frac{V}{m}; \quad (\text{П.7})$$

$$y = k \operatorname{sh} \frac{U}{m} \sin \frac{V}{m}. \quad (\text{П.8})$$

* Отметим, что ортогональная сетка на плоскости w может быть описана не только в декартовой, но и в полярной системе координат. В полярной системе $w = re^{j\beta}$ и линии $r = \text{const}$ могут быть приняты за силовые линии, а линии $\beta = \text{const}$ — за эквипотенциали. Полярная сетка использована в § П.4 — П.6.

Разделим уравнение (П.7) на $k \operatorname{ch} \frac{U}{m}$ и уравнение (П.8) на $k \operatorname{sh} \frac{U}{m}$; возведем полученные уравнения в квадрат и сложим. Получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{k^2 \operatorname{ch}^2 \frac{U}{m}} + \frac{y^2}{k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{U}{m}} = 1. \quad (\text{П.9})$$

Полуоси его

$$a = k \operatorname{ch} \frac{U}{m} \quad \text{и} \quad b = k \operatorname{sh} \frac{U}{m}.$$

Из (П.9) следует, что различным $U = \text{const}$ соответствует семейство конфокальных эллипсов с фокусным расстоянием от центра $\sqrt{a^2 - b^2} = k$.

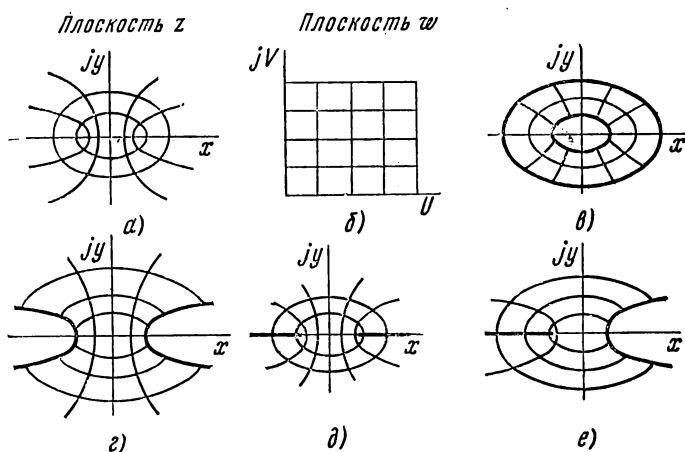


Рис. П.2

Разделив уравнение (П.7) на $k \cos \frac{V}{m}$ и уравнение (П.8) на $k \sin \frac{V}{m}$, а затем возведя их в квадрат и вычтя одно из другого, получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{k^2 \cos^2 \frac{V}{m}} - \frac{y^2}{k^2 \sin^2 \frac{V}{m}} = 1 \quad (\text{П.10})$$

с полуосями

$$a_1 = k \cos \frac{V}{m} \quad \text{и} \quad b_1 = k \sin \frac{V}{m}.$$

Уравнение (П.10) при $V = \text{const}$ описывает семейство конфокальных гипербол с фокусным расстоянием $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = k$.

Таким образом, функция $w = mAr \operatorname{ch} \frac{z}{k}$ конформно преобразует совокупность взаимно перпендикулярных эллипсов и гипербол на плоскости z (рис. П.2, а) в совокупность взаимно перпендикулярных прямых на плоскости w (рис. П.2, б).

В § П.2 говорилось, что роль потенциальной функции может выполнять либо функция U , либо функция V .

Если в рассматриваемом случае под потенциальной функцией понимать функцию U , то эквипотенциальные поверхности будут эллипсами, а поле на плоскости z

будет представлять собой поле между двумя конфокальными эллиптическими электродами (рис. П.2, е).

Если же под потенциальной функцией в рассматриваемом примере понимать функцию V , то поле на плоскости z будет являться полем между двумя электродами гиперболической формы (рис. П.2, е).

В предельном случае, когда полуось $b_1 = 0$, гипербола вырождается в прямую (рис. П.2, д) и исследуемое поле представляет собой поле между двумя плоскими пластинками.

Электроды могут иметь и неодинаковую форму, например левый электрод — форму плоской пластинки, а правый — форму гиперболы (рис. П.2, е). Постоянные m и k определяют из граничных условий.

§ П.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ z В ПОЛЕ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ w

Координату некоторой точки на плоскости w запишем в полярной системе координат: $w = re^{j\beta}$ (обозначения см. на рис. П.3, б). Свяжем переменные z и w соотношением

$$z = x + jy = A \ln \frac{r}{r_0}.$$

Здесь A и r_0 — некоторые постоянные. Тогда $x = A \ln \frac{r}{r_0}$ и $y = A\beta$.

На плоскости z (рис. П.3, а) имеется равномерное поле. Оно образовано двумя плоскими электродами. Один электрод совпадает с осью x и имеет потенциал $\varphi_1 = 0$. Второй электрод удален от оси x на расстояние d и имеет потенциал φ_2 . На плоскости z эквипотенциали являются прямыми, параллельными оси x , а силовые линии параллельны оси y .

На плоскости w при использовании полярной системы координат линии равного потенциала будут соответствовать линиям $A\beta = \text{const}$, т. е. будут являться лучами, проведенными из начала координат, а эквипотенциали $A \ln \frac{r}{r_0} = \text{const}$ будут являться окружностями.

Положим, что эквипотенциаль $y = d$ плоскости z отображена на плоскости w отрицательной полуосью $-U$, а эквипотенциаль $y = 0$ — положительной полуосью $+U$. Точке $w = 0$ соответствует $x = -\infty$. Определим постоянную A . Полу-прямой $-U$ соответствует $\beta = \pi$, поэтому $y = d = A\pi$. Отсюда $A = \frac{d}{\pi}$.

Найдем соответствие между силовыми линиями в плоскости z и в плоскости w . Силовой линии $x = 0 = \frac{d}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ соответствует полуокружность радиусом $r = r_0$ (r_0 — произвольный радиус, играющий роль единицы измерения). Силовой линии

$x = b = \frac{d}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ отвечает полуокружность радиусом $r = r_0 e^{\frac{b\pi}{d}}$. Силовой линии $x = 2b$

отвечает полуокружность $r = r_0 e^{\frac{2b\pi}{d}}$ и т. д.

Таким образом, поле в верхней полуплоскости w , конформно отображающее равномерное поле на плоскости z , образовано двумя полупрямыми, совпадающими с осью $+U$ и $-U$, которые отделены друг от друга в точках $w = 0$ и разность потенциалов между которыми φ_2 .

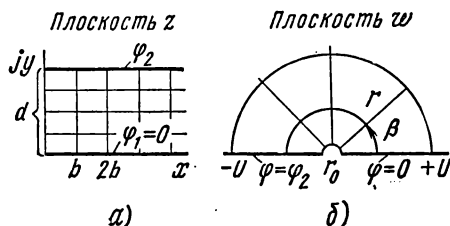


Рис. П.3

§ П.5. ИНТЕГРАЛ КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА

Поле на плоскости z , образованное между осью x и ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ с конечным числом изломов (рис. П.4, а), может быть отображено на верхнюю полуплоскость w с помощью преобразования Кристоффеля — Шварца:

$$dz = A (w - U_1)^{\alpha_1} (w - U_2)^{\alpha_2} \dots (w - U_n)^{\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw. \quad (\text{П.11})$$

Здесь A — некоторая постоянная; U_1, U_2, \dots, U_n — точки на оси U (рис. П.4, б), соответствующие одноименным точкам z_1, z_2, \dots, z_n . Исходной точке z_0 отвечает некоторая точка U_0 на оси U .

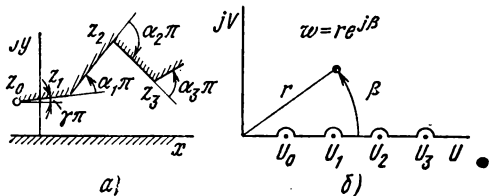


Рис. П.4

Все углы α в формуле (П.11) измеряются в долях от π . Угол положительный, если при переходе от предыдущего отрезка к последующему образуется угол, вдающийся в поле. Так, для рис. П.4, а $\alpha_1 > 0$, но $\alpha_2 < 0$. Угол $\gamma\pi$ отсчитывается от оси $+x$ до отрезка $z_0 - z_1$. Линия $z_0 - z_1 - \dots - z_n$ представляет собой след электрода, по-

этому она является эквипотенциалью. Перемещение вдоль этой линии соответствует перемещению вдоль линии U^* , при этом $dw = dU$. Следовательно, для перемещения вдоль линии $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ в соответствии с (П.11)

$$dz = A (U - U_1)^{\alpha_1} (U - U_2)^{\alpha_2} \dots (U - U_n)^{\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dU.$$

Расположим оси x и U параллельно, тогда при перемещении по участку $z_0 - z_1$

$$\frac{dz}{dU} = A (U - U_1)^{\alpha_1} (U - U_2)^{\alpha_2} \dots (U - U_n)^{\alpha_n} e^{j\gamma\pi}.$$

На этом участке модуль $\left| \frac{dz}{dU} \right|$ изменяется, а аргумент постоянен и равен $\gamma\pi$.

При переходе через точку z_1 бином $(U - U_1)$ изменяет знак и $(U - U_1)^{\alpha_1}$ становится равным

$$[-1 (U_1 - U)]^{\alpha_1} = [e^{j\pi} (U_1 - U)]^{\alpha_1} = (U_1 - U)^{\alpha_1} e^{j\alpha_1\pi}.$$

Таким образом, для второго участка

$$\frac{dz}{dU} = A (U_1 - U)^{\alpha_1} (U - U_2)^{\alpha_2} \dots (U - U_n)^{\alpha_n} e^{j(\gamma\pi + \alpha_1\pi)}.$$

В точках U_0, U_1, \dots, U_n производная изменяется скачком, поэтому конформность в этих точках нарушается. Интегрируя (П.11), получим интеграл Кристоффеля — Шварца

$$z = A \int (w - U_1)^{\alpha_1} (w - U_2)^{\alpha_2} \dots (w - U_n)^{\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw + C_1 + jC_2, \quad (\text{П.12})$$

где $C_1 + jC_2$ — постоянная интегрирования.

Формула (П.12) позволяет конформно преобразовать поле плоскости z (образованное кусочно-ломаными линиями) в поле верхней полуплоскости w .

* Для полярной системы координат $U = \text{const}$ не является уравнением эквипотенциали.

§ П.6. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА

Рассмотрим картину поля на краю плоского конденсатора рис. П.5, а. Оси координат плоскости z расположим так, что ось x совпадет со средней линией конденсатора (потенциал ее примем равным нулю). Верхний электрод, будучи параллелен оси x , удален от нее на расстояние h , простирается от точки b до $-\infty$ и имеет потенциал φ_2 . Пунктиром показан нижний электрод.

Ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ (рис. П.5, б) в данном случае является линия, состоящая из трех участков. Первый участок идет по верхней части электрода из точки a (из $-\infty$) до точки b . Участок расположен параллельно оси x , поэтому $\varphi_1 = 0$. Второй участок от точки b до точки c (до $-\infty$) по нижней части электрода.

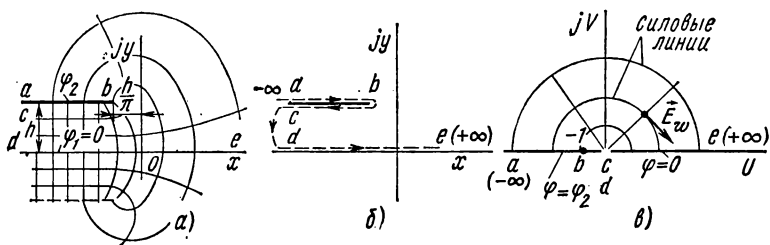


Рис. П.5

Так как угол, образованный первым и вторым участками, вдается в поле и численно равен π , то $\alpha_1 = 1$. Третий участок от точки c ($-\infty$) вдоль положительного направления оси x до точки e , находящейся в $+\infty$. Так как при переходе от второго участка к третьему поле вдается в электрод, то $\alpha_2 = -1$.

Линию ab плоскости z отобразим на отрицательную полуось $-U$ плоскости w так (рис. П.5, в), чтобы точка a находилась в точке $U = -\infty$; точка b — в точке $U = -r_0 = -1$; точки c и d — в точке $U = 0$ и точка e — в $U = +\infty$. Тогда в соответствии с формулой (П.11)

$$dz = A(w+1)^1(w-0)^{-1}dw \quad (6)$$

и

$$z = x + jy = A \int (w+1)w^{-1}dw + C_1 + jC_2,$$

или

$$z = A \left(w + r_0 \ln \frac{w}{r_0} \right) + C_1 + jC_2.$$

На плоскости w будем пользоваться полярной системой координат $w = re^{j\beta}$. Разделяя действительные и мнимые части, найдем:

$$x = A \left(r \cos \beta + r_0 \ln \frac{r}{r_0} \right) + C_1; \quad (П.13)$$

$$y = A (r \sin \beta + r_0 \beta) + C_2. \quad (П.14)$$

Определим постоянные A , C_1 и C_2 .

Постоянную C_2 найдем из условия, что для участка de плоскости z имеем $y = 0$ и что ему на плоскости w соответствует $\beta = 0$. Подставляя $\beta = 0$ и $y = 0$ в (П.14), находим $C_2 = 0$.

Для нахождения A учтем, что для участка ab плоскости z $y = h$, а на плоскости w этому участку соответствует $\beta = \pi$. Подставляя эти данные в (П.14), определим $A = \frac{h}{\pi}$.

Подставляя данные, соответствующие точке $b\left(x = -\frac{h}{\pi}, \beta = \pi\right)$, в уравнение (П.13), найдем $C_1 = 0$. Учитывая, что $r_0 = 1$, перепишем (П.13) и (П.14):

$$x = \frac{h}{\pi} \left(r \cos \beta + \ln \frac{r}{r_0} \right); \quad (\text{П.15})$$

$$y = \frac{h}{\pi} (r \sin \beta + \beta). \quad (\text{П.16})$$

Эквипотенциалами на плоскости w являются прямые $\beta = \text{const}$. Для построения на плоскости z эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ ($\varphi_2 > \varphi > 0$) поступаем следующим образом. Находим угол $\beta = \frac{\varphi}{\varphi_2} \pi$, подставляем найденное β в формулы (П.15) и

(П.16) и, придавая $\frac{r}{r_0}$ различные значения, находим координаты x и y точек искомого эквипотенциала. Для построения силовой линии в формулах (П.15) и (П.16) следует положить $r = \text{const}$ и изменять β от 0 до π . Напряженность поля \vec{E}_w на плоскости w определим исходя из того, что $\pi r E_w = \varphi_2$. Так как \vec{E}_w перпендикулярна эквипотенциальной линии, проведенной под углом β к оси $+U$, то \vec{E}_w с осью $+U$ составляет угол $\beta - \frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$\vec{E}_w = \frac{\varphi_2}{\pi r} e^{j\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (\text{П.17})$$

Напряжение между какими-то двумя бесконечно близко расположенными друг к другу точками плоскости z и между соответствующими им точками плоскости w одинаково и равно

$$\vec{E}_z dz = \vec{E}_w d\omega.$$

Здесь \vec{E}_z — напряженность поля на плоскости z . Отсюда

$$\vec{E}_z = \vec{E}_w \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^*.$$

Подставляя значение \vec{E}_w из (П.17), производной $\frac{d\omega}{dz}$ из (б) и значение $A = \frac{h}{\pi}$, найдем

$$\vec{E}_z = -j \frac{\varphi_2}{rh} \left(\frac{\omega}{\omega + r_0} \right)^* e^{j\beta}.$$

Приложение Р

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

Процесс распространения электромагнитных волн в полости прямоугольного волновода будем рассматривать, полагая, что стенки волновода выполнены из сверхпроводящего материала ($\gamma = \infty$). При этом условии напряженность электрического поля на стенках волновода будет равна нулю (плотность тока на стенках волновода $\delta = \gamma E$ есть величина конечная, поэтому при $\gamma = \infty$ $E \rightarrow 0$).

Полость волновода заполнена диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого ϵ_a и магнитная проницаемость μ_a . Оси координат расположим в соответствии с рис. Р.1, а. Размер полости волновода в направлении оси x обозначим буквой a и размер в направлении оси y — буквой b . Длина волновода в направлении оси z неограничена. Электромагнитное поле в волноводе описывается уравне-

нием (20.3')

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{H} = 0$$

или аналогичным ему уравнением

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{E} = 0.$$

Распространяющиеся в волноводе электромагнитные волны являются волнами, бегущими вдоль оси волновода (вдоль оси z) и стоячими в двух остальных направлениях. Стоячие волны в направлениях x и y образуются вследствие многократных отражений волн от стенок волновода.

Тот факт, что волны являются бегущими вдоль оси z , в формально математическом отношении находит свое выражение в том, что каждая из составляющих волн, подобно бегущим волнам в линии с распределенными параметрами, при записи ее имеет множитель $e^{-k_p z}$, где k_p — коэффициент распространения.

Волны, распространяющиеся в волноводах, разделяют на два типа: H -волны и E -волны*.

Структура H -волны такова, что составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность магнитного поля, а напряженность электрического поля расположена в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для H волны

$$\vec{H} = \vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z; \quad (P.1)$$

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y.$$

Для E -волны имеет место обратная картина: составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность электрического поля, а векторы напряженности магнитного поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для E -волны

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z;$$

$$\vec{H} = \vec{i} H_x + \vec{j} H_y.$$

Какой из этих типов волн возникает, зависит от условий возбуждения волновода. Если возбуждение производить с помощью штырька по рис. 21.8, а, то в волноводе возникнут E -волны. При возбуждении с помощью петли с током, расположенной вблизи узкой стенки волновода в соответствии с рис. 21.8, б, в последнем возникают H -волны.

Приводимые далее выкладки проделаны для H -волны, но они были бы почти такие же и для E -волны. Если подставить (P.1) в уравнение (20.3'), то последнее разобьется на три уравнения для проекций. Для проекции на ось z будем иметь уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_z + \omega^2 \epsilon_a \mu_a H_z = 0. \quad (P.2)$$

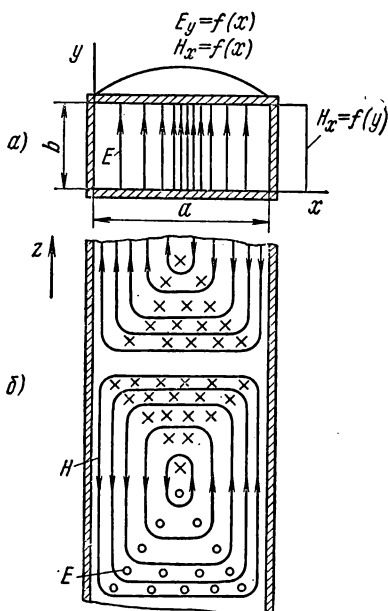


Рис. P.1

* H -волну называют также поперечно-электрической и обозначают ТЕ; E -волну — поперечно-магнитной и обозначают ТМ. Кроме волн ТЕ и ТМ, могут быть еще волны ТЕМ. Они возникают в коаксиальном кабеле (не в волноводе). В волне ТЕМ векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению волны.

Воспользуемся методом разделения переменных Фурье — Бернулли, идея которого была рассмотрена в § 15.39. С этой целью положим

$$\dot{H}_z = XY e^{-k_p z}, \quad (\text{P.3})$$

где X — функция только x ; Y — функция только y . Множитель $e^{-k_p z}$ свидетельствует о том, что вдоль оси z движется бегущая волна.

Подставим (P.3) в (P.2):

$$Y e^{-k_p z} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X e^{-k_p z} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_p^2 XY e^{-k_p z} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a XY e^{-k_p z} = 0. \quad (\text{P.2}')$$

Обозначим:

$$k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a = k^2 \quad (\text{P.4})$$

и разделим (P.2') на $XY e^{-k_p z}$. Будем иметь

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0. \quad (\text{P.5})$$

Сумма двух функций: $\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ и $\frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$, из которых одна является функцией только x , а другая — функцией только y , может равняться постоянному числу $-k^2$ только в том случае, если каждая из этих функций есть постоянное число. Перейдем от частных производных к простым и положим

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -p^2; \quad (\text{P.5a})$$

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -q^2, \quad (\text{P.5б})$$

где p и q — некоторые постоянные числа.

Решением уравнений (P.5a) и (P.5б) являются функции

$$X = \dot{C}_1 \sin(px + \varphi); \quad Y = \dot{C}_2 \sin(qy + \psi),$$

где \dot{C}_1 , \dot{C}_2 , φ и ψ — постоянные интегрирования, которые найдем из граничных условий.

Таким образом, в соответствии с (P.3)

$$\dot{H}_z = H_m \sin(px + \varphi) \sin(qy + \psi) e^{-k_p z}. \quad (\text{P.6})$$

Здесь комплексная амплитуда

$$H_m = \dot{C}_1 \dot{C}_2.$$

Для определения значений p , q , φ , ψ обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным через проекции напряженностей на оси координат:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_x; \quad (\text{P.7})$$

$$\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_y; \quad (\text{P.8})$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_z; \quad (\text{P.9})$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega \mu_a \dot{H}_x; \quad (\text{P.10})$$

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega \mu_a \dot{H}_y; \quad (\text{P.11})$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_a \dot{H}_z. \quad (\text{P.12})$$

В силу того что для H -волны $\dot{E}_z = 0$ и поскольку волны являются бегущими вдоль оси z , то $\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -k_p \dot{E}_y$, а $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -k_p \dot{E}_x$, и из уравнений (Р.10) и (Р.11) следует, что

$$\left. \begin{aligned} k_p \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a \dot{H}_x; \\ k_p \dot{E}_x &= j\omega\mu_a \dot{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Р.13})$$

Как уже говорилось, на внутренних поверхностях стенок волновода напряженность электрического поля равна нулю. Следовательно, $\dot{E}_x = 0$ при $y = 0$ и $y = b$, а $\dot{E}_y = 0$ при $x = 0$ и $x = a$. Если это учесть, то из уравнений (Р.13) имеем:

$$\begin{matrix} \dot{H}_y = \dot{H}_y = 0 & \text{и} & \dot{H}_x = \dot{H}_x = 0. \\ y=0 & y=b & x=0 & x=a \end{matrix}$$

Поскольку $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -k_p \dot{H}_y$, $\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = -k_p \dot{H}_x$, а \dot{H}_y равно нулю при $y = 0$ и $y = b$ и $\dot{H}_x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, то из (Р.7) и (Р.8) находим:

$$\left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)_{y=b} = 0; \quad (\text{Р.14})$$

$$\left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)_{x=a} = 0. \quad (\text{Р.15})$$

Уравнения (Р.14) — (Р.15) служат для определения значений p , q , φ , ψ .

Подставив (Р.6) в (Р.14), найдем $\psi = \frac{\pi}{2}$ и $q = \frac{n\pi}{b}$. Из (Р.15) определим $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $p = \frac{m\pi}{a}$, где m и n — целые числа; m равно числу полуволн электромагнитной волны, которое разместится по ширине волновода; n показывает, сколько полуволн разместится по высоте волновода. Таким образом,

$$\dot{H}_z = \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \quad (\text{Р.16})$$

Найдем теперь \dot{H}_x , \dot{H}_y и \dot{E}_x , \dot{E}_y . Для определения \dot{E}_x в уравнении (Р.7) $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}$ заменим на $-k_p \dot{H}_y = -k_p \frac{k_p \dot{E}_x}{j\omega\mu_a}$. Тогда $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \frac{k_p^2 \dot{E}_x}{j\omega\mu_a} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_x$.

Отсюда

$$\dot{E}_x = -\frac{j\omega\mu_a}{k^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = \frac{j\mu_a\omega}{k^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}, \quad (\text{Р.17})$$

где $k^2 = k_p^2 + \omega^2\epsilon_a\mu_a$.

Аналогично,

$$\dot{H}_y = \frac{k_p \dot{E}_x}{j\omega\mu_a} = \frac{k_p}{k^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \quad (\text{Р.18})$$

$$\dot{E}_y = \frac{j\omega\mu_a}{k^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -j \frac{\omega\mu_a}{k^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \dot{H}_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \quad (\text{Р.19})$$

$$\dot{H}_x = -\frac{k_p}{j\omega\mu_a} \dot{E}_y = \frac{k_p}{k^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \dot{H}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \quad (\text{Р.20})$$

Проанализируем полученные результаты. Коэффициент k_p играет роль постоянной распространения электромагнитной волны вдоль оси z . Если k_p будет действительным числом, то волна при своем продвижении по волноводу будет затухать. Затухание будет отсутствовать, если k_p будет мнимым числом.

Для того чтобы связать k_p с геометрическими размерами волновода a и b и числами m и n , подставим (Р.16) в (Р.2). Получим $k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$.

Но $k^2 = k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a$. Поэтому $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a$; $k_p = 0$ при

$$\omega = \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}; \quad (\text{Р.21})$$

k_p является мнимым числом при $\omega > \omega_0$.

Таким образом, по волноводу с заданными размерами a и b могут распространяться электромагнитные волны, если частота волн больше ω_0 . Размеры a и b волноводов стандартизованы.

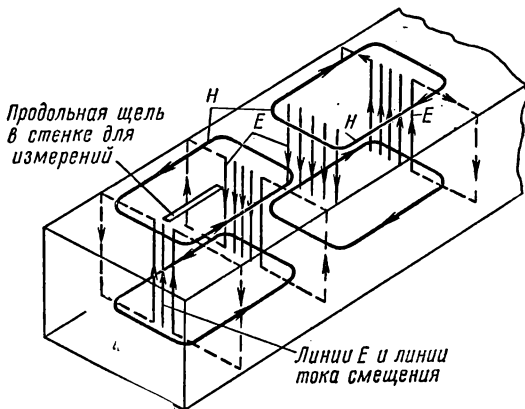


Рис. Р.2

Числа m и n могут принимать любые целые значения, но не могут одновременно равняться нулю, так как тогда все составляющие E и H были бы равны нулю.

Наибольшее практическое значение имеет основная волна, для которой $m = 1$ и $n = 0$. Для этой волны по ширине волновода укладывается одна полуволна, а по высоте волновода интенсивность поля не изменяется.

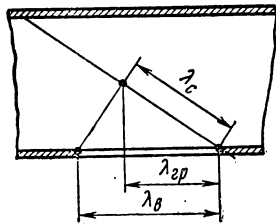


Рис. Р.3

Для того чтобы оценить порядок величины ω_0 для основной волны, возьмем размер $a = 7,2$ см и по формуле (Р.21) найдем

$$\omega_0 \approx 13,1 \cdot 10^9 \text{ рад/сек.}$$

Таким образом, по волноводу может передаваться энергия лишь весьма высокой частоты.

Объемная картина поля для волны H_{10} в некоторый момент времени изображена на рис. Р.2.

Токи смещения в полости волновода переходят в токи проводимости (по стенкам волновода протекают токи проводимости — пунктир на рис. Р.2). Хотя на стенках волновода $E \rightarrow 0$, но так как $\gamma \rightarrow \infty$, то $\delta = \gamma E$ имеет конечное значение. Для измерительных целей в стенках волновода делают прорезы (щели), располагая их так, чтобы они не препятствовали протеканию токов проводимости.

Под волновым сопротивлением волновода $Z_{\text{вв}}$ понимают отношение комплексных значений взаимно перпендикулярных составляющих \dot{E} и \dot{H} в полости волновода. Так, для основной волны H_{10}

$$Z_{\text{вв}} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}}, \quad (\text{Р.22})$$

где $\lambda_c = \frac{v_c}{f}$; $2a$ — наибольшая из возможных длина волны в данном волноводе; $Z_{вв}$ зависит от частоты.

Фазовая скорость направлена под некоторым углом к оси волновода:

$$v_{фв} = \frac{j\omega}{k_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - k^2}} = \frac{v_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}}; \quad (P.23)$$

$v_{фв}$ зависит от частоты и оказывается больше скорости движения электромагнитной волны по волноводу v_c , равной скорости света. Для объяснения этого сравнивают скорости $v_{фв}$ и v_c соответственно со скоростью смыкания кромок ножниц и скоростью движения навстречу друг другу рукояток этих ножниц. Кромки ножниц смыкаются быстрее, чем движутся рукоятки этих ножниц. Энергия вдоль оси волновода перемещается с групповой скоростью $v_{гр}$.

Рис. P.3 иллюстрирует соотношение между длиной волны в свободном пространстве $\lambda_c = \frac{v_c}{f}$, длиной волны в волноводe $\lambda_{в} = \frac{v_{фв}}{f}$ и энергетической или групповой длиной волны $\lambda_{гр} = \frac{v_{гр}}{f}$ — расстоянием, на которое перемещается энергия вдоль оси волновода за одно колебание. Из геометрии следует, что $\lambda_{в} \lambda_{гр} = \lambda_c^2$, или $v_{фв} v_{гр} = v_c^2$.

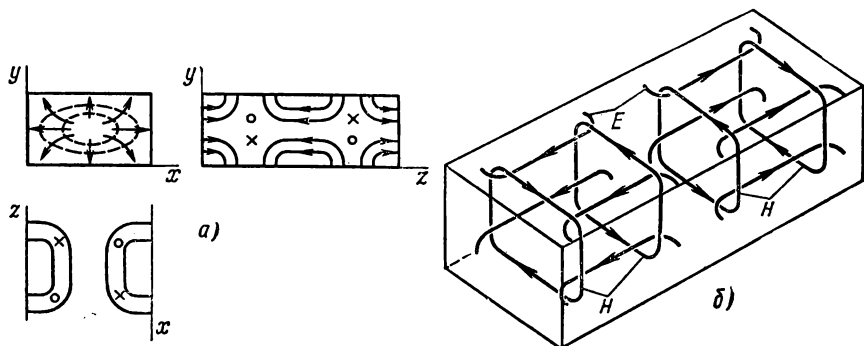


Рис. P.4

Для определения энергии, переносимой бегущей по волноводу электромагнитной волной, следует подсчитать поток вектора Пойнтинга \vec{S} через поперечное сечение волновода. Так, в случае основной волны H_{10} необходимо подсчитать поток вектора $\vec{S} = [\vec{E}_y \vec{H}_x]$, учтя, что \vec{E}_y и \vec{H}_x совпадают по фазе:

$$-\int_s \vec{S} \cdot \vec{ds} = \frac{ab H_m^2 Z_{вв}}{4}. \quad (P.24)$$

Простейшим типом волн ТМ (E -волн) является волна E_{11} . Она имеет компоненты E по осям x , y , z и компоненты H по осям x и y . Если соответствующие комплексные коэффициенты, включающие и $e^{-k_p z}$, обозначить через \dot{C}_x , \dot{C}_y , \dot{C}_z для E -компонент и \dot{C}_1 и \dot{C}_2 для H -компонент, то для волны E_{11} :

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{C}_x \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; & \dot{E}_y &= \dot{C}_y \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; & \dot{E}_z &= \dot{C}_z \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ H_x &= \dot{C}_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; & \dot{H}_y &= \dot{C}_2 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; & \dot{H}_z &= 0. \end{aligned}$$

На рис. Р.4, а в трех проекциях изображена картина поля волны E_{11} , где сплошные линии соответствуют компонентам E , пунктирные (и кружки и крестики) — H ; на рис. Р.4, б дана объемная картина поля. Линии E замыкаются по стенкам волновода.

Между волноводом и линией без потерь с распределенными параметрами имеет место формальная аналогия. Сходными величинами и соотношениями являются: в линии $U, I, U = IZ_{\text{в}}, L_0, C_0, Z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$, в волноводe $E, H, E = HZ_{\text{вв}}, \mu_a, \epsilon_a, Z_{\text{вв}} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}/\sqrt{1-(\lambda_c/2a)^2}$. Аналогию используют в различных целях, например для выяснения влияния неоднородностей (перегородок, окон) в волноводе на распределение волн в областях вдали от неоднородностей. Для этого составляют схему замещения, в которой волновод заменен линией с распределенными параметрами, а неоднородность представлена некоторым четырехполюсником с сосредоточенными параметрами (которые находят опытным путем).

Приложение С

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§. С.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЛАСТЕЙ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Магнитная гидродинамика — это область науки, в которой изучают поведение плазмы или проводящей жидкости (расплавленных металлов или солей) в магнитном или электромагнитном полях.

Плазмой называют полностью или частично ионизованный газ, в котором концентрация положительных и отрицательных ионов одинакова и суммарный заряд в единице объема равен нулю. Этот газ в магнитогидродинамическом приближении можно рассматривать как своеобразную проводящую жидкость. При движении жидкости (плазмы) в магнитном (электромагнитном) поле в ней возникают электрические токи, взаимодействие которых с магнитным полем вызывает механические силы, влияющие на характер ее движения.

За последние 20 лет магнитная гидродинамика особенно интенсивно развивалась в трех направлениях: а) исследование космических проблем; б) изучение способов воздействия на высокотемпературную плазму (ее термонизольцию, импульсное ускорение и т. п.), в) разработка методов электромагнитного воздействия на жидкий металл при его плавке, транспортировке, дозировании.

Применение жидкометаллических теплоносителей в паровых машинах и турбинах, охлаждение атомных реакторов щелочными металлами, натрием и калием, разлив и транспортировка жидкого металла в металлургии — все это вызвало потребность в магнитных насосах, вентилях, дозаторах.

При исследовании поведения проводящей жидкости в магнитном поле свойства ее характеризуют проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a . Значения γ и μ_a полагают известными из молекулярно-кинетической теории. Точно так же, когда изучают поведение плазмы в магнитном поле, значения γ и μ_a ее считают известными из электронной теории. Обычно считают, что среда является однородной и изотропной и что ее свойства не зависят от температуры. Однако при определенных условиях у плазмы может оказаться величиной тензорной, например γ плазмы в области солнечной короны. Иногда оказывается необходимым рассматривать плазму как двухкомпонентную (не однокомпонентную) среду.

§ С.2. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Систему уравнений магнитной гидродинамики образуют следующие группы уравнений:

Уравнения Максвелла применительно к движущейся проводящей среде. Проводящая среда по отношению к некоторой системе отсчета движется со скоростью \vec{v}

во внешнем магнитном поле индукции \vec{B} . Скорость движения среды ничтожно мала по сравнению со скоростью света, поэтому релятивистские поправки в уравнения Максвелла не вносят. Ток смещения не учитывают, так как он ничтожно мал по сравнению с током проводимости.

Напряженность электрического поля равна сумме кулоновой и сторонней составляющих $\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]$. Стороннюю составляющую напряженности получают из выражения для силы Лоренца (см. § 4.1), приняв заряд $q = 1$. Имеем:

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma (\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]); \quad (\text{C.1})$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (\text{C.2})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]), \quad (\text{C.4})$$

где δ — плотность тока.

Уравнение (C.4) представляет собой закон Ома. Решим систему (C.1) — (C.4) относительно вектора \vec{B} . С этой целью найдем \vec{E} из (C.1), заменив \vec{H} на $\frac{\vec{B}}{\mu_a}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma \mu_a} \text{rot } \vec{B} - [\vec{v}\vec{B}].$$

Подставим \vec{E} в (C.2):

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \text{rot rot } \vec{B} - \text{rot } [\vec{v}\vec{B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Так как $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \nabla^2 \vec{B}$, а $\text{div } \vec{B} = 0$, то получим

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \nabla^2 \vec{B} + \text{rot } [\vec{v}\vec{B}] = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{C.5})$$

Уравнение Навье — Стокса выражает собой второй закон Ньютона применительно к единице объема проводящей среды, движущейся в магнитном поле.

Произведение массы единицы объема ρ , движущейся со скоростью \vec{v} жидкости, на ускорение ее $\frac{d\vec{v}}{dt}$ равно сумме сил, действующих на единицу объема:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

где $\frac{d\vec{v}}{dt}$ — полная или материальная производная, которая учитывает изменение \vec{v} в данной точке во времени и изменение \vec{v} вследствие того, что точка наблюдения попадает в поле с иными значениями \vec{v} вследствие движения;

$\vec{F}_1 = -\text{grad } p$ — сила, вызванная перепадом давления и направленная в сторону уменьшения давления (тогда как $\text{grad } p$ направлен в сторону увеличения давления);

$\vec{F}_2 = \rho \vec{g}$ — сила тяжести, действующая на единицу объема; \vec{g} — ускорение силы тяжести в данной точке;

$\vec{F}_3 = \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$ — сила вязкого трения на единицу объема; ν — кинематический коэффициент вязкости. Сила вязкого трения взята пропорциональной второй производной скорости потому, что равна разности сил, действующих с каждой двух противоположных граней объема, отнесенной к расстоянию между гранями;

$\vec{F}_4 = [\vec{\delta}\vec{B}]$ — электромагнитная сила. Выражение для нее получаем из формулы (4.34), если ввести ток I в квадратные скобки и заменить его на произведение

плотности тока $\vec{\delta}$ на сечение $\Delta\vec{s}$, через которое он проходит, и затем обе части выражения $\vec{F} = [I\Delta\vec{s}\vec{\delta}]$ разделить на выделенный объем проводящего тела $\Delta l\Delta s = \Delta l\Delta\vec{s}$.

Силы \vec{F}_2 и \vec{F}_3 малы по сравнению с \vec{F}_1 и \vec{F}_4 и потому их не учитывают. Окончательно имеем

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + [\vec{\delta}\vec{B}]. \quad (\text{C.6})$$

Уравнение непрерывности, выражающее собой то обстоятельство, что изменение массы в элементарном объеме обусловлено притоком жидкости (плазмы),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Уравнение теплового баланса

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + W_{\text{тр}} + \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt}, \quad (\text{C.8})$$

где $\rho c \frac{dT}{dt}$ — тепло, расходуемое на увеличение температуры объема;

c — удельная теплоемкость;

$\lambda \nabla^2 T$ — тепло, приносимое в единичный объем за счет теплопроводности;

λ — коэффициент теплопроводности;

$\frac{\delta^2}{\gamma}$ — джоулевы потери в единице объема;

$W_{\text{тр}}$ — тепло, выделяющееся в объеме в силу наличия трения;

$\frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt}$ — тепло, выделяющееся в объеме при изменении плотности ρ ; p — давление.

В установившемся тепловом режиме температура T неизменна и в этом случае уравнение (C.8) не используется.

§ C.3. ПРОСАЧИВАНИЕ ИЛИ ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Положим, что плазма неподвижна. Из уравнений (C.5) и (C.6) при $\vec{v} = 0$ следует:

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \nabla^2 \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (\text{C.9})$$

$$[\vec{\delta}\vec{B}] = \text{grad } p. \quad (\text{C.10})$$

Уравнение (C.9) является уравнением диффузии или уравнением теплопроводности, где $\frac{1}{\gamma \mu_a}$ — коэффициент диффузии. Если принять, что \vec{B} имеет только одну не равную нулю составляющую в декартовой системе координат $\vec{B} = \vec{i}B_x(x, t)$, то решение (C.9) будет

$$B_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu^2 t}{\gamma \mu_a}} [a(\nu) \cos \nu x + b(\nu) \sin \nu x] d\nu, \quad (\text{C.11})$$

где ν — параметр; $a(\nu)$ и $b(\nu)$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных и граничных условий.

Из (C.11) следует, что поле, просачиваясь сквозь плазму, затухает с постоянной времени

$$\tau = \gamma \mu_a l^2, \quad (\text{C.12})$$

где l — линейный размер области, занятой полем.

На расстоянии l укладывается одно колебание $\sin \nu x$ или $\cos \nu x$ при $\nu = 1$.

§ С.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ БАРЬЕР

Согласно уравнению (С.10) $\text{grad } p$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\delta}$ и \vec{B} (рис. С.1). Отсюда следует, что при определенной конфигурации поля давление p может быть уравновешено электромагнитной силой. Это особенно важно хотя бы для кратковременной локализации плазмы с температурой порядка несколько миллионов градусов, когда на барьеры из какого-либо вещества не приходится рассчитывать.

§ С.5. ВМОРОЖЕННОЕ ПОЛЕ

Положим, что проводимость плазмы γ очень велика, теоретически стремится к бесконечности и что плазма находится в движении со скоростью \vec{v} . На рис. С.2, а показана плоскость, в которой в исходном состоянии расположены линии магнитной индукции. В этой плоскости возьмем произвольный контур и допустим, что скорость движения плазмы поперек линий \vec{B} стала неодинаковой (см. стрелки для \vec{v} на рис. С.2, а). Через некоторое время плоскость деформируется и примет вид,

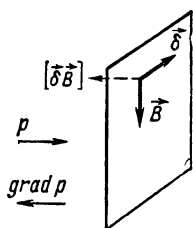


Рис. С.1

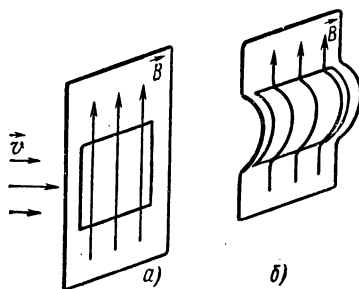


Рис. С.2

изображенный на рис. С.2, б. Силовые линии растянутся вместе с контуром, они как бы приклеены или в заморожены в плазму (поток через контур останется неизменвшимся). Физически это объясняется тем, что при движении плазмы поперек линий \vec{B} в ней индуктируются токи, поле которых, складываясь с первоначальным, так его деформирует, что силовые линии смещаются вместе с плазмой. Практически проводимость γ не бесконечно велика и потому деформация линий \vec{B} несколько отстает от деформации контура.

§ С.6. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

При определенных условиях в плазме могут возникать магнитогидродинамические волны. Для выяснения механизма их возникновения обратимся к рис. С.3. Прямоугольная система координат расположена в плазме так, что внешнее магнитное поле индукции \vec{B}_0 направлено по оси z . Положим, что по какой-то причине слой плазмы l (рис. С.3, б) начал двигаться со скоростью \vec{v} в направлении оси y . Так как движение этого слоя есть движение проводящего тела в магнитном поле, то в каждой точке слоя l возникнет сторонняя напряженность поля $[\vec{v}\vec{B}] = \vec{v}B_0$. Под действием ее в призме возникнут токи проводимости плотностью $\vec{\delta} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{B}$, замыкающиеся через соседние слои, как показано на рис. С.3, а. Результирующая индукция \vec{B} равна сумме индукции внешнего поля \vec{B}_0 и индукции \vec{b} от токов проводимости:

$$\vec{B} = \vec{j}b + \vec{k}B_0.$$

На движущийся в магнитном поле ток будет действовать механическая сила, в каждой точке слоя равная

$$[\vec{\delta} \vec{B}] = \frac{1}{\mu_a} [\text{rot } \vec{B} \vec{B}] = \frac{1}{\mu_a} \left[\left(-\vec{i} \frac{\partial b}{\partial z} \right) (\vec{j} b + \vec{k} B_0) \right] = \vec{k} \left(-b \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \vec{j} B_0 \frac{\partial b}{\partial z}.$$

Сила \vec{F}_1 , действующая на слой призмы 1, начавший двигаться первым, будет замедлять его движение. Слои 2 и 3, расположенные выше и ниже слоя 1 (в них токи направлены в противоположную сторону по сравнению с током в слое 1), будут испытывать силы \vec{F}_2 и \vec{F}_3 , под воздействием которых слои начнут двигаться вдоль оси y . Вдоль направления внешнего магнитного поля возникают две волны, распространяющиеся со скоростью $\vec{v}_1 = \pm \kappa v_1$. Одна из них распространяется вверх,

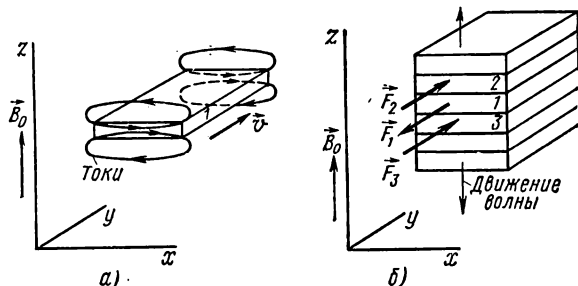


Рис. С.3

другая — вниз. Волны являются поперечными — слои плазмы движутся перпендикулярно направлению распространения волны. Рассмотренный тип волн называют волнами Альфвена.

Давление p волны изменяется только в направлении оси z :

$$\text{grad } p = \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Уравнение (С.5) имеет только одну проекцию на ось y :

$$B_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (\text{С.13})$$

Уравнение (С.6) дает проекции на ось y и на ось z :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_a} \cdot \frac{\partial b}{\partial z}; \quad (\text{С.14})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{b}{\mu_a} \cdot \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (\text{С.15})$$

Дифференцируя (С.13) по t и (С.14) по z , получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\rho \mu_a} \cdot \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.$$

Решение его:

$$b = f_1 \left(t - \frac{z}{v_1} \right) + f_2 \left(t + \frac{z}{v_1} \right).$$

Скорость распространения волны в направлении оси z $v_1 = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_a}}$. При $B_0 = 1 \div 1,5 \text{ тл}$, $\rho = 1 \div 10^4 \text{ кг/м}^3$; v_1 составляет от нескольких сантиметров до не-

скольких десятков метров в секунду. Если $b = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right)$, то из уравнения (С.13) скорость движения плазмы

$$v = - \frac{A}{\sqrt{\rho \mu_a}} \sin \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right).$$

Из уравнения (С.15) давление

$$p = p_0 - \frac{A^2}{2\mu_a} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right),$$

где A и p_0 — некоторые постоянные. Плотность тока $\vec{\delta} = i\vec{\delta}_x$;

$$\delta_x = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot}_x \vec{B} = - \frac{1}{\mu_a} \cdot \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{A\omega}{B_0} \sqrt{\frac{\rho}{\mu_a}} \cos \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right).$$

§ С.7. ЭФФЕКТ СЖАТИЯ (ПИНЧ-ЭФФЕКТ)

В цилиндрическом столбе электрической дуги (рис. С.4) нити тока параллельны. Каждый элемент нити тока находится в магнитном поле индукции \vec{B} , направленной по касательной к нити тока. На каждый элемент тока с плотностью $\vec{\delta}$ действует сила $\vec{F} = [\vec{\delta}\vec{B}]$. Под действием этих сил нити тока стремятся сжаться, столб дуги стре-

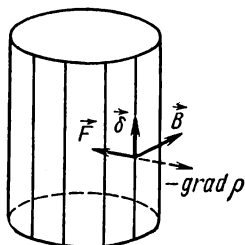


Рис. С.4

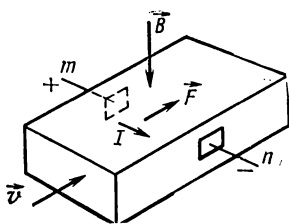


Рис. С.5

мится уплотниться. Но температура газа (плазмы), а следовательно, и давление будут максимальны на оси. Силе сжатия противостоит давление. Система находится в равновесии, когда электромагнитная сила сжатия уравновешена силой давления.

§ С.8. ПРИНЦИП РАБОТЫ МАГНИТНОГО НАСОСА И МАГНИТНОГО ВЕНТИЛЯ

В магнитном насосе механическое воздействие на проводящую жидкость создается магнитным полем. Принцип работы насоса кондукционного типа поясняет рис. С.5. Участок трубопровода находится в скрещенных магнитном и электрическом полях. Магнитное поле направлено сверху вниз, электрическое — от точки m к точке n . Под действием электрического поля в направлении от m к n через жидкость течет ток I . На каждый элемент объема жидкости с плотностью тока $\vec{\delta}$ действует сила $\vec{F} = [\vec{\delta}\vec{B}]$, направленная согласно с направлением движения жидкости по трубопроводу, т. е. устройство действует, как насос.

Если при прочих равных условиях изменить направление электрического или магнитного поля, то возникнет сила, препятствующая движению. В этом случае устройство будет работать в качестве тормоза или вентиля. Управлять величиной силы можно, изменяя величину B .

§ С.9. ПРИНЦИП РАБОТЫ МАГНИТНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

Через канал с большой скоростью \vec{v} продувают нагретую до высокой температуры плазму (рис. С.6, а). В перпендикулярном направлении создают сильное магнитное поле индукции \vec{B} . На ионы плазмы воздействует лоренцова сила $\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$. Под действием ее положительные заряды движутся по направлению \vec{E} к электроду 1, а отрицательные заряды — встречно \vec{E} к электроду 2. Между электродами возни-

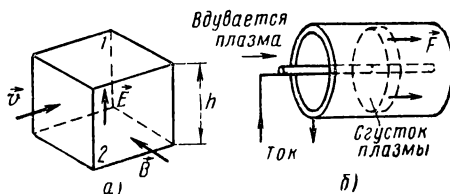


Рис. С.6

кает разность потенциалов, равная Eh . Если электроды замкнуть на сопротивление R , то по замкнутому контуру потечет ток, а плазма будет испытывать тормозящее воздействие.

§ С.10. ПРИНЦИП РАБОТЫ ПЛАЗМЕННОГО РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Сгустки плазмы вдуваются в полость между проводящей трубкой и проводником, расположенным на оси трубки (рис. С.6, б). Плазма замыкает собой трубку и осевой проводник. Ток, протекающий по трубке, плазме и осевому проводнику, создает магнитное поле, которое выдувает плазму вправо. Плазма, получив ускорение, с силой выбрасывается из трубки в вакуум вправо, а трубка получает импульс движения влево.

Приложение Т

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

§ Т.1. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В РАВНОМЕРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, НЕИЗМЕННОМ ВО ВРЕМЕНИ И НАПРАВЛЕННОМ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО СКОРОСТИ

В § Т.1 — Т.6 под заряженной частицей понимаем электрон. Заряд его обозначим $q = -q_e$ и массу m ; $q_e = 1,601 \cdot 10^{-19}$ к, масса m при скорости движения, значительно меньшей скорости света, равна $0,91 \cdot 10^{-27}$ г. Полагаем, что имеет место достаточно высокий вакуум, так что при движении электрон не сталкивается с другими частицами. На электрон, движущийся со скоростью \vec{v} , в магнитном поле индукции \vec{B} действует сила Лоренца (см. § 4.1) $\vec{f} = q [\vec{v}\vec{B}]$.

На рис. Т.1 учтено, что заряд электрона отрицателен, что скорость его $\vec{v} = \vec{j}v$ направлена по оси y , а индукция $\vec{B} = -\vec{i}B$ по оси $-x$. Сила \vec{f} направлена перпендикулярно скорости и является центробежной силой. Она изменяет направление скорости, не влияя на ее величину.

Электрон будет двигаться по окружности радиусом r с угловой частотой $\omega_{\text{ц}}$, которую называют *циклотронной частотой*. Центробежное ускорение равно силе f , деленной на массу:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{q_3 v B}{m}. \quad \text{Отсюда } r = \frac{vm}{Bq_3}. \quad (\text{Т.1})$$

$$\text{Время совершения одного оборота } T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{Bq_3}.$$

Следовательно,

$$\omega_{\text{ц}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{Bq_3}{m}. \quad (\text{Т.2})$$

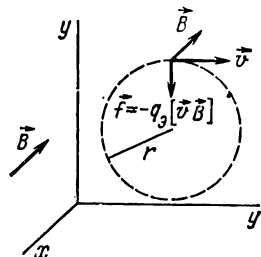


Рис. Т.1

§ Т.2. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В НЕИЗМЕННОМ ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, КОГДА СКОРОСТЬ ЭЛЕКТРОНА НЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА СИЛОВЫМ ЛИНИЯМ

Рассмотрим два случая: в первом электрон будет двигаться в равномерном, во втором — в неравномерном поле.

1. Движение в равномерном поле. Через α на рис. Т.2, а обозначен угол между скоростью электрона \vec{v} и индукцией \vec{B} . Разложим \vec{v} на \vec{v}_1 , направленную по \vec{B} и численно равную $v \cos \alpha$, и на \vec{v}_2 , направленную перпендикулярно \vec{B} и численно равную $v \sin \alpha$. Так как $[\vec{v}_1, \vec{B}] = 0$, то наличие составляющей скорости \vec{v}_1 не вызывает

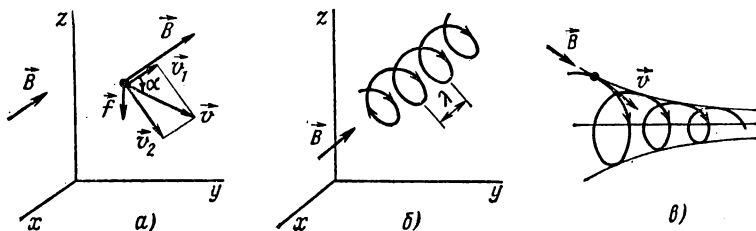


Рис. Т.2

силы воздействия на электрон. Движение со скоростью \vec{v}_2 приводит к вращению электрона вокруг линии \vec{B} , подобно тому как это имело место в § Т.1. В целом электрон будет двигаться по спирали рис. Т.2, б, осевой линией которой является линия магнитной индукции. Радиус спирали $r = \frac{v_2 m}{Bq_3}$, шаг спирали

$$\lambda = T v_1 = \frac{2\pi m}{Bq_3} v_1. \quad (\text{Т.3})$$

Поступательное и одновременно вращательное движение иногда называют *дрейфом электрона*.

2. Движение в неравномерном поле. Если магнитное поле неравномерно, например сгущается (рис. Т.2, в), то при движении по спирали электрон будет попадать

в точки поля, где индукция \vec{B} увеличивается. Но чем больше B , тем при прочих равных условиях меньше радиус спирали r [см. формулу (Т.1)]. Дрейф электрона будет происходить в этом случае по спирали со все уменьшающимся радиусом.

Если бы магнитные силовые линии образовывали расходящийся пучок, то электрон при своем движении попадал бы в точки поля со все уменьшающейся индукцией и радиус спирали возрастал бы.

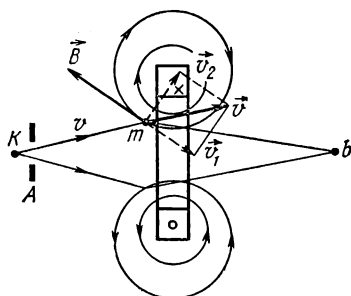


Рис. Т.3

§ Т.3. ФОКУСИРОВКА ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ ПОСТОЯННЫМ ВО ВРЕМЯ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ (МАГНИТНАЯ ЛИНЗА)

Из катода электронного прибора (рис. Т.3) исходит расходящийся пучок электронов. Со скоростью \vec{v} электроны входят в неравномерное магнитное поле узкой цилиндрической катушки с током.

Скорость электрона \vec{v} в произвольной точке m разложим на две составляющие: \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . \vec{v}_1 направлена противоположно \vec{B} , а \vec{v}_2 — перпендикулярно \vec{B} . Возникшая ситуация повторяет рассмотренную в § Т.2. Электрон начнет двигаться по спирали, осью которой является \vec{v}_1 . В результате электронный пучок фокусируется в точке b .

§ Т.4. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В РАВНОМЕРНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ПРИНЦИП РАБОТЫ ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛОГРАФА

Электрон, пройдя расстояние от катода K до узкого отверстия в аноде A (рис. Т.4, а), под действием ускоряющего напряжения $U_{ак}$ увеличивает свою кинетическую

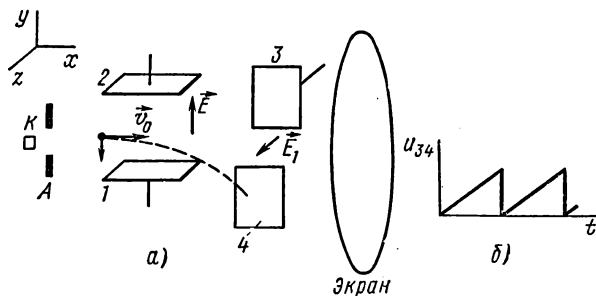


Рис. Т.4

тическую энергию на величину работы сил поля. Скорость v_0 , с которой электрон будет двигаться после выхода из отверстия в аноде, найдем из соотношения $\frac{mv_0^2}{2} = q_э U_{ак}$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2q_э U_{ак}}{m}}.$$

При дальнейшем прямолинейном движении по оси x электрон попадает в равномерное электрическое поле напряженностью \vec{E} между отклоняющими пластинами 1 и 2 (находятся в плоскостях, параллельных плоскости zox). Напряженность \vec{E} направлена вдоль оси y . Пока электрон движется между отклоняющими пластинами,

на него действует постоянная сила $\vec{F}_y = -q_s \vec{E}$, направленная по оси $-y$. Под действием этой силы электрон движется вниз равноускоренно, сохраняя постоянную скорость v_0 вдоль оси x . В результате в пространстве между отклоняющими пластинами электрон движется по параболе. Когда он выйдет из поля пластин 1—2, в плоскости yox он будет двигаться по касательной к параболе. Далее он попадет в поле пластин 3—4, которые создают развертку во времени. Напряжение между пластинами 3—4 U_{34} и напряженность поля между ними E_1 линейно нарастают во времени (рис. Т.4, б). Электрон получает отклонение в направлении оси z , что и дает развертку во времени.

§ Т.5. ФОКУСИРОВКА ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ ПОСТОЯННЫМ ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ (ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЛИНЗА)

Фокусировка основана на том, что, проходя через участок неравномерного электрического поля, электрон отклоняется в сторону эквипотенциали с большим значением потенциала (рис. Т.5, а). Электрическая линза образована катодом, испускающим электроны, анодом, куда пучок электронов приходит сфокусированным,

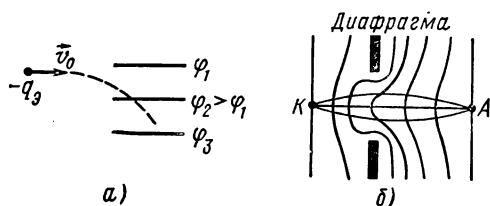


Рис. Т.5

и фокусирующей диафрагмой, представляющей собой пластинку с круглым отверстием в центре (рис. Т.5, б). Диафрагма имеет отрицательный потенциал по отношению к окружающим ее точкам пространства, вследствие этого эквипотенциали электрического поля как бы выпучиваются через диафрагму по направлению к катоду. Электроны, проходя через отверстие в диафрагме и отклоняясь в сторону, фокусируются на аноде.

§ Т.6. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В РАВНОМЕРНЫХ, ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ, НЕИЗМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Пусть электрон с зарядом $q = -q_s$ и массой m с начальной скоростью \vec{v}_0 оказался при $t = 0$ в начале координат на рис. Т.6, а в магнитном и электрическом полях. Магнитная индукция направлена по оси $-x$: $\vec{B} = -i\vec{B}$, т. е. $B_x = B$. Напряженность электрического поля направлена по оси $-z$: $\vec{E} = -k\vec{E}$, т. е. $E_z = E$. Движение электрона будет происходить в плоскости zoy со скоростью $\vec{v} = jv_y + kv_z$. Уравнение движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q_s \vec{E} - q_s [\vec{v} \vec{B}],$$

или

$$j m \frac{dv_y}{dt} + k m \frac{dv_z}{dt} = k (q_s E - q_s v_y B) + j v_z B q_s.$$

Следовательно,

$$\frac{mdv_y}{dt} = q_3 v_z B; \quad m \frac{dv_z}{dt} = q_3 E - q_3 v_y B.$$

В соответствии с формулой (Т.2) заменим $\frac{q_3 B}{m}$ на циклотронную частоту ω_{Π} . Тогда

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_{\Pi} v_z; \quad (Т.4)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q_3 E}{m} - \omega_{\Pi} v_y. \quad (Т.5)$$

Продифференцируем (Т.4) по t и в правую часть уравнения подставим (Т.5):

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_{\Pi}^2 v_y = \frac{q_3 E}{m}. \quad (Т.6)$$

Решим (Т.6) классическим методом:

$$v_y = v_{y\text{пр}} + v_{y\text{св}};$$

$$v_{y\text{пр}} = \frac{q_3 E}{m \omega_{\Pi}} = \frac{E}{B};$$

$$v_{y\text{св}} = A \sin(\omega_{\Pi} t + \nu).$$

Составим два уравнения для определения постоянных интегрирования. Так

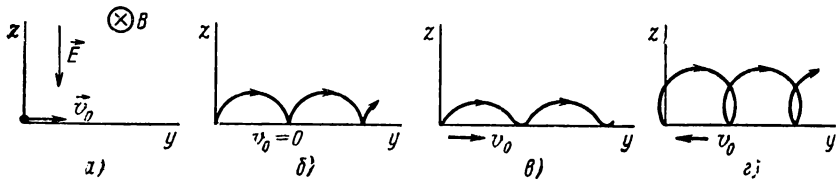


Рис. Т.6

как при $t = 0$ $v_y = v_0$, то $A \sin \nu + \frac{E}{B} = v_0$. При $t = 0$ $v_z = 0$. Поэтому $\left(\frac{dv_y}{dt}\right)_{t=0} = 0$ или $A \cos \nu = 0$. Отсюда $\nu = 90^\circ$ и $A = v_0 - \frac{E}{B}$.

Таким образом,

$$v_y = \frac{E}{B} + \left(v_0 - \frac{E}{B}\right) \cos \omega_{\Pi} t;$$

$$v_z = \frac{1}{\omega_{\Pi}} \frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{E}{B} - v_0\right) \sin \omega_{\Pi} t.$$

Пути, пройденные электроном по осям y и z :

$$y = \int_0^t v_y dt = \frac{E}{B} \cdot t - \frac{\frac{E}{B} - v_0}{\omega_{\Pi}} \sin \omega_{\Pi} t,$$

$$z = \int_0^t v_z dt = \frac{\frac{E}{B} - v_0}{\omega_{\Pi}} (1 - \cos \omega_{\Pi} t).$$

На рис. Т.6, б, в, г изображены три характерных случая движения при различных v_0 . На рис. Т.6, б трохоида при $v_0 = 0$, максимальное отклонение по оси $z = z_{\max} = \frac{2mE}{q_3 B^2}$.

Если $v_0 > 0$ и направлена по оси $+y$, то траекторией является растянутая трохоида рис. Т.6, в с максимальным отклонением $z_{\max} = \frac{2m}{q_3 B^2} \left(\frac{E}{B} - v_0 \right)$.

Если $v_0 < 0$ и направлена по оси $-y$, то траектория — сжатая трохоида рис. Т.6, г с $z_{\max} = \frac{2 \left(\frac{E}{B} + v_0 \right) m}{q_3 B^2}$.

Когда магнитное и электрическое поля мало отличаются от равномерных, траектории движения электронов близки к трохоидам.

§ Т.7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КОЛЬЦЕВЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

Циклотрон представляет собой две полых камеры в виде полуцилиндров из проводящего неферромагнитного материала. Эти камеры находятся в сильном равномерном магнитном поле индукции B , направленном на рис. Т.7 сверху вниз. Камеры помещаются в вакуумированный сосуд (на рис. Т.7 не показан) и присоединяют к источнику напряжения $U_m \cos \omega t$. При $t = 0$, когда напряжение между камерами имеет максимальное значение, а потенциал левой камеры положителен по отношению к правой, в пространство между камерами вводят положительный заряд q . На него будет действовать сила $q\vec{E}$. Заряд начнет двигаться слева направо и с начальной скоростью v_0 войдет в правую камеру. Но внутри камеры напряженность электрического поля равна нулю. Поэтому, пока он находится внутри камеры, на него не действует сила $q\vec{E}$, но действует сила $q[\vec{v}\vec{B}]$, обусловленная магнитным полем. Под действием этой силы положительный заряд,двигающийся со скоростью v , начнет движение по окружности радиусом $r = \frac{mv}{qB}$. Время, в течение которого он совершит пол-оборота, $t_1 = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB}$.

Если частоту приложенного между камерами напряжения взять равной $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2t_1}$, то к моменту времени, когда заряд q выйдет из правой камеры, он окажется под воздействием электрического поля, направленного справа налево. Под действием этого поля заряд увеличивает свою скорость и входит в левую камеру, где совершает следующий полуоборот, но уже большего радиуса, так как он имеет большую скорость. После k полуоборотов заряженная частица приобретает такую скорость и энергию, какую она приобрела бы, если бы в постоянном электрическом поле она пролетела между электродами, разность потенциалов между которыми kU_m .

Вывод заряда из циклотрона осуществляется с помощью постоянного электрического поля, создаваемого между одной из камер (на рис. Т.7 правой) и вспомогательным электродом А. С увеличением скорости v , когда он становится соизмеримой со скоростью света, масса частицы m во много раз увеличивается. Увеличивается и время t_1 прохождения полуоборота. Поэтому одновременно с увеличением скорости частицы необходимо уменьшать либо частоту источника напряжения $U_m \cos \omega t$ (фазотрон), либо величину индукции магнитного поля (синхротрон), либо и частоту и индукцию (синхрофазотрон).

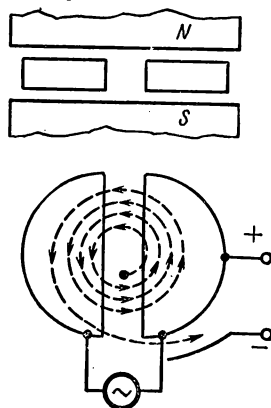


Рис. Т.7

Приложение У

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ γ (СИМ/М)
ПРИ 20 °С ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Алюминий	$(3,47 \div 3,8) \cdot 10^7$	Сталь	$(0,73 \div 0,97) \cdot 10^7$
Бронза	$(1,92 \div 4,76) \cdot 10^7$	Серебро	$(6,17 \div 6,25) \cdot 10^7$
Латунь	$(1,26 \div 3,23) \cdot 10^7$	Чугун	$(2 \div 2,5) \cdot 10^6$
Медь	$(5,5 \div 5,72) \cdot 10^7$	Константан	$(1,9 \div 2,22) \cdot 10^6$
Никель	$(1,26 \div 1,32) \cdot 10^7$	Нихром	$(0,735 \div 0,48) \cdot 10^6$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В табл. У.1 даны значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ при частоте 100 гц и 100 Мгц, тангенса угла потерь $\text{tg } \delta$ при частоте 1000 гц и пробивной напряженности (кв эфф/см) в равномерном поле при частоте 50 гц.

Т а б л и ц а У.1

Материал	ϵ		$\text{tg } \delta$	$E_{\text{проб}}$
	100 гц	100 Мгц		
Бакелит	4,9	3,7	0,03	240
Бумага	3,7	—	0,009	160
Кварц	3,8	3,8	0,001	80
Плексиглас	3,4	2,6	0,06	400
Полихлорвинил	3,2	2,8	0,01	320
Полистирол	2,55	2,52	0,0005	240
Слюда	5,4	5,4	0,002	100—1000
Трансформаторное масло . .	2,24	2,18	0,001	120
Фарфор	7	—	—	57

ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ ТОЭ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

а) Учебники и учебные пособия по всему курсу

1. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. I и II, изд-во «Энергия», 1966.
2. Зевеке Г. В. и др. Основы теории цепей. Госэнергоиздат, 1963.
3. Нетушил А. В., Поливанов К. М. Основы электротехники. Ч. III. Госэнергоиздат, 1956.
4. Основы электротехники. Под ред. К. А. Круга. Госэнергоиздат, 1952.
5. Каплянский А. Е. и др. Теоретические основы электротехники. Госэнергоиздат, 1972.
6. Круг К. А. Основы электротехники. Т. I и II. Госэнергоиздат, 1946.
7. Теоретические основы электротехники. Ч. I — Ионкин П. А. и др., ч. II — Даревский А. И., Кухаркин Е. С. Изд-во «Вышая школа», 1965.
8. Шимони К. Теоретическая электротехника. Изд-во «Мир», 1964.

б) Учебные пособия и монографии по линейным электрическим цепям

9. Максимович Н. Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. Госэнергоиздат, 1961.
10. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ, 1963.
11. Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. А. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.
12. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Гостехиздат, 1962.
13. Круг К. А. Переходные и установившиеся процессы в линейных электрических цепях. Госэнергоиздат, 1948.
14. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. Изд-во «Вышая школа», 1968.
15. Перекалин М. А. Электрические цепи. Госэнергоиздат, 1950.
16. Робишо А. и др. Направленные графы. Изд-во «Энергия», 1964.
17. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1961.
18. Матханов П. Н. Об одном методе реализации функций передачи минимально фазовых цепей каскадными заземленными схемами. «Радиотехника и электроника», 1958, № 4.
19. Seshu S., Reed M. Linear graphs and Electrical Networks, N. I. Wiley, 1961.
20. Реза Ф., Сили С. Современный анализ электрических цепей. Изд-во «Энергия», 1964.
21. Айзинов М. М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. Изд-во «Энергия», 1964.
22. Кочанов Н. С. К вопросу о методике синтеза линейных электрических цепей по заданным временным характеристикам. «Известия вузов» — Радиотехника, 1959, май — июнь.
23. Матханов П. Н. Синтез реактивных четырехполюсников по временным функциям. Изд-во «Энергия», 1970.

24. Харкевич А. А. Основы радиотехники. Гос. изд-во по вопр. связи и радио, 1963.
25. Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Изд-во «Советское радио», 1952.
26. Голдман С. Теория информации. ИЛ, 1957.
27. Фельдбаум А. А. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.
28. Шварц Л. Математические методы для физических наук. Изд-во «Мир», 1965.
29. Розенфельд А. С., Яхинсон Б. И. Переходные процессы и обобщенные функции. Изд-во «Наука», 1966.

в) Учебные пособия и монографии по нелинейным цепям и системам

30. Андронов А. А. и др. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
31. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследований нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
32. Воронов А. А. Элементы теории автоматического регулирования. Воениздат, 1954.
33. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1952.
34. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи. Изд-во «Высшая школа», 1964.
35. Бессонов Л. А. Автоколебания в нелинейных электрических цепях со сталью. Госэнергоиздат, 1958.
36. Ицхоки Я. С. Нелинейная радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1955.
37. Полупроводниковые приборы и их применение. Под ред. Ши. Госэнергоиздат, 1957.
38. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. Госэнергоиздат, 1962.
39. Пухов Г. Е. Комплексное исчисление и его применение. Изд-во АН УССР, 1961.

г) Учебные пособия и монографии по теории электромагнитного поля

40. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, 1956.
41. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
42. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. Госэнергоиздат, 1960.
43. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. Изд-во «Высшая школа», 1963.
44. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. Физматгиз, 1959.
45. Брон О. Б. Электромагнитное поле как вид материи. Госэнергоиздат, 1962.
46. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. Изд-во «Советское радио», 1956.
47. Семенов А. А. Теория электромагнитных волн. Изд-во МГУ, 1962.
48. Тозони О. В. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей. «Наукова думка», 1964.
49. Смайт В. Электростатика и электродинамика. ИЛ, 1954.
50. Меерович Э. А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. Изд-во «Энергия», 1966.
51. Стреттон Д. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
52. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Госэнергоиздат, 1948.
53. Тозони О. В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. Изд-во «Техніка», 1967.

54. К у г у ш е в А. М., Г о л у б е в а Н. С. Основы радиоэлектроники. Изд-во «Энергия», 1969.
55. А р ц и м о в и ч Л. А. Элементарная физика плазмы. Атомиздат, 1969.
56. М и р о л ю б о в Н. Н., К о с т е н к о М. В. и др. Методы расчета электростатических полей. Изд-во «Высшая школа», 1963.

д) Задачники

57. З а й ц е в И. А., Л у р ь е А. Г. Задачник по теоретическим основам электротехники. Госэнергоиздат, 1960.
58. Г о л ь д и н О. Е. Задачник по курсу теоретических основ электротехники. Госэнергоиздат, 1960.
59. Задачник по теоретическим основам электротехники. Под ред. К. А. К р у г а и др. Госэнергоиздат, 1948.
60. Сборник задач по расчету электрических цепей. Под ред. К у р е н е в а С. И. и П и н е с а М. И. Изд-во «Высшая школа», 1967.
61. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория цепей). Под ред. К. М. П о л и в а н о в а. Госэнергоиздат, 1962.
62. Б е с с о н о в Л. А. и др. Задачник по теоретическим основам электротехники. Изд. МИРЭА, 1970.
63. Ш е б е с М. Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. Изд-во «Высшая школа», 1967.
64. Б а ш а р и н а В. Н. и др. Сборник задач по расчету электрических цепей переменного тока. Изд. ЛЭТИ, 1958.
65. Е в с е е в М. Е. и др. Теория переменных токов (пособие к решению задач по ТОЭ), ч. II. Изд. СЗПИ, 1964.
66. Б а т ы г и н В. В., Т о п т ы г и н И. Н. Сборник задач по электродинамике. Физматгиз, 1962.
67. Г и н з б у р г С. Г. Методы решения задач по переходным процессам. Изд-во «Высшая школа», 1968.

е) Руководства к лабораторным работам

68. Н е й м а н Л. Р., Д е м и р ч я н К. С. Руководство к лаборатории электромагнитного поля. Изд-во «Высшая школа», 1961.
69. К а л а н т а р о в П. Л. Руководство к лаборатории переменных токов. Госэнергоиздат, 1949.
70. К а м е н с к а я В. П. и др. Руководство к лабораторным работам по первой части курса ТОЭ. Изд. МИРЭА, 1969.
71. Т у р е н к о Б. А. и др. Руководство к лабораторным работам по второй части курса ТОЭ. Изд. МИРЭА, 1970.
72. Д е м и д о в а И. Г. и др. Руководство к лабораторным работам по третьей части курса ТОЭ. Изд. МИРЭА, 1968.

ж) Контрольные задания и методические руководства

73. Б е с с о н о в Л. А. и др. Контрольные задания и методические указания по курсу ТОЭ. Изд-во «Высшая школа», 1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
-----------------------	---

ЧАСТЬ I

Глава первая Линейные электрические цепи постоянного тока

§ 1.1. Определение линейных и нелинейных электрических цепей.	5
§ 1.2. Источник э. д. с. и источник тока.	6
§ 1.3. Неразветвленные и разветвленные электрические цепи	8
§ 1.4. Напряжение на участке цепи	8
§ 1.5. Закон Ома для участка цепи, не содержащего э. д. с.	10
§ 1.6. Закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.	10
§ 1.7. Законы Кирхгофа	11
§ 1.8. Составление уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа.	12
§ 1.9. Заземление одной точки схемы	13
§ 1.10. Потенциальная диаграмма	14
§ 1.11. Энергетический баланс в электрических цепях	14
§ 1.12. Метод пропорциональных величин	15
§ 1.13. Метод контурных токов	16
§ 1.14. Принцип наложения и метод наложения	20
§ 1.15. Входные и взаимные проводимости ветвей. Входное сопротивление. . .	21
§ 1.16. Теорема взаимности	23
§ 1.17. Теорема компенсации	25
§ 1.18. Линейные соотношения в электрических цепях	26
§ 1.19. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники э. д. с. и источники тока, одной эквивалентной	28
§ 1.20. Метод двух узлов	30
§ 1.21. Метод узловых потенциалов	30
§ 1.22. Преобразование звезды в треугольник и треугольника в звезду	34
§ 1.23. Активный и пассивный двухполюсники	38
§ 1.24. Метод эквивалентного генератора	38
§ 1.25. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке	41
§ 1.26. Передача энергии по линии передачи	43

Глава вторая Нелинейные электрические цепи постоянного тока

§ 2.1. Основные определения	44
§ 2.2. Вольтамперные характеристики нелинейных сопротивлений	44
§ 2.3. Общая характеристика методов расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока	46
§ 2.4. Последовательное соединение нелинейных сопротивлений	47
§ 2.5. Параллельное соединение нелинейных сопротивлений	49
§ 2.6. Последовательно-параллельное соединение нелинейных сопротивлений	49
§ 2.7. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов	50
§ 2.8. Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих НС и э. д. с., одной эквивалентной	51

§ 2.9. Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора	52
§ 2.10. Статическое и дифференциальное сопротивления	54
§ 2.11. Замена нелинейного сопротивления эквивалентным линейным сопротивлением и э. д. с.	55
§ 2.12. Стабилизатор тока	56
§ 2.13. Стабилизатор напряжения	57
§ 2.14. Усилитель постоянного напряжения	58

Глава третья

Магнитные цепи

§ 3.1. Подразделение веществ на две группы — ферромагнитные и неферромагнитные	60
§ 3.2. Основные величины, характеризующие магнитное поле	60
§ 3.3. Элементы теории ферромагнетизма	61
§ 3.4. Основные характеристики ферромагнитных материалов	62
§ 3.5. Магнитномягкие и магнитотвердые материалы	63
§ 3.6. Магнитодиэлектрики и ферриты	64
§ 3.7. Закон полного тока	64
§ 3.8. Магнитодвижущая (намагничивающая) сила	65
§ 3.9. Разновидности магнитных цепей	65
§ 3.10. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи	66
§ 3.11. Падение магнитного напряжения	67
§ 3.12. Веберамперные характеристики	68
§ 3.13. Построение веберамперных характеристик	68
§ 3.14. Законы Кирхгофа для магнитных цепей	69
§ 3.15. Применение к магнитным цепям всех методов, используемых для расчета электрических цепей с НС	71
§ 3.16. Определение м. д. с. неразветвленной магнитной цепи по заданному потоку	72
§ 3.17. Определение потока в неразветвленной магнитной цепи по заданной м. д. с.	73
§ 3.18. Расчет разветвленной магнитной цепи методом двух узлов	74
§ 3.19. Дополнительные замечания к расчету магнитных цепей	76
§ 3.20. Получение постоянного магнита	77
§ 3.21. Расчет магнитной цепи постоянного магнита	78
§ 3.22. Прямая возврата и коэффициент возврата	79
§ 3.23. Магнитное сопротивление и магнитная проводимость участка магнитной цепи. Закон Ома для магнитной цепи	80
§ 3.24. Пояснения к формуле $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$	81

Глава четвертая

Электромагнитная индукция и механические силы в магнитном поле

§ 4.1. Явление электромагнитной индукции	83
§ 4.2. Явление самоиндукции и э. д. с. самоиндукции. Индуктивность	85
§ 4.3. Явление взаимной индукции и э. д. с. взаимной индукции. Взаимная индуктивность	89
§ 4.4. Энергия магнитного поля уединенной катушки	91
§ 4.5. Плотность энергии магнитного поля	93
§ 4.6. Потери на гистерезис за один цикл перемагничивания	93
§ 4.7. Магнитная энергия двух магнитно связанных контуров	94
§ 4.8. Принцип взаимности взаимной индукции	96
§ 4.9. Коэффициент связи	97
§ 4.10. Магнитная энергия системы контуров с токами	98
§ 4.11. Механические силы в магнитном поле	98
§ 4.12. Выражение механической силы в виде производной от энергии магнитного поля по координате	100
§ 4.13. Сила тяги электромагнита	101

§ 4.14. Закон электромагнитной инерции. Правило Ленца	102
§ 4.15. Определение магнитного потока, созданного в некотором контуре намагниченным ферромагнитным телом	103

Г л а в а п я т а я

Электрические цепи однофазного синусоидального тока

§ 5.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины . . .	105
§ 5.2. Среднее и действующее значения синусоидально изменяющейся величины	106
§ 5.3. Коэффициент амплитуды и коэффициент формы	107
§ 5.4. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости. Комплексная амплитуда. Комплекс действующего значения	107
§ 5.5. Сложение и вычитание синусоидальных функций времени с помощью комплексной плоскости. Векторная диаграмма	109
§ 5.6. Мгновенная мощность	110
§ 5.7. Синусоидальный ток в активном сопротивлении	110
§ 5.8. Индуктивность в цепи синусоидального тока	111
§ 5.9. Конденсатор в цепи синусоидального тока	112
§ 5.10. Умножение вектора на j и на $-j$	114
§ 5.11. Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока	114
§ 5.12. Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока	116
§ 5.13. Комплексная проводимость	116
§ 5.14. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей	117
§ 5.15. Применение логарифмической линейки для перехода от алгебраической формы записи комплекса к показательной и для обратного перехода	118
§ 5.16. Законы Кирхгофа в символической форме записи	120
§ 5.17. Применение к расчету цепей синусоидального тока методов, рассмотренных в главе «Электрические цепи постоянного тока»	121
§ 5.18. Применение векторных диаграмм при расчете электрических цепей синусоидального тока	122
§ 5.19. Изображение разности потенциалов на комплексной плоскости	126
§ 5.20. Топографическая диаграмма	126
§ 5.21. Активная, реактивная и полная мощности	129
§ 5.22. Выражение мощности в комплексной форме записи	131
§ 5.23. Измерение мощности ваттметром	132
§ 5.24. Двухполюсник в цепи синусоидального тока	133
§ 5.25. Резонансный режим работы двухполюсника	135
§ 5.26. Резонанс токов	135
§ 5.27. Компенсация сдвига фаз	137
§ 5.28. Резонанс напряжений	137
§ 5.29. Исследование работы схемы рис. 5.26, а при изменении частоты и индуктивности	138
§ 5.30. Частотная характеристика двухполюсника	140
§ 5.31. Канонические схемы. Эквивалентные двухполюсники	142
§ 5.32. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке	143
§ 5.33. Согласующий трансформатор	144
§ 5.34. Идеальный трансформатор и гиратор	145
§ 5.35. Падение и потери напряжения в линии передачи энергии	145
§ 5.36. Расчет электрических цепей при наличии в них магнитносвязанных катушек	146
§ 5.37. Последовательное соединение двух магнитносвязанных катушек	147
§ 5.38. Определение взаимной индуктивности опытным путем	148
§ 5.39. Трансформатор. Вносимое сопротивление	149
§ 5.40. Резонанс в магнитносвязанных колебательных контурах	152
§ 5.41. «Развязывание» магнитносвязанных цепей	154
§ 5.42. Теорема о балансе активных и реактивных мощностей	154

Глава шестая

Четырехполюсник и круговые диаграммы

§ 6.1.	Четырехполюсник и его основные уравнения	157
§ 6.2.	Определение коэффициентов четырехполюсника	161
§ 6.3.	Характеристическое сопротивление и постоянная передачи четырехполюсника	164
§ 6.4.	Схемы замещения пассивного четырехполюсника	164
§ 6.5.	Построение дуги окружности по хорде и вписанному углу	166
§ 6.6.	Уравнение дуги окружности в векторной форме записи	167
§ 6.7.	Круговые диаграммы	168
§ 6.8.	Круговая диаграмма тока для двух последовательно соединенных сопротивлений	168
§ 6.9.	Круговая диаграмма напряжения для двух последовательно соединенных сопротивлений	169
§ 6.10.	Круговая диаграмма для активного двухполюсника	170
§ 6.11.	Круговая диаграмма для четырехполюсника	171
§ 6.12.	Линейные диаграммы	173
§ 6.13.	Уравнения активного четырехполюсника	174
§ 6.14.	Схема замещения активного четырехполюсника	175

Глава седьмая

Трехфазные цепи

§ 7.1.	Трехфазная система э. д. с.	176
§ 7.2.	Принцип работы синхронного генератора	176
§ 7.3.	Трехфазная цепь. Расширение понятия фазы	177
§ 7.4.	Основные схемы соединения трехфазных цепей, определение линейных и фазных величин	177
§ 7.5.	Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами	179
§ 7.6.	Преимущества трехфазных систем	179
§ 7.7.	Расчет трехфазных цепей	180
§ 7.8.	Соединение звезда — звезда с нулевым проводом	180
§ 7.9.	Соединение нагрузки в треугольник	181
§ 7.10.	Оператор a трехфазной системы	183
§ 7.11.	Соединение звезда — звезда без нулевого провода	183
§ 7.12.	Трехфазные цепи при наличии взаимной индукции	183
§ 7.13.	Активная, реактивная и полная мощности трехфазной системы	184
§ 7.14.	Измерение активной мощности в трехфазной системе	185
§ 7.15.	Круговые и линейные диаграммы в трехфазных цепях	186
§ 7.16.	Указатель последовательности чередования фаз	187
§ 7.17.	Магнитное поле катушки с синусоидальным током	188
§ 7.18.	Получение кругового вращающегося магнитного поля	188
§ 7.19.	Принцип работы асинхронного двигателя	190
§ 7.20.	Разложение несимметричной системы на системы нулевой, прямой и обратной последовательности фаз	191
§ 7.21.	Понятие о методе симметричных составляющих	192

Приложения к части I

Приложение А. Направленные и ненаправленные графы		195
§ А.1.	Характеристика двух направлений в теории графов	195
§ А.1.	И. Направленные графы	196
§ А.2.	Основные определения	196
§ А.3.	Переход от излучаемой системы к направленному графу	197
§ А.4.	Правила, используемые для упрощения направленных графов	199
§ А.5.	Общая формула для передачи графа	203
§ А.6.	Вывод формулы для передачи графа	204
§ А.7.	И. Ненаправленные графы	207
§ А.7.	Определения и основная формула	207

§ A.8. Разложение определителя по произвольно выбранному узлу	208
§ A.9. Разложение определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами	209
§ A.10. Применение основной формулы	210
§ A.11. Понятие о дереве и о величине дерева	213
Приложение Б. Дуальные цепи	214
§ Б.1. Основные определения	214
§ Б.2. Преобразование исходной схемы в дуальную	215
Приложение В. Матрицы в электротехнике	216
§ В.1. Основные свойства матриц	216
§ В.2. Общая характеристика применения матриц в электротехнике	218
§ В.3. Основы матричной теории графов	219
Приложение Г. Исследование процессов в неэлектрических системах на электрических моделях-аналогах	222
Приложение Д. Электростатические цепи	223

ЧАСТЬ II

Глава восьмая

Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях	225
§ 8.1. Определение периодических несинусоидальных токов и напряжений	
§ 8.2. Изображение несинусоидальных токов и напряжений с помощью рядов Фурье	225
§ 8.3. Некоторые свойства периодических кривых, обладающих симметрией	226
§ 8.4. О разложении в ряд Фурье кривых геометрически правильной и неправильной форм	228
§ 8.5. Графический (графо-аналитический) метод определения гармоник ряда Фурье	229
§ 8.6. Расчет токов и напряжений при несинусоидальных источниках питания	231
§ 8.7. Резонансные явления при несинусоидальных токах	233
§ 8.8. Действующее значение несинусоидального тока и несинусоидального напряжения	234
§ 8.9. Среднее по модулю значение несинусоидальной функции	236
§ 8.10. Величины, на которые реагируют амперметры и вольтметры при несинусоидальных токах	236
§ 8.11. Активная и полная мощности несинусоидального тока	237
§ 8.12. Замена несинусоидальных токов и напряжений эквивалентными синусоидальными	238
§ 8.13. Особенности работы трехфазных систем, вызываемые гармониками, кратными трем	238
§ 8.14. Биения	243
§ 8.15. Модулированные колебания	244
§ 8.16. Расчет линейных цепей при воздействии модулированных колебаний	246

Глава девятая

Нелинейные электрические цепи переменного тока

§ 9.1. Подразделение нелинейных сопротивлений на три основные группы	247
§ 9.2. Общая характеристика нелинейных активных сопротивлений	247
§ 9.3. Общая характеристика нелинейных индуктивных сопротивлений	248
§ 9.4. Потери в сердечниках нелинейных индуктивностей от вихревых токов	249
§ 9.5. Потери на гистерезис	250
§ 9.6. Схема замещения нелинейной индуктивности	250
§ 9.7. Общая характеристика нелинейных емкостных сопротивлений	251
§ 9.8. Нелинейные сопротивления как генераторы высших гармоник тока и напряжения	252

§ 9.9. Основные преобразования, осуществляемые с помощью нелинейных электрических цепей	253
§ 9.10. Некоторые физические явления, наблюдаемые в нелинейных цепях . .	256
§ 9.11. Разделение нелинейным сопротивлений по степени симметрии характеристик относительно осей координат	257
§ 9.12. Аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений	257
§ 9.13. Аппроксимация симметричных характеристик для мгновенных значений гиперболическим синусом	258
§ 9.14. Понятие о функциях Бесселя	259
§ 9.15. Разложение гиперболических синуса и косинуса от периодического аргумента в ряды Фурье	261
§ 9.16. Разложение гиперболического синуса от постоянной и синусоидально меняющейся составляющих в ряд Фурье	261
§ 9.17. Некоторые общие свойства симметричных нелинейных сопротивлений	262
§ 9.18. Некоторые общие свойства несимметричных нелинейных сопротивлений	264
§ 9.19. Типы характеристик нелинейных сопротивлений	264
§ 9.20. Характеристики для мгновенных значений	264
§ 9.21. Вольтамперные характеристики по первым гармоникам	264
§ 9.22. Вольтамперные характеристики для действующих значений	266
§ 9.23. Получение аналитическим путем обобщенных характеристик управляемых нелинейных сопротивлений по первым гармоникам	267
§ 9.24. Простейшая управляемая нелинейная индуктивность	268
§ 9.25. Вольтамперные характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам	271
§ 9.26. Вольтамперные характеристики управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам	274
§ 9.27. Основные сведения об устройстве полупроводниковых триодов	275
§ 9.28. Три основных способа включения триодов в схему	276
§ 9.29. Принцип работы полупроводникового триода в качестве управляемого сопротивления	277
§ 9.30. Вольтамперные характеристики триодов	278
§ 9.31. Полупроводниковый триод в качестве усилителя тока	280
§ 9.32. Полупроводниковый триод в качестве усилителя напряжения	281
§ 9.33. Полупроводниковый триод в качестве усилителя мощности	282
§ 9.34. Связь между приращениями входных и выходных величин полупроводникового триода	282
§ 9.35. Схема замещения полупроводникового триода для малых приращений	283
§ 9.36. Графический расчет схем на полупроводниковых триодах	285
§ 9.37. Основные сведения о трехэлектродной лампе	287
§ 9.38. Вольтамперные характеристики трехэлектродной лампы для мгновенных значений	288
§ 9.39. Аналитическое выражение сеточной характеристики электронной лампы	289
§ 9.40. Связь между малыми приращениями входных и выходных величин электронной лампы	290
§ 9.41. Схема замещения электронной лампы для малых приращений	291
§ 9.42. Построение зависимости вход—выход для электронной лампы при больших сигналах	292
§ 9.43. Тиристор — управляемый полупроводниковый клапан	293
§ 9.44. Общая характеристика методов анализа и расчета нелинейных электрических цепей переменного тока	294
§ 9.45. Графический метод при использовании характеристик нелинейных сопротивлений для мгновенных значений	295
§ 9.46. Аналитический метод при использовании характеристики нелинейного сопротивления для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации	295
§ 9.47. Аналитический (или графический) метод расчета по первым гармоникам токов и напряжений	296
§ 9.48. Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования вольтамперных характеристик для действующих значений	297

§ 9.49. Аналитический метод расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам	298
§ 9.50. Расчет с помощью линейных схем замещения	299
§ 9.51. Расчет с помощью математических счетных машин	299
§ 9.52. Расчет электрических цепей, содержащих индуктивные катушки, сердечники которых имеют почти прямоугольную кривую намагничивания	299
§ 9.53. Расчет электрических цепей, содержащих нелинейные емкости с прямоугольной кулонвольтной характеристикой	301
§ 9.54. Выпрямление переменного напряжения	302
§ 9.55. Ламповый генератор	305
§ 9.56. Определение феррорезонансных цепей	309
§ 9.57. Построение вольтамперной характеристики последовательной феррорезонансной цепи	309
§ 9.58. Триггерный эффект в последовательной феррорезонансной цепи	310
§ 9.59. Феррорезонанс напряжений	311
§ 9.60. Вольтамперная характеристика параллельного соединения емкости и катушки со стальным сердечником. Феррорезонанс токов	311
§ 9.61. Триггерный эффект в параллельной феррорезонансной цепи	312
§ 9.62. Феррорезонансный стабилизатор напряжения	313
§ 9.63. Применение символического метода и построение векторных и топографических диаграмм для нелинейных цепей	313
§ 9.64. Векторная диаграмма нелинейной индуктивности	315
§ 9.65. Определение величины намагничивающего тока	317
§ 9.66. Определение величины тока потерь	318
§ 9.67. Основные соотношения для трансформатора со стальным сердечником	319
§ 9.68. Векторная диаграмма трансформатора со стальным сердечником	322

Г л а в а д е с я т а я

Переходные процессы в линейных электрических цепях

§ 10.1. Определение переходных процессов	324
§ 10.2. Приведение задачи о переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	324
§ 10.3. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений	325
§ 10.4. Обоснование невозможности скачка тока через индуктивность и скачка напряжения на емкости	327
§ 10.5. Первый закон (правило) коммутации	328
§ 10.6. Второй закон (правило) коммутации	329
§ 10.7. Начальные значения величин	329
§ 10.8. Независимые и зависимые (последкоммутационные) начальные значения	329
§ 10.9. Нулевые и ненулевые начальные условия	330
§ 10.10. Составление уравнений для свободных токов и напряжений	330
§ 10.11. Алгебраизация системы уравнений для свободных токов	331
§ 10.12. Составление характеристического уравнения системы	332
§ 10.13. Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления цепи на переменном токе	333
§ 10.14. Основные и неосновные независимые начальные значения	334
§ 10.15. Определение степени характеристического уравнения	335
§ 10.16. Свойства корней характеристического уравнения	336
§ 10.17. Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений	337
§ 10.18. Характер свободного процесса при одном корне	337
§ 10.19. Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях	338
§ 10.20. Характер свободного процесса при двух равных корнях	339
§ 10.21. Характер свободного процесса при двух комплексно сопряженных корнях	339
§ 10.22. Некоторые особенности переходных процессов	340
§ 10.23. Переходные процессы, сопровождающиеся электрической дугой (искры)	341

§ 10.24. Опасные перенапряжения, вызываемые размыканием ветвей в цепях, содержащих индуктивность	341
§ 10.25. Общая характеристика методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях.	342
§ 10.26. Определение классического метода расчета переходных процессов	343
§ 10.27. Определение постоянных интегрирования в классическом методе	343
§ 10.28. О переходных процессах, при макроскопическом рассмотрении которых не выполняются законы коммутации. Обобщенные законы коммутации	354
§ 10.29. Логарифм как изображение числа	356
§ 10.30. Комплексные изображения синусоидальных функций	357
§ 10.31. Введение к операторному методу	357
§ 10.32. Преобразование Лапласа	357
§ 10.33. Изображение постоянной	358
§ 10.34. Изображение показательной функции e^{at}	359
§ 10.35. Изображение первой производной	360
§ 10.36. Изображение напряжения на индуктивности	360
§ 10.37. Изображение второй производной	361
§ 10.38. Изображение интеграла	361
§ 10.39. Изображение напряжения на конденсаторе	362
§ 10.40. Некоторые теоремы и предельные соотношения	363
§ 10.41. Закон Ома в операторной форме. Внутреннее э. д. с.	364
§ 10.42. Первый закон Кирхгофа в операторной форме	366
§ 10.43. Второй закон Кирхгофа в операторной форме	366
§ 10.44. Составление уравнений для изображений путем использования методов, рассмотренных в разделе синусоидального тока	368
§ 10.45. Последовательность расчета в операторном методе	368
§ 10.46. Изображение функции времени в виде отношения двух полиномов по степеням p	370
§ 10.47. Переход от изображения к функции времени	371
§ 10.48. Разложение сложной дроби на простые	373
§ 10.49. Формула разложения	374
§ 10.50. Дополнения к операторному методу	378
§ 10.51. Переходная проводимость	379
§ 10.52. Понятие о переходной функции по напряжению	280
§ 10.53. Интеграл Дюамеля	382
§ 10.54. Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля	384
§ 10.55. Применение интеграла Дюамеля при сложной форме напряжения	386
§ 10.56. Сравнение различных методов расчета переходных процессов	387
§ 10.57. Простейшее электрическое дифференцирующее устройство	388
§ 10.58. Простейшее электрическое интегрирующее устройство	389
§ 10.59. Применение метода эквивалентного генератора для расчета переходных процессов	390
§ 10.60. Переходные процессы при воздействии импульсов напряжения	391
§ 10.61. Дельта-функция, единичная функция и их свойства. Импульсная переходная проводимость	393
§ 10.62. Обобщенные функции и их применение при расчетах переходных процессов	394
§ 10.63. Некоторые схемы, обладающие особыми свойствами	395
§ 10.64. Понятие о передаточных функциях и о частотных характеристиках звеньев и систем	396

Глава одиннадцатая

Синтез электрических цепей

§ 11.1. Характеристика синтеза	399
§ 11.2. Условия, которым должны удовлетворять входные сопротивления двухполосников	399
§ 11.3. Реализация двухполосников лестничной (цепной) схемой	401
§ 11.4. Реализация двухполосников путем последовательного выделения простейших составляющих	405

§ 11.5. Понятие о минимально-фазовом и неминимально-фазовом четырехполюсниках	409
§ 11.6. Условия, накладываемые на параметры четырехполюсников и на передаточную функцию	410
§ 11.7. Синтез четырехполюсников Г-образными RC-схемами	413
§ 11.8. Реализация передаточной функции четырехполюсника путем введения дополняющих двухполюсников	414

Глава двенадцатая

Установившиеся процессы в электрических и магнитных цепях, содержащих линии с распределенными параметрами

§ 12.1. Основные определения	416
§ 12.2. Составление дифференциальных уравнений для однородной линии с распределенными параметрами	418
§ 12.3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном процессе	420
§ 12.4. Постоянная распространения и волновое сопротивление	421
§ 12.5. Формулы для определения комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в начале линии	422
§ 12.6. Графическая интерпретация гиперболического синуса и гиперболического косинуса от комплексного аргумента	423
§ 12.7. Формулы для определения напряжения и тока в любой точке линии через комплексы напряжения и тока в конце линии	424
§ 12.8. Падающие и отраженные волны в линии	425
§ 12.9. Коэффициент отражения	426
§ 12.10. Фазовая скорость	426
§ 12.11. Длина волны	427
§ 12.12. Линия без искажений	427
§ 12.13. Согласованная нагрузка	429
§ 12.14. Определение напряжения и тока при согласованной нагрузке	429
§ 12.15. Коэффициент полезного действия линии передачи при согласованной нагрузке	430
§ 12.16. Единица измерения затухания	430
§ 12.17. Входное сопротивление нагруженной линии	431
§ 12.18. Определение напряжения и тока в линии без потерь	431
§ 12.19. Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе	432
§ 12.20. Входное сопротивление линии без потерь при коротком замыкании на конце линии	433
§ 12.21. Определение стоячих электромагнитных волн	434
§ 12.22. Стоячие волны в линии без потерь при холостом ходе линии	434
§ 12.23. Стоячие волны в линии без потерь при коротком замыкании на конце линии	435
§ 12.24. Четвертьволновой трансформатор	436
§ 12.25. Бегущие, стоячие и смешанные волны в линиях без потерь. Коэффициенты бегущей и стоячей волн	436
§ 12.26. Аналогия между уравнениями линии с распределенными параметрами и уравнениями четырехполюсника	437
§ 12.27. Замена четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами и обратная замена	438
§ 12.28. Четырехполюсник заданного затухания	440
§ 12.29. Цепная схема	440

Глава тринадцатая

Электрические фильтры

§ 13.1. Назначение и типы фильтров	446
§ 13.2. Основы теории фильтров типа k	447

§ 13.3. Фильтры НЧ, фильтры ВЧ, полосовые и заграждающие фильтры типа k	449
§ 13.4. Качественное определение фильтра типа k	453
§ 13.5. Основы теории фильтров типа m . Каскадное включение фильтров	453
§ 13.6. RC-фильтры	457

Глава четырнадцатая

Переходные процессы в электрических цепях, содержащих линии с распределительными параметрами

§ 14.1. Общие сведения	458
§ 14.2. Исходные уравнения и их решение	459
§ 14.3. Падающие и отраженные волны на линиях	460
§ 14.4. Связь между функциями f_1, f_2 и функциями Φ_1, Φ_2	461
§ 14.5. Электромагнитные процессы при движении прямоугольной волны по линии	462
§ 14.6. Схема замещения для исследования волновых процессов в линиях с распределенными параметрами	463
§ 14.7. Подключение разомкнутой на конце линии к источнику постоянного напряжения	465
§ 14.8. Переходный процесс при подключении источника постоянного напряжения к двум последовательно соединенным линиям при наличии емкости в месте стыка линий	467
§ 14.9. Линия задержки	471

Приложения к части II

Приложение Е. Электрические цепи с переменными во времени параметрами	472
---	-----

§ Е.1. Элементы цепей	472
§ Е.2. Некоторые общие свойства электрических цепей	473
§ Е.3. Методика расчета электрических цепей в установившемся режиме	474
§ Е.4. Параметрические колебания	476
§ Е.5. Параметрический генератор и параметрический усилитель	478

Приложение Ж. Интеграл Фурье. Спектральный метод. Случайные процессы в электрических цепях	479
--	-----

§ Ж.1. Ряд Фурье в комплексной форме записи	479
§ Ж.2. Спектр функции и интеграл Фурье	481
§ Ж.3. Теорема Рейли	483
§ Ж.4. Применение спектрального метода в радиотехнике и в импульсной технике	484
§ Ж.5. Случайные процессы. Корреляционные функции	489
§ Ж.6. Прямое и обратное преобразования Фурье для случайных функций времени	490
§ Ж.7. Белый шум и его свойства	491
§ Ж.8. Источники внутренних шумов в электрических цепях	492

Приложение З. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях	493
--	-----

§ 3.1. Общая характеристика методов анализа и расчета переходных процессов	493
§ 3.2. Метод расчета, основанный на графическом подсчете определенного интеграла	494
§ 3.3. Расчет методом интегрируемой нелинейной аппроксимации	495
§ 3.4. Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации	496
§ 3.5. Метод расчета, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой	497

§ 3.6. Расчет переходных процессов в схемах с несколькими нелинейными сопротивлениями	501
§ 3.7. Метод медленно меняющихся амплитуд	501
§ 3.8. Перемагничивание ферритовых сердечников импульсами тока	505
Приложение И. Основы теории устойчивости режимов работы нелинейных цепей	506
§ И.1. Устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом» Устойчивость по Ляпунову	506
§ И.2. Общие основы исследования устойчивости «в малом»	507
§ И.3. Исследование устойчивости состояния равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой	509
§ И.4. Исследование устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний по первой гармонике	510
§ И.5. Исследование устойчивости состояния равновесия в генераторе релаксационных колебаний	511
§ И.6. Исследование устойчивости периодического движения в ламповом генераторе синусоидальных колебаний	513
Приложение К. Фазовая плоскость	514
§ К.1. Определение фазовой плоскости и характеристики областей ее применения	514
§ К.2. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл	515
§ К.3. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости	515
Приложение Л. Метод малого параметра	516

ЧАСТЬ III

Глава пятнадцатая Электростатическое поле

§ 15.1. Определение электростатического поля	520
§ 15.2. Закон Кулона	521
§ 15.3. Напряженность и потенциал электростатического поля	521
§ 15.4. Электростатическое поле — поле потенциальное	523
§ 15.5. Силовые и эквипотенциальные линии	525
§ 15.6. Выражение напряженности в виде градиента от потенциала	525
§ 15.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла)	527
§ 15.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат	528
§ 15.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность	528
§ 15.10. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества	529
§ 15.11. Вектор поляризации	530
§ 15.12. Вектор электрической индукции \vec{D}	531
§ 15.13. Теорема Гаусса в интегральной форме	532
§ 15.14. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда	534
§ 15.15. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	535
§ 15.16. Вывод выражения для $\text{div } \vec{E}$ в декартовой системе координат	537
§ 15.17. Использование оператора набла для записи операции взятия дивергенции	538
§ 15.18. Выражение $\text{div } \vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат	538
§ 15.19. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа	538
§ 15.20. Граничные условия	540
§ 15.21. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики	541
§ 15.22. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика	541
§ 15.23. Условия на границе раздела двух диэлектриков	542

§ 15.24. Теорема единственности решения	544
§ 15.25. Общая характеристика задач электростатики и методов их решения	544
§ 15.26. Поле заряженной оси	546
§ 15.27. Поле двух параллельных заряженных осей	547
§ 15.28. Поле двухпроводной линии	548
§ 15.29. Емкость	549
§ 15.30. Метод зеркальных изображений	550
§ 15.31. Поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости	551
§ 15.32. Поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями	552
§ 15.33. Электростатическое поле системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости	554
§ 15.34. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла	555
§ 15.35. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла	556
§ 15.36. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла	557
§ 15.37. Шар в равномерном поле	559
§ 15.38. Проводящий шар в равномерном поле	563
§ 15.39. Диэлектрический шар в равномерном поле	564
§ 15.40. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле	567
§ 15.41. Понятие о плоскопараллельном, плоскомеридианном и равномерном полях	568
§ 15.42. Объемная плотность энергии электрического поля и выражение механической силы в виде производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате	569
§ 15.43. Энергия поля системы заряженных тел	572
§ 15.44. Метод средних потенциалов	581
§ 15.45. О расчете электрических полей, создаваемых диэлектриками, сохраняющими остаточную поляризацию при снятии внешнего поля	584

Глава шестнадцатая

Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде

§ 16.1. Плотность тока и ток	585
§ 16.2. Закон Ома в дифференциальной форме. Второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме	586
§ 16.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме	588
§ 16.4. Дифференциальная форма закона Джоуля — Ленца	589
§ 16.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде	589
§ 16.6. Переход тока из среды с одной проводимостью γ_1 в среду с другой проводимостью γ_2 . Граничные условия	590
§ 16.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем	591
§ 16.8. Экспериментальное исследование полей	592
§ 16.9. Соотношение между проводимостью и емкостью	593
§ 16.10. Общая характеристика задач на расчет электрического поля в проводящей среде и методов их решения	595
§ 16.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами	596

Глава семнадцатая

Магнитное поле постоянного тока

§ 17.1. Связь основных величин, характеризующих магнитное поле	599
§ 17.2. Основной закон магнитного поля — закон полного тока	600
§ 17.3. Дифференциальная форма закона полного тока	601
§ 17.4. Раскрытие выражения $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ в декартовой системе координат	602
§ 17.5. Выражение ротора в виде векторного произведения	603
§ 17.6. Раскрытие $\text{rot } \vec{H}$ в виде определителя в декартовой системе	603

§ 17.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат	604
§ 17.8. Принцип непрерывности магнитного потока и запись его в дифференциальной форме	604
§ 17.9. Магнитное поле в областях, «занятых» и «незанятым» постоянным током	605
§ 17.10. Скалярный потенциал магнитного поля	605
§ 17.11. Граничные условия	606
§ 17.12. Векторный потенциал магнитного поля	608
§ 17.13. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала	609
§ 17.14. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала	610
§ 17.15. Векторный потенциал элемента тока	612
§ 17.16. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей	613
§ 17.17. Задачи на расчет магнитных полей	614
§ 17.18. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей	615
§ 17.19. Опытное исследование картины магнитного поля	615
§ 17.20. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления	616
§ 17.21. Магнитное экранирование	618
§ 17.22. Эллипсоид во внешнем однородном поле	621
§ 17.23. Применение метода зеркальных изображений	621
§ 17.24. Закон Био — Савара — Лапласа	628
§ 17.25. Определение скалярного магнитного потенциала контура с током через телесный угол	631
§ 17.26. Магнитное поле намагниченной пленки (ленты)	632

Глава восемнадцатая

Основные уравнения переменного электромагнитного поля

§ 18.1. Определение переменного электромагнитного поля	633
§ 18.2. Первое уравнение Максвелла	633
§ 18.3. Уравнение непрерывности	635
§ 18.4. Второе уравнение Максвелла	635
§ 18.5. Уравнение Максвелла в комплексной форме записи	636
§ 18.6. Теорема Умова — Пойнтинга для мгновенных значений	637
§ 18.7. Теорема Умова — Пойнтинга в комплексной форме записи	643
§ 18.8. Некоторые замечания к § 18.1	645
§ 18.9. Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики)	647

Глава девятнадцатая

Переменное электромагнитное поле в однородной и изотропной проводящих средах

§ 19.1. Уравнения Максвелла для проводящей среды	651
§ 19.2. Плоская электромагнитная волна	652
§ 19.3. Распределение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве	655
§ 19.4. Глубина проникновения и длина волны	656
§ 19.5. Магнитный поверхностный эффект	657
§ 19.6. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе	661
§ 19.7. Применение теоремы Умова — Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивлений проводников при переменном токе	664

Глава двадцатая

Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектриках. Процессы в полупроводящих средах

§ 20.1. Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектриках	665
§ 20.2. Плоские волны в однородных и изотропных полупроводящих средах	669
§ 20.3. Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред	670
§ 20.4. Переходные и релаксационные процессы в несовершенных диэлектриках	671
§ 20.5. О расчете полей в несовершенных диэлектриках и вязких средах при установившемся синусоидальном режиме	672

Глава двадцать первая

Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля и излучение электромагнитной энергии

§ 21.1. Вывод уравнений для \vec{A} и φ в переменном электромагнитном поле и их решение	673
§ 21.2. Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля	679
§ 21.3. Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала	680
§ 21.4. Излучение электромагнитной энергии	681
§ 21.5. Понятие об излучающем диполе	686
§ 21.6. Дополнительный анализ поля излучения	688
§ 21.7. Расчет поля реальных излучателей	690
§ 21.8. Излучение магнитного диполя и принцип двойственности	691
§ 21.9. Переход плоской электромагнитной волны из одной среды в другую	692
§ 21.10. Экранирование в переменном электромагнитном поле	694
§ 21.11. Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях	694
§ 21.12. Высокочастотный нагрев металлических деталей и несовершенных диэлектриков	694
§ 21.13. Понятие о волноводах и объемных резонаторах	695

Приложения к части III

Приложение М. Расчет полей по методу сеток и моделирование полей по методу электрических сеток	698
--	-----

§ М.1. Расчет полей по методу сеток	698
§ М.2. Моделирование полей по методу электрических сеток	700
Приложение Н. Метод Грина	701
§ Н.1. Формулы Грина	701
§ Н.2. Гармонические функции	702
§ Н.3. Интеграл Грина для гармонических функций	702
§ Н.4. Функция Грина	703
§ Н.5. Определение потенциала φ через функцию Грина в общем случае	704

Приложение О. Метод интегральных уравнений	704
--	-----

Приложение П. Метод конформных преобразований (отображений)	707
---	-----

§ П.1. Комплексный потенциал	707
§ П.2. Конформные преобразования	707
§ П.3. Прямая и обратная задачи на расчет полей по методу конформных преобразований	709

§ П.4. Преобразование равномерного поля на плоскости z в поле верхней полуплоскости w	711
§ П.5. Интеграл Кристоффеля — Шварца	712
§ П.6. Применение интеграла Кристоффеля — Шварца	713
Приложение Р. Основы теории волноводов	714
Приложение С. Основы магнитной гидродинамики	720
§ С.1. Определение магнитной гидродинамики и краткая характеристика областей ее применения	720
§ С.2. Уравнения магнитной гидродинамики	720
§ С.3. Просачивание или диффузия магнитного поля	722
§ С.4. Электромагнитный барьер	723
§ С.5. Вмороженное поле	723
§ С.6. Возникновение волн в плазме	723
§ С.7. Эффект сжатия (пинч-эффект)	725
§ С.8. Принцип работы магнитного насоса и магнитного вентиля	725
§ С.9. Принцип работы магнитного гидродинамического генератора	726
§ С.10. Принцип работы плазменного реактивного двигателя	726
Приложение Т. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях	726
§ Т.1. Движение электрона в равномерном магнитном поле, неизменном во времени и направленном перпендикулярно скорости	726
§ Т.2. Движение электрона в неизменном во времени магнитном поле, когда скорость электрона не перпендикулярна силовым линиям	727
§ Т.3. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени магнитным полем (магнитная линза)	728
§ Т.4. Движение электронов в равномерном электрическом поле. Принцип работы электронного осциллографа	728
§ Т.5. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени электрическим полем (электрическая линза)	729
§ Т.6. Движение электрона в равномерных, взаимно перпендикулярных, неизменных во времени магнитных и электрических полях	729
§ Т.7. Движение заряженных частиц в кольцевых ускорителях	731
Приложение У. Свойства некоторых проводниковых материалов и диэлектриков	732
Литература по курсу ТОЭ и смежным вопросам	733

Лев Алексеевич Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Редактор *Л. А. Романова*. Худож. редактор *Т. М. Скворцова*. Переплет художника *В. М. Лукьянова*. Технический редактор *С. П. Передерий*. Корректор *Г. И. Кострикова*.

Т-00524. Сдано в набор 20/IV 1972 г. Подп. к печати 29/I 1973 г. Формат 60×90¹/₁₆. Уч.-изд. л. 45,55. Объем 47 п. л. Тираж 145 000 экз. Изд. № ЭР-128. Заказ 178. Цена 1 р. 38 к.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1973 год. Позиция № 116.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

1р.38к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКВА
ВЫСШАЯ ШКОЛА



1973 год